6 – Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί

Γραφικά με Υπολογιστές

Τμήμα Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πειραιά

Γ. Αναστασάκης, 2011

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί (geometric transformations)

- Χρησιμοποιούνται για τη μεταβολή με συγκεκριμένους τρόπους των συντεταγμένων σημείων
- Κατ' επέκταση, για τη μεταβολή με συγκεκριμένους τρόπους γεωμετρικών σχημάτων τα οποία ορίζονται από σημεία: ευθ. τμήματα, πολύγωνα, επιφάνειες, κ.ά.
- Βασικότεροι μετασχηματισμοί:
  - ✓ Μετατόπιση (translation)
  - ✓ Περιστροφή (rotation)
  - ✓ Κλιμάκωση (scaling)
- Οι παραπάνω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί:
  - ✓ Διατηρούν συνευθειακότητα σημείων
  - ✓ Διατηρούν λόγους αποστάσεων συνευθειακών σημείων

Ομογενείς συντεταγμένες (homogeneous coordinates)

- Τρόπος αναπαράστασης συντεταγμένων σημείων ο οποίος διευκολύνει τη μετέπειτα εφαρμογή γραμμικών μετασχηματισμών εκφρασμένων ως πίνακες
- Δισδιάστατο σημείο $(x, y) \quad (xw, yw, w)$
- Τρισδιάστατο σημείο $(x, y, z) \quad (xw, yw, zw, w)$
- Αναπαράσταση ομογενών συντεταγμένων με πίνακες:

$$2\mathrm{D}:(x\,,y)\rightarrow\begin{bmatrix}xw\\yw\\w\end{bmatrix},w=1\rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix},3\mathrm{D}:(x\,,y\,,z)\rightarrow\begin{bmatrix}xw\\yw\\zw\\w\end{bmatrix},w=1\rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}$$

Πίνακες μετασχηματισμών (transformation matrices)

- Ομοιόμορφη αναπαράσταση μετασχηματισμών
- Χρησιμοποιείται ευρέως σε μηχανές και βιβλιοθήκες προγραμματισμού γραφικών όπως η OpenGL
- Εφαρμογή μετασχηματισμού μέσω πολλαπλασιασμού πίνακα μετασχηματισμού με ομογενείς συντεταγμένες σημείων εκφρασμένες ως πίνακες
- Δυνατότητα συνδυασμού μετασχηματισμών ως σειρά πολλαπλασιασμών των αντίστοιχων πινάκων
- Η σειρά των πολλαπλασιασμών έχει σημασία γιατί ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετική πράξη
- Σειρά πολλαπλασιασμών η αντίστροφη σειρά εφαρμογής των επιθυμητών μετασχηματισμών

Μετατόπιση (translation)

- Μετατόπιση κορυφής διανύσματος με αρχή στην αρχή των αξόνων και κορυφή στο σημείο κατά (t_x, t_y) στο επίπεδο:

$$T\left(t_x, t_y\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

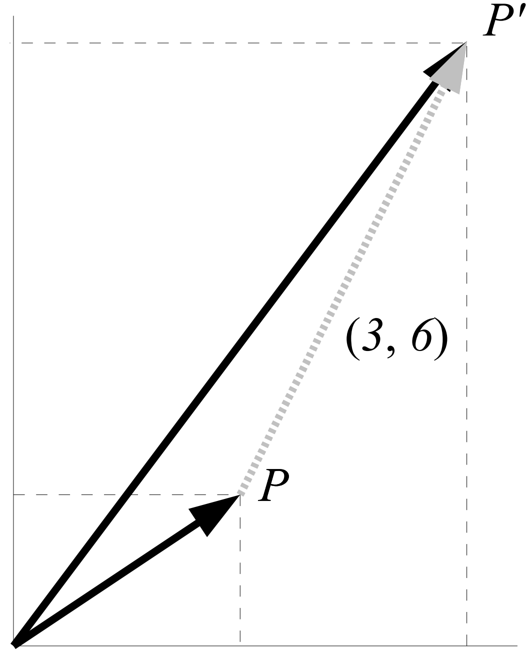
Παράδειγμα μετατόπισης

- Παράδειγμα: Μετατόπιση σημείου $P = (3, 2)$ κατά $(3, 6)$:

$$P' = T(3,6)\cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 0\cdot 2 + 3\cdot 1 \\ 0\cdot 3 + 1\cdot 2 + 6\cdot 1 \\ 0\cdot 3 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3+3 \\ 2+6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = (6,8)$$



Περιστροφή (rotation)

- Περιστροφή διανύσματος με αρχή στην αρχή των αξόνων και κορυφή στο σημείο κατά θ στο επίπεδο:

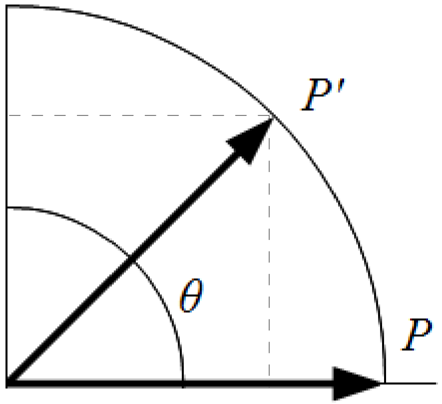
$$R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Παράδειγμα περιστροφής

- Παράδειγμα: Περιστροφή σημείου $P = (1, 0)$ κατά $\pi/4$:

$$P' = R\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot P = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$



Κλιμάκωση (scaling)

- Κλιμάκωση διανύσματος με αρχή στην αρχή των αξόνων και κορυφή στο σημείο κατά (s_x, s_y) στο επίπεδο:

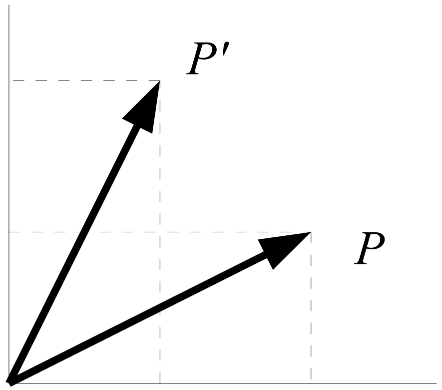
$$S\left(s_x, s_y\right)=\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα κλιμάκωσης

- Παράδειγμα: Κλιμάκωση σημείου $P = (2, 4)$ κατά $(2, 1/2)$:

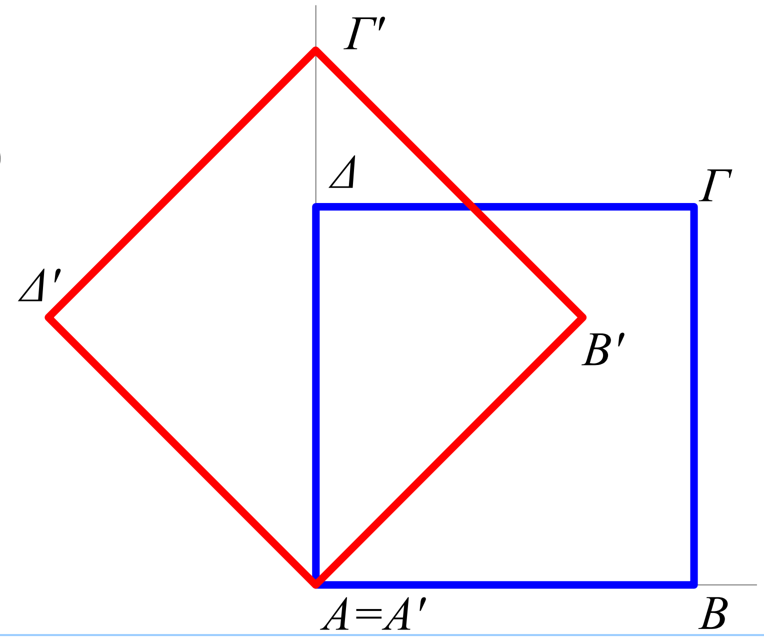
$$P' = S\left(2, \frac{1}{2}\right) \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (4, 2)$$



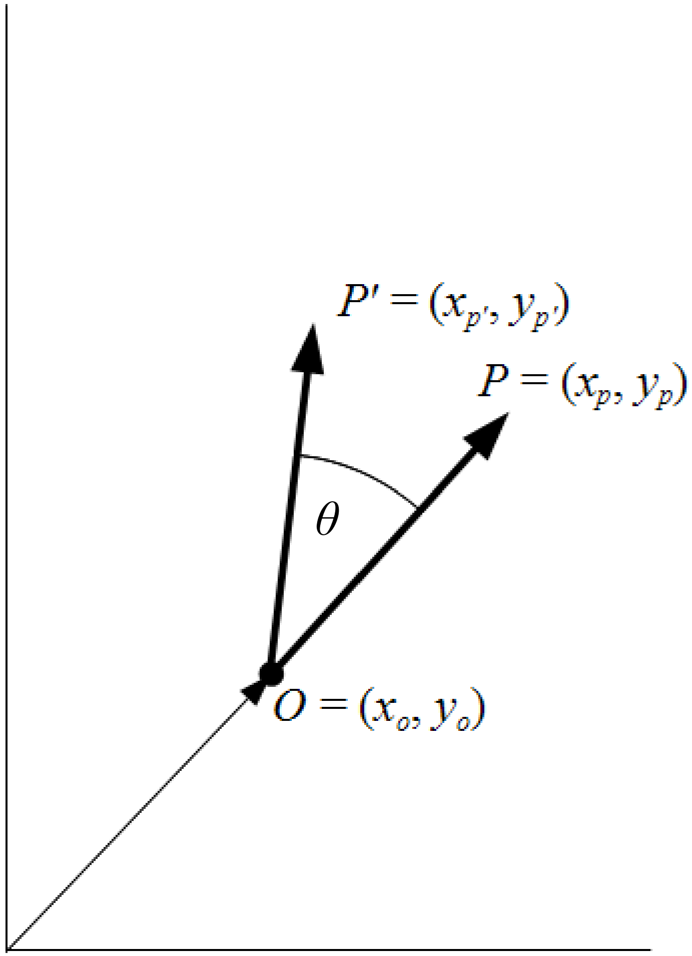
Εφαρμογή σε πολύγωνα

- Εφαρμογή μετασχηματισμού σε κάθε σημείο του πολυγώνου
- Παράδειγμα: Περιστροφή τετραγώνου κατά $\pi/4$:
  - ✓ $(AB\Gamma\Delta)$, $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $\Gamma = (1, 1)$, $\Delta = (0, 1)$
  - ✓ $A' = A \cdot R(\pi/4) = (0, 0)$
  - ✓ $B' = B \cdot R(\pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$
  - ✓ $\Gamma' = \Gamma \cdot R(\pi/4) = (0, \sqrt{2})$
  - ✓ $\Delta' = \Delta \cdot R(\pi/4) = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$



Συνδυασμός μετασχηματισμών

- Εφαρμογή σειράς μετασχηματισμών σε σημείο
- Παράδειγμα: Περιστροφή γύρω από τυχαίο σημείο
- Είναι απαραίτητο να εφαρμοστεί μία σειρά μετασχηματισμών:
  - ✓ Μετατόπιση OP στην αρχή των αξόνων, δηλ., κατά $(-x_o, -y_o)$
  - ✓ Περιστροφή OP κατά θ
  - ✓ Μετατόπιση OP στην αρχική θέση, δηλ., κατά (x_o, y_o)
- Σειρά πολλαπλασιασμών αντίστροφη μετασχηματισμών



Συνδυασμός μετασχηματισμών

✓ $T(x_o, y_o) \cdot R(\theta) \cdot T(-x_o, -y_o) \cdot P$

✗ $T(-x_o, -y_o) \cdot R(\theta) \cdot T(x_o, y_o) \cdot P$

Μνημονικός κανόνας: ο πρώτος από αριστερά πίνακας αντιστοιχεί στον τελευταίο μετασχηματισμό που θα εφαρμοστεί