ΠΜΣ ''ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ''
(ΠΛΗ2, $6^{ος}$ κύκλος, $1^{ο}$ εξάμηνο, 2023)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κ. ΜΑΝΕΣ - Ι. ΤΑΣΟΥΛΑΣ

Σημειώσεις διαλέξεων 9

Κεφάλαιο 6

Βασικές αρχές

6.1 Αρχή του Περιστερεώνα

Πρόταση
Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ δύο πεπερασμένα σύνολα, και μια απεικόνιση $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

(i) Αν f είναι $1-1$ τότε $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}|$.

(ii) Αν f είναι επί τότε $|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{B}|$.

Η πρόταση (i) ονομάζεται **αρχή του περιστερεώνα** (ή **αρχή του Dirichlet**). Στη βιβλιογραφία συνήθως παρουσιάζεται στην παρακάτω μορφή:

Αν για δύο πεπερασμένα σύνολα $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ισχύει ότι $|\mathcal{A}| > |\mathcal{B}|$ τότε δεν υπάρχει μια $1-1$ απεικόνιση από το $\mathcal{A}$ στο $\mathcal{B}$.

Στην πιο απλουστευμένη μορφή της (από την οποία έλαβε το όνομά της) η αρχή του περιστερεώνα διατυπώνει την προφανή παρατήρηση ότι:

Αν υπάρχουν n φωλιές (τα στοιχεία του $\mathcal{B}$) για $n+1$ περιστέρια (τα στοιχεία του $\mathcal{A}$), δεν είναι δυνατόν κάθε περιστέρι να έχει τη δική του φωλιά (και επομένως δύο περιστέρια θα μπούν στην ίδια φωλιά).

Η αρχή του περιστερεώνα έχει πολλές εφαρμογές όπως φαίνεται και από τα παρακάτω παραδείγματα.

1. Σε κάθε ομάδα 13 ατόμων υπάρχουν 2 άτομα που έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα.

   Πραγματικά, αν $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο των ατόμων και $\mathcal{B}$ το σύνολο των μηνών του έτους και $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι η απεικόνιση η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε άτομο τον μήνα που γεννήθηκε, τότε επειδή $|\mathcal{A}| = 13 > 12 = |\mathcal{B}|$, από την αρχή του περιστερεώνα έπεται ότι η f δεν είναι $1-1$ και άρα υπάρχουν $x, y \in \mathcal{A}$ με $f(x) = f(y)$, δηλαδή υπάρχουν 2 άτομα που έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα.

2. Αν διαλέξουμε $n+1$ διαφορετικούς αριθμούς απο σύνολο $[2n]$, τότε:

   (i) Υπάρχουν δύο αριθμοί από αυτούς που διαλέξαμε, οι οποίοι διαφέρουν ακριβώς κατά n.
   Έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο των $n+1$ αριθμών που διαλέξαμε και $\mathcal{B}$ το σύνολο των ζευγών

   $$\{\{1,n+1\},\{2,n+2\},\{3,n+3\},\ldots,\{n,2n\}\}.$$

   Προφανώς τα ζεύγη του $\mathcal{B}$ αποτελούν μια διαμέριση του $[2n]$ με την ιδιότητα τα στοιχεία κάθε ζεύγους να διαφέρουν ακριβώς κατά n. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ η οποία αντιστοιχίζει τον αριθμό x του $\mathcal{A}$ στο ζεύγος του $\mathcal{B}$ που περιέχει το x. Επειδή

   $$|\mathcal{A}| = n+1 > n = |\mathcal{B}|,$$

   από την αρχή του περιστερεώνα έπεται ότι η f δεν είναι $1-1$ και άρα υπάρχουν $x, y \in \mathcal{A}$ με $f(x) = f(y)$ δηλαδή τα x, y ανήκουν στο ίδιο ζεύγος, οπότε διαφέρουν ακριβώς κατά n.

   (ii) Υπάρχουν δύο αριθμοί από αυτούς που διαλέξαμε, οι οποίοι είναι διαδοχικοί.
   Ορίζεται το ίδιο σύνολο $\mathcal{A}$, ενώ για σύνολο $\mathcal{B}$ θεωρούμε το σύνολο των ζευγών

   $$\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\ldots,\{2n-1,2n\}\}.$$

   Προφανώς τα ζεύγη του $\mathcal{B}$ αποτελούν μια διαμέριση του $[2n]$ με την ιδιότητα τα στοιχεία κάθε ζεύγους να είναι διαδοχικοί αριθμοί. Θεωρούμε την απεικόνιση $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ η οποία αντιστοιχίζει τον αριθμό x του $\mathcal{A}$ στο ζεύγος του $\mathcal{B}$ που περιέχει το x. Επειδή

   $$|\mathcal{A}| = n+1 > n = |\mathcal{B}|,$$

   από την αρχή του περιστερεώνα έπεται ότι η g δεν είναι $1-1$ και άρα υπάρχουν $x, y \in \mathcal{A}$ με $g(x) = g(y)$ δηλαδή τα x, y ανήκουν στο ίδιο ζεύγος, οπότε είναι διαδοχικοί αριθμοί.

(iii) Υπάρχουν δύο αριθμοί από αυτούς που διαλέξαμε, οι οποίοι έχουν άθροισμα $2n+1$.

(iv) Υπάρχουν δύο αριθμοί απο αυτούς που διαλέξαμε, τέτοιοι ώστε ο ένας διαιρεί τον άλλο.

Πραγματικά, έστω $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ το σύνολο των αριθμών που διαλέξαμε. Για κάθε $i \in [n+1]$ ο αριθμός a_i του $\mathcal{A}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο υπό την μορφή

$$a_i = 2^{k_i}\rho_i$$

όπου $k_i \in \mathbb{N}$ και ρ_i: περιττός αριθμός. Επειδή $\rho_i \leq a_i \leq 2n$ και ρ_i περιττός έπεται ότι υπάρχουν το πολύ n διαφορετικά ρ_i. Έστω $\mathcal{B}$ το σύνολο των ρ_i. Τότε $|\mathcal{B}| \leq n < n+1 = |\mathcal{A}|$. Άρα, από την αρχή του περιστερεώνα η απεικόνιση $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ με $f(a_i) = \rho_i$ δεν είναι $1-1$. Άρα, υπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία a_i, a_j του $\mathcal{A}$ με $f(a_i) = f(a_j)$, δηλαδή με $\rho_i = \rho_j = \rho$. Τότε όμως έχουμε $a_i = 2^{k_i}\rho$ και $a_j = 2^{k_j}\rho$. Έστω $k_i > k_j$ (εργαζόμαστε αντίστοιχα αν $k_i < k_j$), οπότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}^*$ με $k_i = k_j + m$. Τότε,

$$\begin{aligned} a_i &= 2^{k_i}\rho = 2^{k_j+m}\rho = 2^{k_j}2^m\rho \\ &= 2^m 2^{k_j}\rho = 2^m a_j. \end{aligned}$$

Δηλαδή ο a_i είναι πολλαπλάσιο του a_j, ή ισοδύναμα ο a_j διαιρεί τον a_i.

3. Σε οποιαδήποτε ομάδα ανθρώπων υπάρχουν τουλάχιστον δύο που έχουν τον ίδιο αριθμό φίλων.

Πραγματικά, έστω $\mathcal{A}$ ένα σύνολο n ατόμων και $f : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ με $f(x)$ να είναι το πλήθος των φίλων του x στο $\mathcal{A}$. Προφανώς,

$$0 \leq f(x) \leq n-1.$$

Παρατηρούμε ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν

$$x, y \in \mathcal{A}, \text{ με } f(x) = 0 \text{ και } f(y) = n-1.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} &\text{ή } f(x) \in \{0,1,\ldots,n-2\} \text{ για κάθε } x \in \mathcal{A}, \\ &\text{ή } f(x) \in \{1,2,\ldots,n-1\} \text{ για κάθε } x \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Επειδή

$$|A| = n > n-1 = |\{0,1,\ldots,n-2\}| = |\{1,2,\ldots,n-1\}|,$$

από την αρχή του περιστερεώνα έπεται ότι η f δεν είναι $1-1$, άρα υπάρχουν $x, y \in \mathcal{A}$ με $f(x) = f(y)$, δηλαδή υπάρχουν δύο τουλάχιστον άτομα που έχουν τον ίδιο αριθμό φίλων.

4. Σε κάθε τριάδα φυσικών αριθμών x, y, z υπάρχουν τουλάχιστον δύο που το άθροισμά τους είναι άρτιος. Πραγματικά, έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο των τριών ακεραίων $\{x, y, z\}$ και $\mathcal{B}$ το σύνολο $\{0, 1\}$.

   Έστω $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ η απεικόνιση η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε ακέραιο του $\mathcal{A}$ την τιμή 0 αν είναι άρτιος και την τιμή 1 αν είναι περιττός.

   Επειδή $|\mathcal{A}| = 3 > 2 = |\mathcal{B}|$, από την αρχή του περιστερεώνα δύο τουλάχιστον από τους αριθμούς $\{x, y, z\}$ θα αντιστοιχίζονται στην ίδια τιμή 0 ή 1, δηλαδή θα είναι και οι δύο ή άρτιοι ή περιττοί.

   Επομένως το άθροισμά τους θα είναι άρτιος.

5. Να δειχθεί ότι ανάμεσα στους 7 δισεκατομμύρια ανθρώπους που ζουν αυτή τη στιγμή στη Γη, υπάρχουν τουλάχιστον δύο που γεννήθηκαν την ίδια ακριβώς στιγμή (έτος, ημέρα, ώρα, λεπτό, δευτερόλεπτο).

   Έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο των ανθρώπων που ζουν αυτή τη στιγμή στη Γη και $\mathcal{B}$ το σύνολο όλων των ημερομηνιών (έτος, ημέρα, ώρα, λεπτό, δευτερόλεπτο) των τελευταίων 150 ετών.

   Αν θεωρήσουμε την απεικόνιση $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ που αντιστοιχίζει σε κάθε άτομο την ακριβή στιγμή που γεννήθηκε (έτος, ημέρα, ώρα, λεπτό, δευτερόλεπτο) τότε

   $$|\mathcal{A}| = 7.000.000.000$$

   και

   $$|\mathcal{B}| < 150 \cdot 366 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 4.743.360.000 < 7.000.000.000 = |\mathcal{A}|$$

   οπότε, από την αρχή του περιστερεώνα προκύπτει ότι η f δεν είναι 1-1. Άρα, υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα που έχουν γεννηθεί την ίδια ακριβώς στιγμή.

6. Κάθε αλγόριθμος συμπίεσης-αποσυμπίεσης χωρίς απώλειες (lossless) αναγκαστικά παράγει κάποια αρχεία με μέγεθος μεγαλύτερο από το αρχικό τους.

Έστω ότι κάθε αρχείο αναπαρίσταται ως μια δυαδική λέξη b, και C είναι ένας αλγόριθμος συμπίεσης-αποσυμπίεσης χωρίς απώλειες.

Συμβολίζουμε με $|b|$ το μήκος της λέξης b.

Θεωρούμε την απεικόνιση[1] $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ με $f(x)$ το αποτέλεσμα της συμπίεσης της λέξης x από τον αλγόριθμο C. Προφανώς, $f(x) = f(y)$ αν και μόνο αν $x = y$ (δηλαδή η f πρέπει να είναι $1-1$, αλλιώς δεν θα είναι δυνατόν να αποσυμπιέσουμε ένα αρχείο).

Προφανώς, θα υπάρχει τουλάχιστον μια λέξη a με $|a| > |f(a)| = m$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{A}$ όλων των δυαδικών λέξεων μήκους το πολύ m.

Έστω ότι ο αλγόριθμος δεν παράγει κανένα αρχείο με μέγεθος μεγαλύτερο από το αρχικό του.

Τότε, $|x| \geq |f(x)|$ για κάθε x, οπότε θα έπρεπε $f(x) \in \mathcal{A} \setminus \{f(a)\}$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathcal{A}$, $f(x) \in \mathcal{A}$ (αφού $m \geq |x| \geq |f(x)|$) και $f(x) \neq f(a)$ (αφού $|a| > m$, έχουμε ότι $a \notin \mathcal{A}$ και άρα $a \neq x$ και επομένως $f(a) \neq f(x)$). Θεωρώντας τώρα τον περιορισμό της f στο $\mathcal{A}$, θα έχουμε $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B} = \mathcal{A} \setminus \{f(a)\}$. Τότε, οδηγούμαστε σε άτοπο διότι

$$|\mathcal{B}| = |\mathcal{A} \setminus \{f(a)\}| = |\mathcal{A}| - 1 < |\mathcal{A}|$$

και άρα, από την αρχή του περιστερεώνα, η f δεν είναι $1-1$.

Ασκήσεις

1. Να δειχθεί ότι αν υπάρχουν n φωλιές για $kn+1$ περιστέρια, τότε τουλάχιστον μια φωλιά θα έχει τουλάχιστον $k+1$ περιστέρια.

2. Πόσα άτομα χρειαζόμαστε για να είμαστε σίγουροι ότι τουλάχιστον 2 άτομα θα έχουν την ίδια μέρα γενέθλια;

   Το ίδιο πρόβλημα για 3 άτομα.

   Το ίδιο πρόβλημα για k άτομα.

3. Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} = \{1, 2, \ldots, 1002\}$ με $|\mathcal{A}| = 502$. Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του $\mathcal{A}$ που διαιρεί κάποιο άλλο στοιχείο του $\mathcal{A}$.

[1] Για κάθε σύνολο A, το σύνολο A^* συμβολίζει το σύνολο όλων των ακολουθιών (''λέξεων'') που μπορούν να σχηματισθούν με χρήση των στοιχείων του A.

6.2 Αρχή της διαγωνιοποίησης

Η **αρχή της διαγωνιοποίησης** εισήχθηκε από τον George Cantor στην προσπάθειά του να ταξινομήσει τους πληθάριθμους των άπειρων συνόλων.

Η πρώτη εφαρμογή της αρχής έγινε για την απόδειξη της πρότασης (i) της παραγράφου 1.4.3, από όπου και πήρε το όνομά της.

Η αρχή της διαγωνιοποίησης δίδεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση

Έστω R μια δυαδική σχέση σε ένα σύνολο $\mathcal{E}$ και $\Gamma(x) = \{y \in \mathcal{E} : xRy\}$. Για το σύνολο

$$\Delta = \{x \in \mathcal{E} : x \not R x\}$$

ισχύει ότι

$$\Delta \neq \Gamma(x), \ \text{για κάθε } x \in \mathcal{E}.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathcal{E}$.

Αν $x \in \Delta$ τότε $x \not R x$, άρα $x \notin \Gamma(x)$.

Αν $x \notin \Delta$ τότε xRx, άρα $x \in \Gamma(x)$.

Δηλαδή, το $\Delta \neq \Gamma(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{E}$.

Το σύνολο Δ ονομάζεται **διαγώνιο σύνολο** του $\mathcal{E}$.

Παραδείγματα

1. Αν $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ και

$$xRy \Leftrightarrow x = y^2$$

τότε το διαγώνιο σύνολο του $\mathcal{E}$ είναι ίσο με

$$\Delta = \{2, 3, 4, 5\}.$$

2. Για την σχέση R που ορίζεται στον επόμενο πίνακα για το σύνολο $\mathcal{E} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1			$\star$	
x_2		$\star$		$\star$
x_3			$\star$	
x_4	$\star$	$\star$	$\star$	

έχουμε $\Delta = \{x_1, x_4\}$, οπότε
$\Gamma(x_1) = \{x_3\} \neq \Delta$,
$\Gamma(x_2) = \{x_2, x_4\} \neq \Delta$,
$\Gamma(x_3) = \{x_3\} \neq \Delta$,
$\Gamma(x_4) = \{x_1,x_2,x_3\} \neq \Delta$,

επαληθεύοντας την πρόταση.

3. Για κάθε πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{X}$ ισχύει ότι

$$|\mathcal{X}| < |\mathcal{P}(\mathcal{X})|,$$

ενώ αν το σύνολο $\mathcal{X}$ είναι αριθμήσιμο, τότε το $\mathcal{P}(X)$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Αρκεί να δειχθεί ότι κάθε $1-1$ απεικόνιση $f : \mathcal{X} \to \mathcal{P}(\mathcal{X})$ δεν είναι επί, δηλαδή ότι υπάρχει στοιχείο Δ του $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ το οποίο δεν είναι εικόνα κανενός στοιχείου του $\mathcal{X}$.

Θα εφαρμόσουμε την αρχή της διαγωνιοποίησης για $\mathcal{E} = \mathcal{X}$ και R τη δυαδική σχέση στο $\mathcal{X}$ που ορίζεται ως εξής:

$$xRy \Leftrightarrow y \in f(x).$$

Τότε,

$$\Delta = \{x \in \mathcal{X} : x \not R x\} = \{x \in \mathcal{X} : x \notin f(x)\}.$$
$$\Gamma(x) = \{y \in \mathcal{X} : xRy\} = \{y \in \mathcal{X} : y \in f(x)\} = f(x).$$

Αλλά, από την αρχή της διαγωνιοποίησης $\Delta \neq \Gamma(x)$. Άρα, το Δ διαφέρει από κάθε σύνολο $f(x)$, για κάθε $x \in \mathcal{X}$. Δηλαδή το Δ δεν είναι εικόνα κανενός στοιχείου του $\mathcal{X}$ μέσω της f, οπότε η f δεν είναι επί.

Παρατήρηση. Προφανής συνέπεια του Παραδείγματος 3 είναι ότι το σύνολο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Άσκηση

Αν R είναι η δυαδική σχέση στο $\mathbb{N}^2$ με $(x,y)R(x',y') \Leftrightarrow x = y'-1$, να βρεθεί το διαγώνιο σύνολο Δ του συνόλου $\mathcal{E} = \{(1,2),(1,3),(2,1),(0,0),(5,4),$ $(6,2),(6,5),(9,10),(11,10)\}$.

6.3 Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού

Οι παρακάτω κανόνες μεταξύ συνόλων ισχύουν για **πεπερασμένα σύνολα**:

Κανόνας αθροίσματος

$$|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$$

όταν τα $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι ξένα.

Γενικότερα,

$$|\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i| = \sum_{i=1}^{n} |\mathcal{A}_i|$$

όταν τα A_i είναι ανά δύο ξένα.

Κανόνας γινομένου

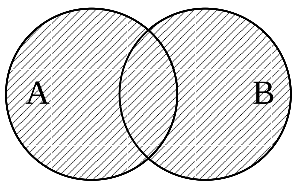
$$|\mathcal{A} \times \mathcal{B}| = |\mathcal{A}||\mathcal{B}|.$$

Γενικότερα,

$$|\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n| = |\mathcal{A}_1||\mathcal{A}_2| \cdots |\mathcal{A}_n|.$$

Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού

$$|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|. \tag{6.1}$$



Γενικότερα,

$$|\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n-1} S_n, \tag{6.2}$$

όπου
S_1 είναι το άθροισμα των $|\mathcal{A}_i|$, $\forall 1 \leq i \leq n$,
S_2 είναι το άθροισμα των $|\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j|$, όπου $1 \leq i < j \leq n$,
S_3 είναι το άθροισμα των $|\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_k|$, όπου $1 \leq i < j < k \leq n$,
$\ldots$
S_n είναι $|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_n|$.

Απόδειξη. (Με επαγωγή ως προς n.)

Για $n = 2$ είναι προφανές (τύπος (1)).

Υποθέτουμε ότι ισχύει γα το n, δηλαδή

$$|\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n| = \sum_{1 \le i \le n} |\mathcal{A}_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_n|,$$

και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για το $n+1$, δηλαδή

$$|\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n \cup A_{n+1}| = \sum_{1 \le i \le n+1} |\mathcal{A}_i| - \sum_{1 \le i < j \le n+1} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n+1} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n} |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_{n+1}|.$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο (1) για

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup A_n \text{ και } \mathcal{B} = \mathcal{A}_{n+1},$$

οπότε

$$|\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n \cup A_{n+1}| = |\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n| + |\mathcal{A}_{n+1}| - |(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n) \cap \mathcal{A}_{n+1}|.$$

Επιπλέον,

$$|(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n) \cap \mathcal{A}_{n+1}| = |(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_{n+1}) \cup (\mathcal{A}_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})|,$$

το οποίο από την υπόθεση της επαγωγής ισούται με

$$\sum_{1 \le i \le n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1 \le i < j \le n} |(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{n+1}) \cap (\mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_{n+1})| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{n+1}) \cap (\mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_{n+1}) \cap (\mathcal{A}_k \cap \mathcal{A}_{n+1})| - \cdots + (-1)^{n-1} |(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_{n+1}) \cap (\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_{n+1}) \cap \cdots \cap (\mathcal{A}_n \cap \mathcal{A}_{n+1})|$$

ή, ισοδύναμα, με

$$\sum_{1\le i\le n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1\le i<j\le n} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_{n+1}| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_k \cap \mathcal{A}_{n+1}| - - \cdots + (-1)^{n-1} |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_n \cap \mathcal{A}_{n+1}|.$$

Συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n \cup A_{n+1}| = \\ |\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n| + |\mathcal{A}_{n+1}| \\ - \Bigg(\sum_{1\le i\le n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1\le i<j\le n} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_{n+1}| + \\ \sum_{1\le i<j<k\le n} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_k \cap \mathcal{A}_{n+1}| \\ - \cdots + (-1)^{n-1} |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_n \cap \mathcal{A}_{n+1}| \Bigg) \end{aligned}$$

οπότε, από την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n \cup A_{n+1}| = \\ \sum_{1\le i\le n} |\mathcal{A}_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap A_k| - \cdots + \\ (-1)^{n-1} |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_n| + |\mathcal{A}_{n+1}| - \Bigg(\sum_{1\le i\le n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1\le i<j\le n} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_{n+1}| \\ + \sum_{1\le i<j<k\le n} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_k \cap \mathcal{A}_{n+1}| - \cdots + (-1)^{n-1} |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_n \cap \mathcal{A}_{n+1}| \Bigg) \\ = \sum_{1\le i\le n+1} |\mathcal{A}_i| - \sum_{1\le i<j\le n+1} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n+1} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap A_k| - \cdots + \\ (-1)^n |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_n \cap A_{n+1}|. \end{aligned}$$

$\square$

Παράδειγμα (για $n = 3$)

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3| = |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| + |\mathcal{A}_3| - |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| - |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3| - |\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| \\ + |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3|. \end{aligned}$$

Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού πολλές φορές δίνεται στην επόμενη ισοδύναμη μορφή:

Έστω $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$. Τότε ισχύει ότι

$$|\overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}| = |\mathcal{E}| - (|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|) + |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|. \tag{6.3}$$

Γενικότερα, για $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{E}$, ισχύει ότι

$$|\overline{\mathcal{A}_1} \cap \overline{\mathcal{A}_2} \cap \cdots \cap \overline{\mathcal{A}_n}| = |\mathcal{E}| - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^n S_n. \tag{6.4}$$

Απόδειξη. Αφού

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup (\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}) = \mathcal{E},$$

παίρνουμε (αφού τα $A \cup B$ και $\overline{A \cap B}$ είναι ξένα) ότι

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| + |\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}| = |\mathcal{E}| \Leftrightarrow \\
&|\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}| = |\mathcal{E}| - |\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| \Leftrightarrow \\
&|\overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}| = |\mathcal{E}| - (|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|),
\end{aligned}$$

και, γενικότερα,

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n}| &= |\mathcal{E}| - |\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n| \\
|\overline{\mathcal{A}_1} \cap \overline{\mathcal{A}_2} \cap \cdots \cap \overline{\mathcal{A}_n}| &= |\mathcal{E}| - (S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n-1} S_n) \\
&= |\mathcal{E}| - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n.
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα (για $n = 3$)

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{A}_1} \cap \overline{\mathcal{A}_2} \cap \overline{\mathcal{A}_3}| = |\mathcal{E}| &- |\mathcal{A}_1| - |\mathcal{A}_2| - |\mathcal{A}_3| + |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| + |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3| + |\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| \\
&- |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3|.
\end{aligned}$$

Εφαρμογές

- Όταν ζητείται ο πληθάριθμος ενός συνόλου, του οποίου τα στοιχεία *έχουν μια τουλάχιστον ιδιότητα* από n δοσμένες ιδιότητες, τότε εφαρμόζεται ο πρώτος τύπος:

$$|\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n-1} S_n.$$

- Όταν ζητείται ο πληθάριθμος ενός συνόλου, του οποίου τα στοιχεία *δεν έχουν καμιά ιδιότητα* από n δοσμένες ιδιότητες, τότε εφαρμόζεται ο δεύτερος τύπος:

$$|\overline{\mathcal{A}_1} \cap \overline{\mathcal{A}_2} \cap \cdots \cap \overline{\mathcal{A}_n}| = |\mathcal{E}| - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n.$$

Παραδείγματα

1. Έρευνα αγοράς για ένα προϊόν:

	Ερωτηθέντα άτομα: 2000	Άτομα που γνωρίζουν το προϊόν: 1150
Παντρεμένοι	1281	632
Γυναίκες	1028	410
Παντρεμένες γυναίκες	838	218

Πόσα από τα ερωτηθέντα άτομα έχουν **τουλάχιστον μια** από τις παρακάτω ιδιότητες:

Γνωρίζουν το προϊόν.
Είναι παντρεμένοι.
Είναι γυναίκες.

Θεωρούμε τα σύνολα
$\mathcal{A}_1$: άτομα που γνωρίζουν το προϊόν,
$\mathcal{A}_2$: άτομα που είναι παντρεμένοι, και
$\mathcal{A}_3$: άτομα που είναι γυναίκες.

Προφανώς,

$|\mathcal{A}_1| = 1150$, $|\mathcal{A}_2| = 1281$, $|\mathcal{A}_3| = 1028$.

$|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| = 632$, $|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3| = 410$,
$|\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| = 838$, $|\mathcal{A}_1 \cap A_2 \cap A_3| = 218$.

Άρα ο τύπος (1) της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού (για $n = 3$) δίνει:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3| &= \\
&= |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| + |\mathcal{A}_3| \\
&\quad - |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| - |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3| - |\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| \\
&\quad + |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| \\
&= 1150+1281+1028-632-410-838+218 \\
&= 1797.
\end{aligned}$$

Παρατήρηση. Επιπλέον, προκύπτει ότι ανύπαντροι άνδρες που δεν γνωρίζουν το προϊόν είναι 203. Πράγματι, από τον τύπο

$|\overline{\mathcal{A}_1} \cap \overline{\mathcal{A}_2} \cap \overline{\mathcal{A}_3}| =$
$|\mathcal{E}| - |\mathcal{A}_1| - |\mathcal{A}_2| - |\mathcal{A}_3| + |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| + |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3| + |\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| - |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3|$

προκύπτει ότι

$$|\overline{\mathcal{A}_1} \cap \overline{\mathcal{A}_2} \cap \overline{\mathcal{A}_3}| = 2000 - 1150 - 1281 - 1028 + 632 + 410 + 838 - 218 = 203$$

(το οποίο φυσικά ισούται με $|\mathcal{E}| - |\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3| = 2000 - 1797$).

2. Να βρεθεί το πλήθος των αριθμών του συνόλου [1000] που δεν είναι διαιρετοί ούτε με το 2, ούτε με το 3, ούτε με το 5.

   Έστω τα σύνολα

   $\mathcal{A}_1$: αριθμοί του [1000] που είναι διαιρετοί με το 2.

   $\mathcal{A}_2$: αριθμοί του [1000] που είναι διαιρετοί με το 3.

   $\mathcal{A}_3$: αριθμοί του [1000] που είναι διαιρετοί με το 5.

   Τότε,

   $|\mathcal{A}_1| = \left[\frac{1000}{2}\right] = 500.$

   $|\mathcal{A}_2| = \left[\frac{1000}{3}\right] = 333.$

   $|\mathcal{A}_3| = \left[\frac{1000}{5}\right] = 200.$

   $|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| = \left[\frac{1000}{6}\right] = 166.$

   $|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3| = \left[\frac{1000}{10}\right] = 100.$

   $|\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| = \left[\frac{1000}{15}\right] = 66.$

   $|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| = \left[\frac{1000}{30}\right] = 33.$

   Άρα ο τύπος (2) της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού (για $n = 3$) δίνει:

$$\begin{aligned}
&|\overline{\mathcal{A}_1} \cap \overline{\mathcal{A}_2} \cap \overline{\mathcal{A}_3}| \\
&= |\mathcal{E}| - (|\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| + |\mathcal{A}_3|) \\
&\qquad + (|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| + |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3| + |\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3|) \\
&\qquad - |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| \\
&= 1000 - (500 + 333 + 200) + (166 + 100 + 66) - 33 \\
&= 266.
\end{aligned}$$

Ασκήσεις

1. Σε μια έρευνα του Υπουργείου Τουρισμού ρωτήθηκαν 5000 άτομα αν έχουν επισκεφθεί την Κρήτη. Ο παρακάτω πίνακας δίνει κάποια στοιχεία της έρευνας αυτής:

	Ερωτηθέντα άτομα: 5000	Άτομα που είχαν επισκεφθεί την Κρήτη: 3620
Άνδρες	2597	2007
Άτομα άνω των 40 ετών	2957	2089
Άνδρες άνω των 40 ετών	1476	1088

Με χρήση της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού να βρεθεί πόσες γυναίκες κάτω των 40 ετών δεν έχουν επισκεφθεί την Κρήτη.

2. Σε μια έρευνα σχετικά με τις εκπομπές της τηλεόρασης, 200 άτομα ρωτήθηκαν τις παρακάτω ερωτήσεις. Δίπλα σε κάθε μια, αναγράφεται ο άριθμος αυτών που απάντησαν θετικά:

   - Παρακολουθείτε τις αθλητικές εκπομπές; Απ. 50.
   - Παρακολουθείτε τις ειδήσεις; Απ. 90.
   - Παρακολουθείτε τα τηλεπαιχνίδια; Απ. 85.
   - Παρακολουθείτε και τις αθλητικές εκπομπές και τις ειδήσεις; Απ. 35.
   - Παρακολουθείτε και τις αθλητικές εκπομπές και τα τηλεπαιχνίδια; Απ. 25.
   - Παρακολουθείτε και τις ειδήσεις και τα τηλεπαιχνίδια; Απ. 45.
   - Παρακολουθείτε και τις αθλητικές εκπομπές και τις ειδήσεις και τα τηλεπαιχνίδια; Απ. 20.

   Να βρεθεί πόσοι απο τους ερωτηθέντες:

   1) Δεν παρακολουθούν ούτε αθλητικές εκπομπές, ούτε ειδήσεις, ούτε τηλεπαιχνίδια.
   2) Παρακολουθούν αθλητικές εκπομπές και ειδήσεις αλλά όχι τηλεπαιχνίδια.
   3) Παρακολουθούν μόνο αθλητικές εκπομπές.