ΘΕΩΡΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ - 1Η ΔΕΣΜΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 1

Έστω $L, L' \subseteq \Sigma^*$ και οι παρακάτω γλώσσες:

1. $Pref(L) = \{w \in \Sigma^* : x = wy$ για κάποια $x \in L, y \in \Sigma^*\}$ (το σύνολο των προθεμάτων της L).
2. $Suf(L) = \{w \in \Sigma^* : x = yw$ για κάποια $x \in L, y \in \Sigma^*\}$ (το σύνολο των προθεμάτων της L).
3. $Subseq(L) = \{w_1 w_2 \ldots w_k : k \in N, w_i \in \Sigma^*$ για $i = 1, \ldots, k$ και υπάρχει μία συμβολοσειρά $x = x_0 w_1 x_2 \ldots w_k x_k \in L\}$ (το σύνολο των υπακολουθιών της L)
4. $L \setminus L' = \{w \in \Sigma^* : wx \in L$ για κάποιο $x \in L'\}$
5. $Max(L) = \{w \in L :\ x \neq \lambda$ συνεπάγεται $wx \notin L\}$

Να δείξετε ότι αν η L γίνεται δεκτή από κάποιο πεπερασμένο αυτόματο, τότε το ίδιο θα ισχύει και για καθεμία από τις παρακάτω γλώσσες.

(α) $Pref(L)$

(β) $Suf(L)$

(γ) $Subseteq(L)$

(δ) L/L' όπου L' γίνεται δεκτή από κάποιο πεπερασμένο αυτόματο.

(ε) L/L' όπου L' είναι μία οποιαδήποτε γλώσσα.

(στ) $Max(L)$

Άσκηση 2

Μία γλώσσα L είναι καθορισμένη όταν υπάρχει κάποιο k τέτοιο ώστε, για κάθε συμβολοσειρά w, το κατά πόσο $w \in L$ εξαρτάται μόνον από τα τελευταία k σύμβολα του w.

(α) Να δείξετε ότι κάθε καθορισμένη γλώσσα γίνεται δεκτή από ένα πεπερασμένο αυτόματο.

(β) Να δείξετε ότι η κλαση των καθορισμένων γλωσσών είναι κλειστή ως προς την ένωση και τη συμπλήρωση.

Άσκηση 3

Στο μοναδιαίο σύστημα χρησιμοποιείται μόνο το σύμβολο '1'. Π.χ το 5 στο μοναδιαίο σύστημα ανιπαρίσταται ως 11111. Να δείξετε για κάθεμία από τις παρακάτω αν είναι ή όχι κανονική γλώσσα.

(α) $\{w : w$ είναι η μοναδιαία παράσταση ενός πολλαπλασίου του $7\}$

(β) $\{w : w$ είναι η δεκαδική παράσταση ενός πολλαπλασίου του $7\}$

(γ) $\{w : w$ είναι για κάποιο $n \geq 1,$ η μοναδιαία παράσταση του $10^n\}$

(δ) $\{w : w$ είναι για κάποιο $n \geq 1,$ η δεκαδική παράσταση του $10^n\}$

(ε) $\{w : w$ είναι μία ακολουθία δεκαδικών ψηφίων που εμφανίζεται στην άπειρη δεκαδική ανάπτυξη του $1/7$

Άσκηση 4

Οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς·

(α) Κάθε υποσύνολο μίας κανονικής γλώσσας είναι κανονικό.

(β) Κάθε κανονική γλώσσα έχει ένα κανονικό γνήσιο υποσύνολο.

(γ) Αν η L είναι κανονική, τότε είναι και η $\{xy : x \in L$ και $y \notin L\}$

(δ) Η $\{w : w = w^R\}$ είναι κανονική.

(ε) Αν η L είναι κανονική γλώσσα, τότε είναι επίσης και η $\{w : w \in L$ και $w^R \in L\}$.

Άσκηση 5

(α) Αποδείξτε ότι οι γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα είναι κλειστές ως προς την ένωση, την παράθεση και την Kleene star.

(β) Χρησιμοποιήστε την κλειστότητα ως προς την ένωση για να δειξετε ότι οι γλώσσες $\{a^m b^n : m \neq n\}$ και $\{a, b\} - \{a^n b^n : n \geq 0\}$ είναι χωρίς συμφραζόμενα.

Άσκηση 6

Αποδείξτε ότι η τομή μίας γλώσσας χωρίς συμφραζόμενα με μία κανονική γλώσσα είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

Άσκηση 7

Αποδείξτε ότι οι γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα δεν είναι κλειστές ως προς την τομή και τη συμπλήρωση.

Άσκηση 8

Χρησιμοποιώντας το λήμμα άντλησης αποδείξτε ότι η γλώσσα $\{0^n 1^n 0^n 1^n | n \geq 0\}$ δεν είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

Άσκηση 9

Αν A και B είναι γλώσσες, ορίζουμε $A \diamond B = \{xy | x \in A$ και $y \in B$ και $|x| = |y|\}$. Δείξτε ότι αν A και B είναι κανονικές γλώσσες, τότε $A \diamond B$ είναι μία γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

Άσκηση 10

Για κάθε γλώσσα A, έστω ΚΑΤΑΛΗΞΗ$(A) = \{v | uv \in A$ για κάποια συμβολοσειρά $u\}$. Δείξτε ότι η κλάση των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα είναι κλειστή ως προς τη λειτουργία ΚΑΤΑΛΗΞΗ.