ΠΜΣ "ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ"
(ΠΛΗ2, $6^{ος}$ κύκλος, $1^{ο}$ εξάμηνο, 2023)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κ. ΜΑΝΕΣ - Ι. ΤΑΣΟΥΛΑΣ

Σημειώσεις διαλέξεων 6

Κεφάλαιο 4

Δυαδική άλγεβρα Boole

4.1 Ορισμός

Έστω $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ και οι εσωτερικές πράξεις $+, \cdot$ που ορίζονται ως εξής:

x	y	$x+y$	$x \cdot y$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

Ορίζουμε επίσης την εσωτερική μονομελή πράξη ‘‘συμπλήρωμα’’ στο $\mathcal{B}$ η οποία συμβολίζεται με $'$ (ή $^{-}$) και ορίζεται ως εξής:

x	x'
1	0
0	1

Το σύνολο $\mathcal{B}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις $+$, $\cdot$, $'$ ονομάζεται **δυαδική άλγεβρα Boole**.

Παρατήρηση Ο ορισμός της δυαδικής άλγεβρας Boole επεκτείνεται (γενικεύοντας την έννοια του συμπληρώματος) και στην περίπτωση όπου το $\mathcal{B}$ έχει πάνω από δύο στοιχεία.

4.2 Ιδιότητες

Στη δυαδική άλγεβρα Boole ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=y+x \\ x\cdot y=y\cdot x \end{array}\right\} \quad \text{(αντιμεταθετικότητα)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+(y+z)=(x+y)+z \\ x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z \end{array}\right\} \quad \text{(προσεταιριστικότητα)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+(x\cdot y)=x \\ x\cdot(x+y)=x \end{array}\right\} \quad \text{(απορροφητικότητα)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+x=x \\ x\cdot x=x \end{array}\right\} \quad \text{(αδυναμία)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z \\ x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z) \end{array}\right\} \quad \text{(επιμεριστικότητα)}$$

Ισχύουν επίσης οι παρακάτω ιδιότητες:

i. $(x')'=x$

ii. $x+0=x$ και $x+1=1$.

iii. $x\cdot 0=0$ και $x\cdot 1=x$.

iv. $x+x'=1$ και $x\cdot x'=0$.

v. $x'+x\cdot y=x'+y$.

vi. $\left.\begin{array}{l} (x+y)'=x'\cdot y' \\ (x\cdot y)'=x'+y' \end{array}\right\}$ (τύποι De Morgan).

Παρατήρηση: Συνήθως, όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, το σύμβολο "$\cdot$" παραλείπεται.

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων γίνονται με πίνακες ή χρησιμοποιώντας προηγούμενες ιδιότητες.

Παραδείγματα αποδείξεων με ιδιότητες:

$$\begin{aligned} &x+xy=x1+xy=x(1+y)=x1=x \\ &x(x+y)=xx+xy=x+xy=x \\ &x+x'y=(x+x')(x+y)=1(x+y)=x+y \\ &x'+xy=(x'+x)(x'+y)=1(x'+y)=x'+y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (vi) \qquad &(x+y)x'y'=xx'y+yx'y'=0+0=0 \\ &(x+y)+x'y'=x+(y+x'y')= \\ &x+(y+x')(y+y')=x+y+x'=1+y=1 \end{aligned}$$

οπότε το άθροισμα $x+y$ έχει συμπλήρωμα το γινόμενο $x'y'$, δηλαδή $(x+y)'=x'y'$.

Παραδείγματα αποδείξεων με πίνακα:

1. Απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

x	y	z	$y+z$	$x+(y+z)$	$x+y$	$(x+y)+z$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0

2. Απόδειξη των επιμεριστικών ιδιοτήτων

$$x(y + z) = xy + xz$$

x	y	z	$y+z$	$x(y+z)$	xy	xz	$xy+xz$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$$x{+}yz = (x{+}y)(x{+}z)$$

x	y	z	yz	$x+yz$	$x+y$	$x+z$	$(x+y)(y+z)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

3. Απόδειξη των ιδιοτήτων iv

$$x + x' = 1 \text{ και } xx' = 0$$

x	x'	$x+x'$	xx'
0	1	1	0
1	0	1	0

4. Απόδειξη της απορροφητικής ιδιότητας

$$x + xy = x :$$

$$x + xy \overset{1}{=} x1 + xy \overset{2}{=} x(1+y) \overset{3}{=} x1 \overset{1}{=} x.$$

5. Απόδειξη της ιδιότητας v.

$$x' + xy = x' + y :$$

$$x' + xy \overset{4}{=} (x' + x)(x' + y) \overset{5}{=} 1(x' + y) \overset{1}{=} x' + y.$$

[1] Λόγω της ιδιότητας *iii*.
[2] Λόγω της πρώτης σχέσης της επιμεριστικότητας.
[3] Λόγω της ιδιότητας *ii*.
[4] Λόγω της δεύτερης σχέσης της επιμεριστικότητας.
[5] Λόγω της ιδιότητας *iv*.

4.3 Εξισώσεις

Θέλουμε να βρούμε τις τιμές του x, ή των x, y, ή των x, y, z, … για τις οποίες επαληθεύονται οι εξισώσεις. (Φυσικά $x, y, z, \ldots \in \mathcal{B} = \{0, 1\}$.)

Παράδειγμα 1 Να λυθεί η εξίσωση

$$x'y + xy' = 0.$$

x	y	x'	$x'y$	y'	xy'	$x'y + xy'$
1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0

Άρα $\begin{cases} x = y = 1 \\ \text{ή} \\ x = y = 0. \end{cases}$

Παράδειγμα 2 Να λυθεί η εξίσωση

$$xz' + x'yz + y'z' = 1.$$

Έστω $F = xz' + x'yz + y'z'$.

x	y	z	z'	xz'	x'	yz	$x'yz$	y'	$y'z'$	$xz' + x'yz$	F
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1

Άρα, $\begin{cases} x = y = 1, z = 0 \\ \text{ή} \\ x = 1, y = z = 0 \\ \text{ή} \\ x = 0, y = z = 1 \\ \text{ή} \\ x = y = z = 0. \end{cases}$

Παράδειγμα 3 Να λυθεί (και διερευνηθεί) η εξίσωση

$$ax + bx' = 0, \text{ όπου } a, b \in \mathcal{B}.$$

a	b	$ax + bx'$	
1	1	$x + x'$ (=1)	→ Άρα αδύνατη.
1	0	x	→ Άρα $x = 0$.
0	1	x'	→ Άρα $x' = 0$, (δηλαδή $x = 1$).
0	0	0	→ Άρα ταυτότητα, δηλαδή ισχύει για κάθε x, (δηλαδή ισχύει για $x = 0$ και για $x = 1$).

4.4 Συστήματα

Να λυθεί το σύστημα $\left\{ \begin{array}{ll} x' + xy' & = 1 \\ x + xy & = 0 \end{array} \right\}$.

x	y	x'	y'	xy'	xy	$x' + xy'$	$x + xy$
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0

Άρα $(x, y) = (0, 1)$ ή $(x, y) = (0, 0)$.

4.5 Συναρτήσεις Boole

Κάθε συνάρτηση $f : \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$ λέγεται **συνάρτηση Boole**.

Παράδειγμα: 1

$$f : \mathcal{B}^2 \to B \text{ με } f(x,y) = xy' + x'y.$$

Η f παίρνει τις τιμές:
$f(1,1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0,$
$f(1,0) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 + 0 = 1,$
$f(0,1) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1,$
$f(0,0) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0,$
ή (με πίνακα)

x	y	y'	xy'	x'	$x'y$	f
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0

Παράδειγμα: 2

$$f : \mathcal{B}^3 \to B \text{ με } f(x,y,z) = xy + z'.$$

Η f παίρνει τις τιμές:
$f(1,1,1) = 1 \cdot 1 + 0 = 1 + 0 = 1,$
$f(1,1,0) = 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 = 1,$
$f(1,0,1) = 1 \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0,$ κ.λπ.

4.5.1 Απλοποίηση τύπου συνάρτησης

Τα επόμενα παραδείγματα αναφέρονται σε συναρτήσεις των τριών και τεσσάρων μεταβλητών και αντιμετωπίζονται με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των προηγουμένων παραγράφων.

1. Για τη συνάρτηση $f = (x+y)(y+z)(z+x)$ είναι

$$\begin{aligned} f &= (x+y)(y+z)(z+x) = (y+xz)(z+x) \\ &= yz + xz + xy + xz = xy + yz + zx. \end{aligned}$$

2. Για τη συνάρτηση $f = (xy' + y)z'(x + y' + z)$ είναι

$$\begin{aligned} f &= (xy' + y)z'(x + y' + z) = (xy' + y)(xz' + z'y') \\ &= xy'z' + xyz' + xy'z' = xy'z' + xyz' = xz'. \end{aligned}$$

3. Για τη συνάρτηση $f = (x' + y)(z' + w)(y' + w')z$ είναι

$$\begin{aligned} f &= (x' + y)(y' + w')(z' + w)z \\ &= (x' + y)(y' + w')wz = (x' + y)ywz = x'y'wz. \end{aligned}$$

4.5.2 Εύρεση τύπου συνάρτησης από τον πίνακα τιμών

Όταν δίδεται ο πίνακας των τιμών μιας συνάρτησης Boole και ζητείται ο τύπος της, τότε εφαρμόζονται οι ακόλουθοι δύο αλγόριθμοι.

Αλγόριθμος κανονικής διαζευκτικής μορφής DNF:

B_0: Διάβασε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης.

B_1: Για κάθε γραμμή με $f = 1$ σχημάτισε το γινόμενο $x_1^* x_2^* \cdots x_n^*$ με

$$x_i^* = \begin{cases} x_i & \text{όταν } x_i = 1 \\ x_i' & \text{όταν } x_i = 0 \end{cases}$$

B_2: Πρόσθεσε τα προηγούμενα γινόμενα.

Έτσι, από τον πίνακα

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση

$$f = x'y'z + x'yz' + xy'z = (x' + x)y'z + x'yz' = y'z + x'yz'.$$

Αλγόριθμος κανονικής συζευκτικής μορφής CNF:

B_0: Διάβασε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης.

B_1: Για κάθε γραμμή με $f = 0$ σχημάτισε το άθροισμα $x_1^* + x_2^* + \cdots + x_n^*$ με

$$x_i^* = \begin{cases} x_i & \text{όταν } x_i = 0 \\ x_i' & \text{όταν } x_i = 1 \end{cases}$$

B_2: Πολλαπλασίασε τα προηγούμενα αθροίσματα.

Έτσι, από τον πίνακα

x	y	z	f
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	0	1

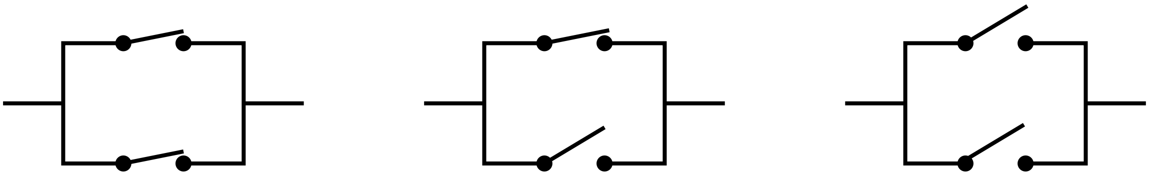
προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση

$$f = (x' + y' + z')(x' + y + z')(x' + y + z)(x + y' + z).$$

4.6 Εφαρμογές

4.6.1 Διακόπτες

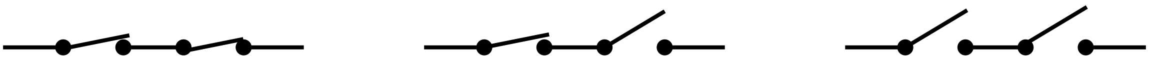
Διακόπτες 'παράλληλοι' $\longrightarrow +$



$1+1=1$ $\quad$ $1+0=1$ $\quad$ $0+0=0$

$(0+1=1)$

Διακόπτες 'σε σειρά'$\longrightarrow \cdot$



$1\cdot 1=1$ $\quad$ $1\cdot 0=0$ $\quad$ $0\cdot 0=0$

$(0\cdot 1=0)$

4.6.2 Δίπολα

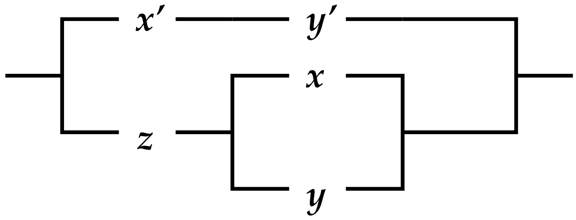
Σε κάθε συνάρτηση Boole αντιστοιχεί ένα δίπολο και αντίστροφα:

Παράδειγμα 1

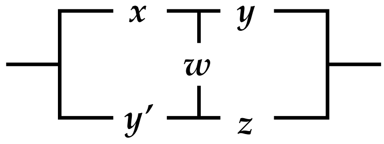
Στη συνάρτηση

$$f(x,y,z)=x'y'+z(x+y).$$

αντιστοιχεί το δίπολο



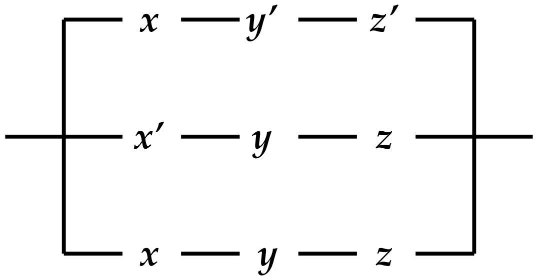
Παράδειγμα 2
Στο δίπολο



αντιστοιχεί η συνάρτηση

$$\begin{aligned} f(x,y,z,w) &= xy + xwz + y'wy + y'z \\ &= xy + xwz + y'yw + y'z \\ &= xy + xwz + 0w + y'z \\ &= xy + xwz + y'z. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3
Στο δίπολο



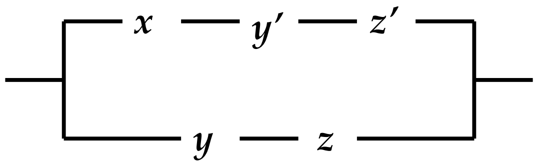
αντιστοιχεί η συνάρτηση

$$f(x,y,z) = xy'z' + x'yz + xyz$$

Αλλά

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xy'z' + (x' + x)yz \\ &= xy'z' + 1 \cdot yz \\ &= xy'z' + yz, \end{aligned}$$

οπότε παίρνουμε το αντίστοιχο (απλούστερο) δίπολο



4.6.3 Άλγεβρα λογικών προτάσεων

Α (αληθής πρόταση) αντί 1.
Ψ (ψευδής πρόταση) αντί 0.
$\vee$ (ή) αντί $+$.
$\wedge$ (και) αντί $\cdot$.
$\neg$ (άρνηση) αντί $'$.
Οι τρεις πράξεις της Άλγεβρας Boole, δίνουν τις αντίστοιχες πράξεις της άλγεβρας λογικών προτάσεων.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

p	$\neg p$
Α	Ψ
Ψ	Α

Επίσης ορίζονται και οι πράξεις $\rightarrow$ (αν ... τότε), $\leftrightarrow$ (αν και μόνο αν) με βάση τον παρακάτω πίνακα:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α

Ο έλεγχος της αλήθειας των λογικών προτάσεων γίνεται με πίνακες αλήθειας.

Παράδειγμα: Για την πρόταση

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$$

προκύπτει ο παρακάτω πίνακας αλήθειας:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q)$
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ

Εκφράσεις της Λογικής και της Άλγεβρας Boole οι οποίες δίνουν σε κάθε περίπτωση αντίστοιχα αποτελέσματα (Α αντί 1 και Ψ αντί 0) θεωρούνται αντίστοιχες στη Λογική και την Άλγεβρα Boole.

Παράδειγμα: 1 Η συνεπαγωγή $p \to q$ της Λογικής αντιστοιχεί στην έκφραση $x' + y$ της Άλγεβρας Boole, αφού

p	q	$p \to q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

x	y	x'	$x' + y$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Παράδειγμα: 2 Η ισοδυναμία $p \leftrightarrow q$ της Λογικής αντιστοιχεί στην έκφραση $xy + x'y'$ της Άλγεβρας Boole αφού

p	q	$p \leftrightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

x	y	xy	x'	y'	$x'y'$	$xy + x'y'$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1

4.6.4 Αρχές Λογικής

Αρχή της διπλής άρνησης

Η $(x')' = x$ αντιστοιχεί στην $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$.

Αρχή της του τρίτου αποκλείσεως

Η $x + x' = 1$ δίνει ότι $p \vee \neg p$: Αληθής.

Αρχή της αντίφασης

Η $xx' = 0$ δίνει ότι $p \wedge \neg p$: Ψευδής.

4.6.5 Έλεγχος προτάσεων

Παράδειγμα: Ζητείται να μελετηθεί η διαδικασία του τρόπου επιλογής μεταξύ τριών αντικειμένων α, β, γ όταν:

1. Δεν μπορούν να επιλεχθούν και τα τρία.
2. Αν επιλεχθεί το γ, τότε θα επιλεχθεί και το α.
3. Αν δεν επιλεχθεί το β, τότε δεν θα επιλεχθεί και το α.
4. Αν δεν επιλεχθεί το γ, τότε δεν θα επιλεχθεί και το α.

Έστω οι προτάσεις p: ''επιλέγεται το α''. q: ''επιλέγεται το β'', r: ''επιλέγεται το γ'' τότε στις προηγούμενες προτάσεις αντιστοιχούν τα εξής:

1. $\neg(p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg r$.
2. $r \rightarrow p \Leftrightarrow \neg r \vee p$
3. $\neg q \rightarrow \neg p \Leftrightarrow q \vee \neg p$
4. $\neg r \rightarrow \neg p \Leftrightarrow r \vee \neg p$.

και στο σύνολό τους η σύνθετη πρόταση

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (r \vee \neg p)$$

Αντιστοιχίζοντας τις μεταβλητές $x, y, z \in \mathcal{B}$ στις προτάσεις p, q, r όταν αυτές αληθεύουν, τότε στην προηγούμενη σύνθετη πρόταση αντιστοιχεί η ακόλουθη συνάρτηση:

$$f = (x' + y' + z')(z' + x)(y + x')(z + x')$$

από την οποία προκύπτει

$$\begin{aligned} f &= (x' + y' + z')(z' + x)(z + x')(y + x') \\ &= (x' + y' + z')(xz + x'z')(y + x') \\ &= (xy'z + x'z' + x'y'z' + x'z')(y + x') \\ &= (xy'z + x'z' + x'y'z')(y + x') \\ &= x'yz' + x'z' + x'y'z' \\ &= x'z'(y + 1 + y') \\ &= x'z' \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Ζητείται να μελετηθεί το σύνολο των προτάσεων p_1, p_2, p_3, p_4 για τις οποίες ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν η p_1 είναι αληθής τότε και η p_2 είναι αληθής.
2. Η p_3 είναι αληθής, αν η p_4 είναι αληθής και μόνον τότε.
3. Οι p_2 και p_4 ουδέποτε συναληθεύουν.
4. Η p_3 είναι αληθής.

Αντιστοιχίζοντας τις μεταβλητές $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{B}$ στις προτάσεις p_1, p_2, p_3, p_4 όταν αυτές αληθεύουν, τότε στις προηγούμενες προτάσεις 1–4, αντιστοιχούν οι ακόλουθες συναρτήσεις

1. $x_1' + x_2$, γιατί πρόκειται για συνεπαγωγή.
2. $x_3x_4 + x_3'x_4'$, γιατί πρόκειται διπλή συνεπαγωγή.
3. $x_2' + x_4'$, γιατί τουλάχιστον μία εκ των p_2, p_3 είναι ψευδής.
4. x_3, γιατί η p_3 είναι αληθής.

και στο σύνολό τους η συνάρτηση

$$f = (x_1' + x_2)(x_3x_4 + x_3'x_4')(x_2' + x_4')x_3$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f &= (x_1' + x_2)(x_3x_4 + x_3'x_4')(x_2' + x_4')x_3 \\ &= (x_1' + x_2)(x_2' + x_4')x_3x_4 \\ &= (x_1'x_2' + x_1'x_4' + x_2'x_4')x_3x_4 \\ &= x_1'x_2'x_3x_4, \end{aligned}$$

οπότε οι προτάσεις p_1, p_2 είναι ψευδείς, ενώ οι προτάσεις p_3, p_4 είναι αληθείς.

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα της Άλγεβρας Boole:

$$\begin{cases} x + ay + b & = 1 \\ bx + ay & = 0 \\ x + bz' & = 1 \end{cases}$$

όπου $a, b, x, y, z \in \{0, 1\}$.

Ισοδύναμα, θεωρούμε την συνάρτηση $f = (x + ay + b)(bx + ay)'(x + bz')$ και αναζητούμε για ποιες πεντάδες (a, b, x, y, z) γίνεται ίση με 1, δηλαδή για ποιες πεντάδες ικανοποιείται η αντίστοιχη λογική έκφραση.

```
import sympy as sm
from pyeda.inter import *

a,b,x,y,z = sm.symbols('a,b,x,y,z')
ex1 = (x | a & y | b & z) & ( ~ (b & x | a & y)) & (x | b & ~z)
print("Find all assignments satisfying:\n", ex1)
print("Simplified expression (CNF):", sm.simplify_logic(ex1))
print("Simplified expression (DNF):", sm.simplify_logic(ex1, form =
    'dnf'))
print("\nSatisfying assignments:") #using pyeda
a, b, x, y, z = map(exprvar, 'abxyz')
ex1 = expr(str(ex1)) #(x | a & y | b & z) & ( ~ (b & x | a & y)) & (
    x | b & ~z)
it = ex1.satisfy_all()
for i in it: print(i)
es = ex1.to_dnf()
print("\nTruth table for %s:\n%s"%(es, expr2truthtable(es)))
```

Ouput:

```
Find all assignments satisfying:
 (x | (b & ~z)) & ~((a & y) | (b & x)) & (x | (a & y) | (b & z))
Simplified expression (CNF): x & ~b & (~a | ~y)
Simplified expression (DNF): (x & ~a & ~b) | (x & ~b & ~y)

Satisfying assignments:
{x: 1, b: 0, a: 0}
{y: 0, x: 1, b: 0, a: 1}

Truth table for Or(And(~b, x, ~y), And(~a, ~b, x)):
y x b a
0 0 0 0 : 0
0 0 0 1 : 0
0 0 1 0 : 0
0 0 1 1 : 0
0 1 0 0 : 1
0 1 0 1 : 1
```

```
0  1  1  0  :  0
0  1  1  1  :  0
1  0  0  0  :  0
1  0  0  1  :  0
1  0  1  0  :  0
1  0  1  1  :  0
1  1  0  0  :  1
1  1  0  1  :  0
1  1  1  0  :  0
1  1  1  1  :  0
```

4.7 Ασκήσεις προς επίλυση

1) Να αποδειχθούν οι ιδιότητες vi (De Morgan) της Άλγεβρας Boole.

2) Με χρήση των ιδιοτήτων, να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

   i) $xy' + yz + z'w + x'y'z$.

   ii) $x(x' + y)(z' + w)z$.

   iii) $x(x + yz'w) + w(x + x'y'z)$.

   iv) $(x' + yz')(xw + yz)(y + z')$.

   v) $y'(u + uw)(x + z) + y'u + yz(y + x + u(u + x))$.

3) Να λυθούν οι εξισώσεις της Άλγεβρας Boole:

   i) $x' + xy' = 1$.

   ii) $xy' + x'y + yz' = 0$.

   iii) $xyz' + x'yz + xyz = 1$.

4) Να λυθούν οι εξισώσεις της ’λγεβρας Boole:

   i) $x + xy + a(x + y) = a + y$.

   ii) $x + a(x + y) + by = bx + xy$,

   iii) $ax + by = 1$.

   iv) $ax + by = x$.

   v) $ax' + y = b$.

   vi) $x + y' + a = x + x'y + bx$.

   vii) $ax' = by$.

   viii) $ax + y = bz + y$.

   ix) $a(x + y) = z + b$.

   x) $abx + y + z = bz$.

   xi) $x + byz = ax' + yz$.

   όπου a, b είναι παράμετροι.

5) Να λυθούν τα συστήματα της Άλγεβρας Boole:

   i) $\left\{ \begin{array}{l} x' + xy' = 1 \\ x + xy = 0. \end{array} \right.$

ii) $\begin{cases} y + x'y + z = 1 \\ y' + xz + y'z = 0. \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x' + xy' + y' = 0 \\ y + x'y + x = 1. \end{cases}$

iv) $\begin{cases} (a+b)x + y = a \\ ax + aby = b \end{cases}$

v) $\begin{cases} x + y + z = x + y' \\ a + yz = b + yz \end{cases}$

όπου a, b είναι παράμετροι.

6) Να βρεθούν τα δίπολα που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις:

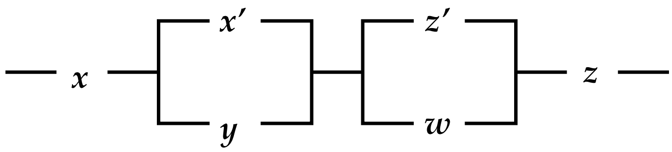
i) $f(x,y,z) = (x+y)z + x'y'z'$.

ii) $f(x,y,z) = xyz + x'yz + xy'z'$.

iii) $f(x,y,z) = (xyz)' + (x' + yz)'$.

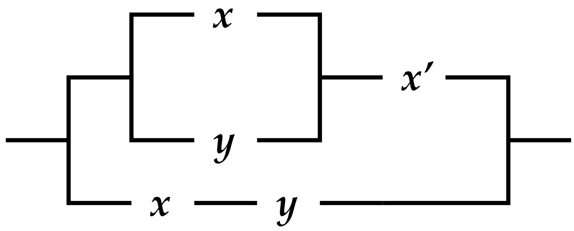
iv) $f(x,y,z) = (x + z + (x + y(x + yz)')')'$.

7) i) Να βρεθεί η συνάρτηση που αντιστοιχεί στο δίπολο



ii) Να απλοποιηθεί το παραπάνω δίπολο.

8) Να απλοποιηθεί το παρακάτω δίπολο.



9) Να γραφεί ο πίνακας αλήθειας για τις παρακάτω λογικές προτάσεις:

i) $(p \vee q) \to (\neg p \vee q)$.

ii) $p \to (q \wedge r)$.