ΠΜΣ ''ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ''

(ΠΛΗ2, 6^{ος} **κύκλος**, 1^{ο} **εξάμηνο**, **2023**)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κ. ΜΑΝΕΣ - Ι. ΤΑΣΟΥΛΑΣ

Σημειώσεις διαλέξεων 7–8

Κεφάλαιο 5

Γραφήματα

5.1 Γραφήματα δεσμών

5.1.1 Βασικοί ορισμοί

Κάθε δυάδα $G = (V(G), E(G))$, ή (V, E), ή (X, E) όπου V είναι ένα μη κενό σύνολο και E είναι ένα σύνολο από (μη διατεταγμένα) ζεύγη $\{u, v\}$, $u, v \in V$ ονομάζεται **γράφημα δεσμών** (graph), ή **απροσανατόλιστο γράφημα** (undirected graph).

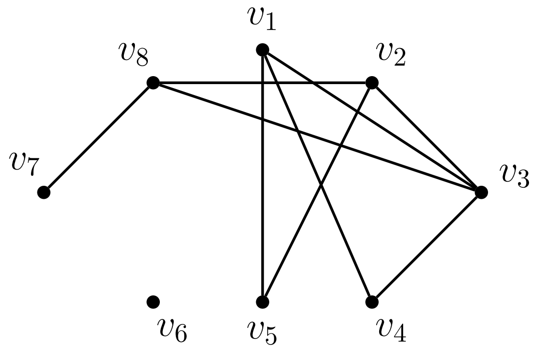
Τα στοιχεία του V καλούνται **κορυφές**, ή **σημεία**, ή **κόμβοι** (vertices, nodes, points), ενώ τα στοιχεία του E καλούνται **δεσμοί**, ή **γραμμές**, ή **χορδές**, ή **πλευρές**, ή **ακμές** (edges, lines).

Θα ασχοληθούμε εδώ με **πεπερασμένα γραφήματα**, (δηλαδή $|V| \in \mathbb{N}^*$). Το E μπορεί να είναι $\emptyset$. Συχνά γράφουμε $|V| = n$και $|E| = m$. Ο πληθάριθμος $|V|$ ονομάζεται **τάξη** (order) του γραφήματος, ενώ ο πληθάριθμος $|E|$ ονομάζεται **μέγεθος** (size) του γραφήματος.

Αν $\{u, v\} \in E$, λέμε ότι τα u, v είναι **άκρα** του δεσμού $\{u, v\}$ και ότι τα u, v είναι **γειτονικά**.

Παράδειγμα: Η δυάδα $G = (V, E)$ όπου $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ και $E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_8\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_8\}, \{v_7, v_8\}\}$ είναι ένα γράφημα δεσμών.

Η γραφική του απεικόνιση είναι η ακόλουθη:



Αν οι u, v ταυτίζονται έχουμε ένα **βρόχο**.

Παρατήρηση: Δεδομένου ότι σε ένα σύνολο επιτρέπεται μία μόνο εμφάνιση κάθε στοιχείου του, από τον ορισμό του γραφήματος δεσμών προκύπτει ότι σε αυτό δεν επιτρέπονται ούτε βρόχοι, ούτε πολλαπλοί δεσμοί που να συνδέουν το ίδιο ζεύγος κορυφών. Τα γραφήματα αυτά ονομάζονται **απλά γραφήματα** (simple graphs) και με τέτοια θα ασχοληθούμε, εκτός αν αναφερθεί ρητά το αντίθετο.

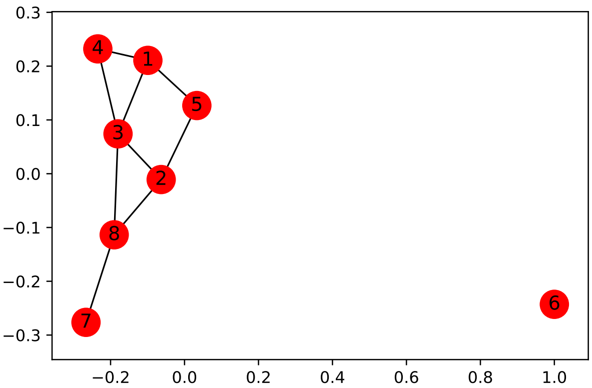
Στο επόμενο πρόγραμμα χρησιμοποιούμε την βιβλιοθήκη networkx της Python για να ορίσουμε το γράφημα G του πρώτου παραδείγματος.

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G = nx.Graph() #Create an empty graph

V = [1,2,3,4,5,6,7,8] #V is the set of vertices of G
E = [[1,3],[1,4],[1,5],[2,3],[2,5],[2,8],[3,4],[3,8],[7,8]] #E is
    the set of edges of G

G.add_nodes_from(V)
G.add_edges_from(E)

print("G has order |V(G)|=",G.order(),"and size |E(G)|=",G.size())
print("V(G):",G.nodes()) #Print the nodes of G
print("E(G):", G.edges()) #Print the edges of G
for v in G:
    print("The neighbors of", v, "are:", list(G.neighbors(v)))

nx.draw_networkx(G) #Draw the graph G
plt.savefig("lect01a.eps") #Save the drawing of G
plt.show() #Show the drawing of G on screen
```

Output:

```
G has order |V(G)|= 8 and size |E(G)|= 9
V(G): [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]
```

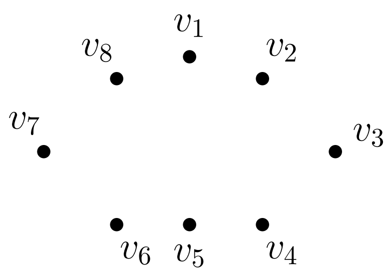
```
E(G): [(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (2, 8), (3, 4), (3,
    8), (7, 8)]
The neighbors of 1 are: [3, 4, 5]
The neighbors of 2 are: [3, 5, 8]
The neighbors of 3 are: [1, 2, 4, 8]
The neighbors of 4 are: [1, 3]
The neighbors of 5 are: [1, 2]
The neighbors of 6 are: []
The neighbors of 7 are: [8]
The neighbors of 8 are: [2, 3, 7]
```



Παρατήρηση: Εκτός από τα γραφήματα δεσμών, πολύ συνηθισμένα είναι και τα **γραφήματα τόξων** (ή **προσανατολισμένα γραφήματα**). Αυτά ορίζονται όπως τα γραφήματα δεσμών με μόνη διαφορά ότι τα στοιχεία του E είναι διατεταγμένα ζεύγη (x, y). Εμείς, σ᾽ αυτή την εισαγωγική παρουσίαση, θα ασχοληθούμε μόνο με γραφήματα δεσμών.

5.1.2 Μορφές γραφημάτων

1) **Μηδενικό γράφημα**: $G = (V, E)$ με $E = \emptyset$.
   Παράδειγμα:

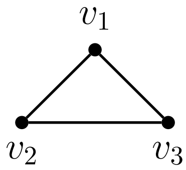


2) **Τετριμμένο γράφημα**: $G = (V, E)$ με $|V| = 1$.

3) **Πλήρες γράφημα**: $G = (V, E)$ τέτοιο ώστε για κάθε $u, v \in V$ με $u \neq v$ ισχύει ότι $\{u, v\} \in E$. Το πλήρες γράφημα με n κορυφές συμβολίζεται με K_n.

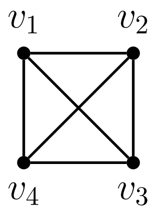
Παράδειγμα: Το γράφημα K_3 είναι το:

K_3



ενώ το γράφημα K_4 είναι το :

K_4



Παρατήρηση: Το K_n έχει n κορυφές και $\binom{n}{2}$ δεσμούς (όσα και τα ζευγάρια του $[n]$).

Στην βιβλιοθήκη networkx το πλήρες γράφημα με n κορυφές κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας την μέθοδο `complete_graph(n)`, ή χρησιμοποιώντας τις επόμενες εντολές:

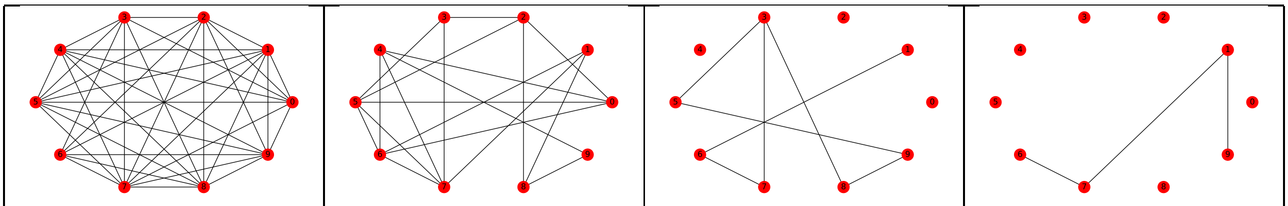
```python
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

n = 7 #number of vertices

Kn = nx.complete_graph(n)
nx.draw_circular(Kn, with_labels=True)
plt.show()

Kn = nx.Graph()
Kn.add_nodes_from(range(1,n+1))
for i in range(1,n+1):
    for j in range(i+1,n+1):
        Kn.add_edge(i,j)
nx.draw_circular(Kn, with_labels=True)
plt.show()
```

4) **Τυχαίο γράφημα**: Κάποιες φορές καλούμαστε να δοκιμάσουμε αλγορίθμους ή ιδέες μας πάνω σε διάφορα παραδείγματα γραφημάτων. Μπορούμε να φτιάχνουμε τέτοια “τυχαία” παραδείγματα χρησιμοποιώντας έτοιμες μεθόδους της βιβλιοθήκης networkx ή γράφοντας δικές μας μεθόδους, όπως στα επόμενα παραδείγματα.

Η πιο απλή ιδέα κατασκευής ενός τυχαίου γραφήματος με n κορυφές είναι το **μοντέλο των Erdős - Renyi** όπου για κάθε ζεύγος κορυφών επιλέγουμε να δημιουργήσουμε τον δεσμό που τις συνδέει με πιθανότητα p.

Ένα τέτοιο γράφημα προκύπτει χρησιμοποιώντας την μέθοδο `gnp_random_graph(n,p)`:

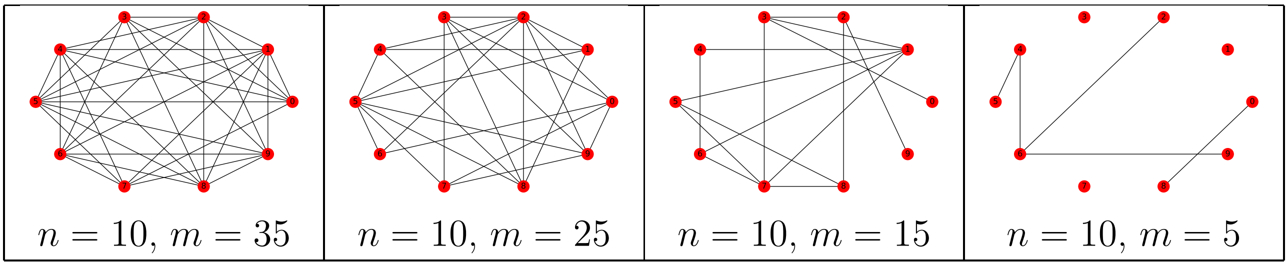
```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

def random_gnp_graph(n,p,name):
    R = nx.gnp_random_graph(n,p)
    nx.draw_circular(R,with_labels=True)
    plt.savefig(name+".eps")
    plt.show()

random_gnp_graph(10,0.8,"R1")
random_gnp_graph(10,0.5,"R2")
random_gnp_graph(10,0.2,"R3")
random_gnp_graph(10,0.1,"R4")
```



$n = 10,\ p = 0.8$	$n = 10,\ p = 0.5$	$n = 10,\ p = 0.2$	$n = 10,\ p = 0.1$

Στην περίπτωση όπου θέλουμε το τυχαίο γράφημα να έχει n κορυφές και ακριβώς m δεσμούς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο `gnm_random_graph(n,m)`:

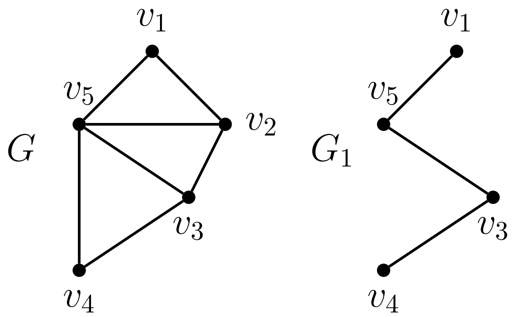
```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

def random_gnm_graph(n,m,name):
    R = nx.gnm_random_graph(n,m) #0 <= m <= n(n-1)/2
    nx.draw_circular(R,with_labels=True)
    plt.savefig(name+".eps")
    plt.show()

random_gnm_graph(10,35,"R5")
random_gnm_graph(10,25,"R6")
random_gnm_graph(10,15,"R7")
random_gnm_graph(10,5,"R8")
```



5.1.3 Υπογραφήματα

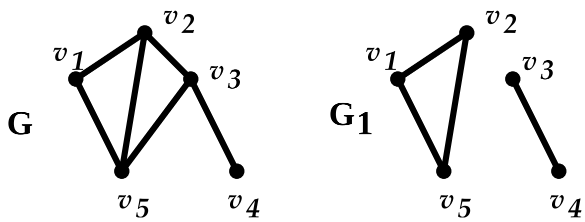
1) **Υπογράφημα** (subgraph) του $G = (V, E)$: Ένα γράφημα $G_1 = (V_1, E_1)$ με $V_1 \subseteq V$ και $E_1 \subseteq E$.

Παράδειγμα:



2) **Γενετικό** (ή **γεννητικό**, ή **μερικό**) **γράφημα**, ή **γράφημα ζεύξης** (spanning graph) του $G = (V, E)$: Ένα γράφημα $G_1 = (V, E_1)$ με $E_1 \subseteq E$.

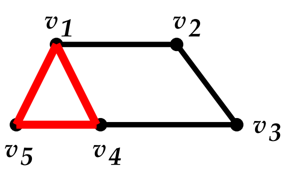
Παράδειγμα:

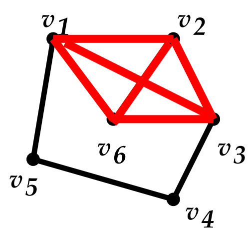


3) **Κλίκα** (clique): Κάθε πλήρες υπογράφημα του G.

Μέγιστη κλίκα: Κλίκα με το μέγιστο δυνατό αριθμό κόμβων.

Παραδείγματα:





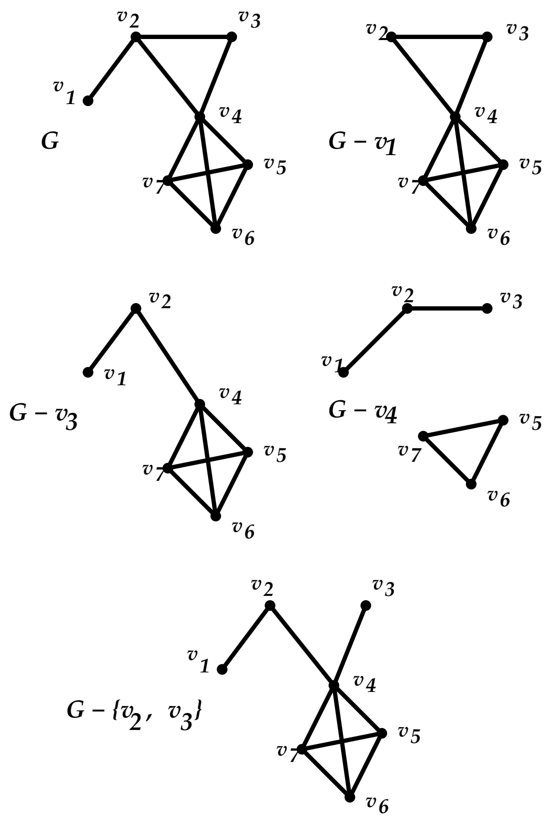
Οι μέγιστες κλίκες των δύο παραπάνω γραφημάτων είναι οι K_3 και K_4 αντίστοιχα.

4) Αν $G = (V, E)$ και $v \in V$, $e \in E$ ορίζουμε τα υπογραφήματα $\mathbf{G} - \mathbf{v}$, $\mathbf{G} - \mathbf{e}$ ως εξής:

$V(G - v) = V \setminus \{v\}$, $E(G - v) = E \setminus \{e_i \in E : v \in e_i\}$, ενώ

$V(G - e) = V$, $E(G - e) = E \setminus \{e\}$.

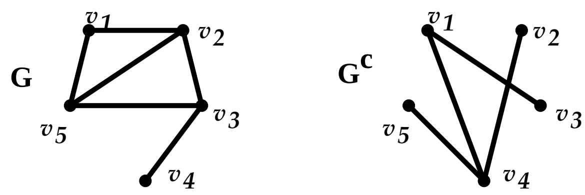
Παραδείγματα:



5.1.4 Συμπλήρωμα

Συμπλήρωμα (complement) G^c (ή $\overline{G}$) του $G = (V, E)$ με $|V| = n$ είναι ένα γράφημα $G^c = (V, E^c)$, με $E^c = E(K_n) \setminus E(G)$.

Παράδειγμα:

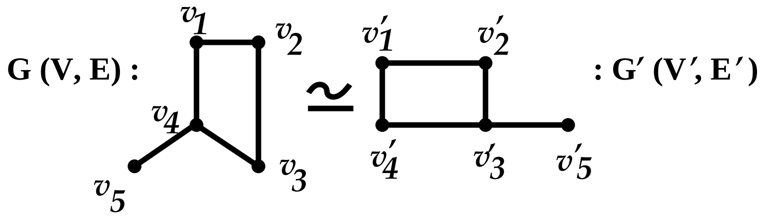


5.1.5 Ισόμορφα γραφήματα

Τα γραφήματα δεσμών $G = (V, E)$ και $G' = (V', E')$ ονομάζονται **ισόμορφα** αν και μόνο αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : V \to V'$, με $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'$. Αν δύο γραφήματα G και G' είναι ισόμορφα, θα γράφουμε $G \simeq G'$.

Παραδείγματα :

Τα επόμενα γραφήματα είναι ισόμορφα:



διότι για την $f : V \to V'$ με

$$f(v_1) = v_4', \quad f(v_2) = v_1', \quad f(v_3) = v_2', \quad f(v_4) = v_3', \quad f(v_5) = v_5'.$$

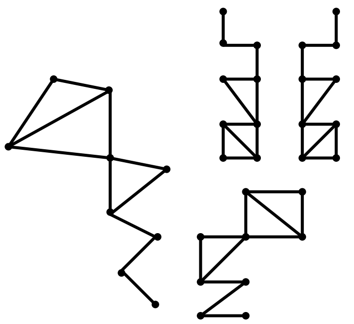
έχουμε πράγματι ότι

$$\{v_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow \{f(v_i), f(v_j)\} \in E'$$

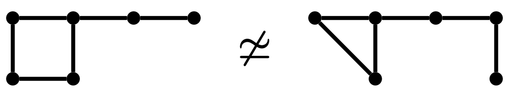
(για παράδειγμα :

$$\{v_1, v_2\} \in E \text{ και } \{v_4', v_1'\} \in E',$$
$$\{v_2, v_4\} \notin E \text{ και } \{v_1', v_3'\} \notin E',$$
$$\{v_4, v_5\} \in E \text{ και } \{v_3', v_5'\} \in E', \quad \text{κ.ο.κ.}).$$

Τα επόμενα γραφήματα είναι όλα ισόμορφα μεταξύ τους:



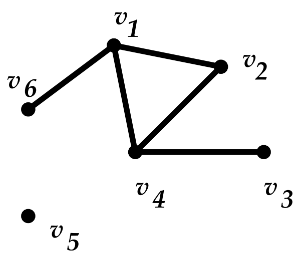
Αντίθετα τα επόμενα δύο γραφήματα δεν είναι ισόμορφα:



5.1.6 Βαθμός

Βαθμός μιας κορυφής v στο G, λέγεται το πλήθος των δεσμών του G των οποίων η v είναι άκρο, και συμβολίζεται με $d_G(v)$, ή $d(v)$, ή $\deg(v)$.

Παράδειγμα :



Στο παραπάνω γράφημα, οι κορυφές του έχουν τους ακόλουθους βαθμούς:

$$\begin{aligned}
&d(v_1) = d(v_4) = 3\\
&d(v_2) = 2\\
&d(v_3) = d(v_6) = 1\\
&d(v_5) = 0.
\end{aligned}$$

Κάθε κορυφή βαθμού μηδέν λέγεται **μεμονωμένη** κορυφή.

Ένα γράφημα G λέγεται **d-κανονικό** αν $d_G(v) = d$, για κάθε $v \in V$.

Ερώτηση 1: Σε ένα γράφημα με n κορυφές, ποιοί είναι οι πιθανοί βαθμοί των κορυφών του;

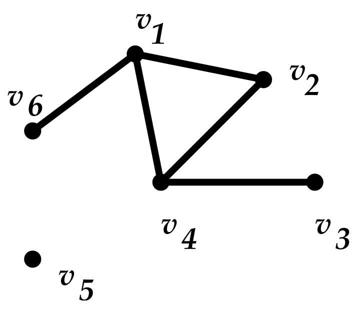
Ερώτηση 2: Αν σε ένα γράφημα με n κορυφές υπάρχει κορυφή βαθμού 0, ποιοί είναι οι πιθανοί βαθμοί των κορυφών του;

Έστω $G = (V, E)$ με $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Ακολουθία βαθμών του G λέγεται η πεπερασμένη ακολουθία

$$(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)).$$

Παράδειγμα :



Η ακολουθία βαθμών του παραπάνω γραφήματος είναι (3,3,2,1,1,0).

Παρατήρηση : Συνήθως γράφουμε την ακολουθία βαθμών ενός γραφήματος σε φθίνουσα τάξη.

```python
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G = nx.Graph() #Create an empty graph

V = [1,2,3,4,5,6] #V is the set of vertices of G
E = [[1,2],[1,4],[1,6],[2,4],[3,4]] #E is the set of edges of G

G.add_nodes_from(V)
G.add_edges_from(E)

DegreeSeq = []
for v in G.nodes:
    DegreeSeq.append(G.degree(v))
    print("Vertex",v,"has degree",G.degree(v))
DegreeSeq.sort(reverse=True)
print("Degree sequence of G:", DegreeSeq)
```

Output:

```
Vertex 1 has degree 3
Vertex 2 has degree 2
Vertex 3 has degree 1
Vertex 4 has degree 3
Vertex 5 has degree 0
Vertex 6 has degree 1
Degree sequence of G: [3, 3, 2, 1, 1, 0]
```

Ερώτηση: Υπάρχει γράφημα δεσμών με ακολουθία βαθμών:
α) (0, 0, 0, 0, 0, 0);
β) (1, 1, 1, 1, 1, 1)
γ) (2, 2, 2, 2, 2);
δ) (6, 2, 2, 2, 2);

5.1.7 Βασικά αποτελέσματα

Πρόταση 3. *Σε κάθε απλό γράφημα δεσμών $G = (V, E)$, ισχύει η σχέση*

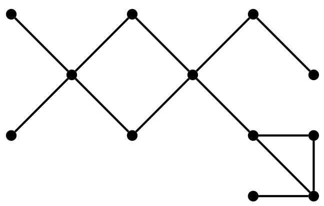
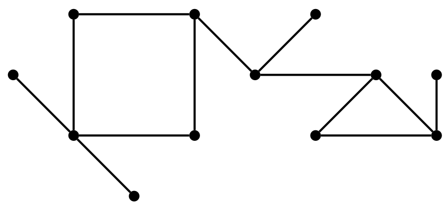
$$\sum_{i=1}^{|V|} d(v_i) = 2|E|.$$

Πόρισμα 4. *Σε κάθε απλό γράφημα δεσμών, ο αριθμός κορυφών με περιττό βαθμό είναι άρτιος.*

Πρόταση 5. *Αν δύο γραφήματα δεσμών G, H είναι ισόμορφα, τότε:*
i) Έχουν την ίδια ακολουθία βαθμών, και μάλιστα ισχύει ότι $d_G(v) = d_H(f(v))$, $\forall v \in V(G)$.
ii) Έχουν ισόμορφα υπογραφήματα.

Εφαρμογές

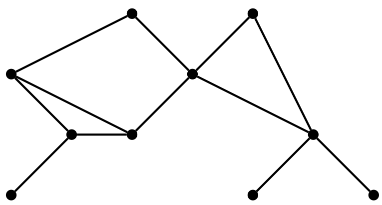
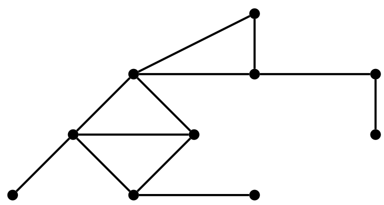
1.

G_1  G_2 

$(4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$ $(4, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$

$G_1 \not\simeq G_2$, διότι έχουν διαφορετικές ακολουθίες βαθμών.

2.

G_3  G_4 

$(4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1)$ $(4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1)$

$G_3 \not\simeq G_4$, διότι, ενώ έχουν την ίδια ακολουθία βαθμών, έχουν διαφορετικά υπογραφήματα, (για παράδειγμα, το G_3 περιέχει δύο K_3, ενώ το G_4 περιέχει τρία K_3).

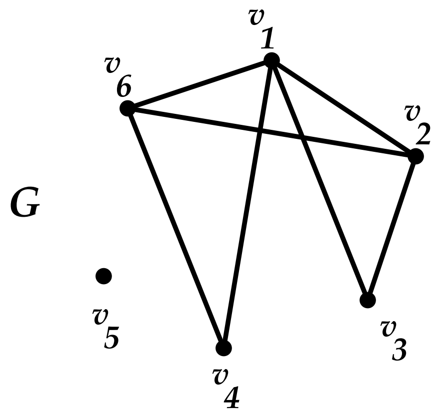
5.1.8 Μήτρα γραφήματος δεσμών

Έστω $G = (V, E)$. Ορίζουμε την $|V| \times |V|$ μήτρα (πίνακα) M_G ή M του G ως εξής:

$$M = [m_{ij}], \text{ με } m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{αν } \{v_i, v_j\} \notin E. \end{cases}$$

Η μήτρα αυτή ονομάζεται **μήτρα (γειτονικότητας) του γραφήματος δεσμών**.

Παράδειγμα : Στο γράφημα G



αντιστοιχεί η μήτρα

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσεις :

1. Η μήτρα M είναι προφανώς συμμετρική (δηλαδή, $m_{ij} = m_{ji}$).
2. Ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^{|V|} m_{ij} = \sum_{j=1}^{|V|} m_{ji} = d(v_i)$$

(δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων της i γραμμής ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της i στήλης, και με τον βαθμό της κορυφής v_i).

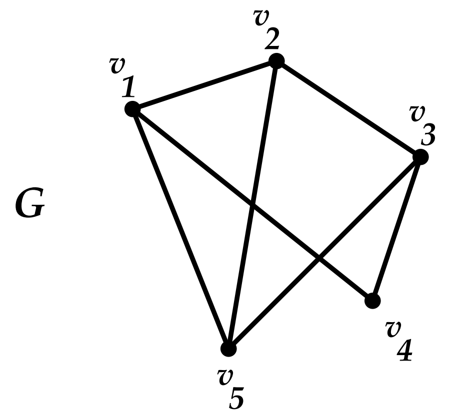
5.1.9 Απεικόνιση γραφήματος δεσμών

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Gamma : V \to \mathcal{P}(V) \quad \text{με} \quad \Gamma(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E\}.$$

Παρατήρηση : Το ζεύγος (V, Γ) ορίζει το γράφημα G ισοδύναμα με το (V, E) και γι' αυτό μπορούμε να αναφερόμαστε και στο γράφημα (V, Γ) αντί (V, E). Η Γ ονομάζεται **απεικόνιση του γραφήματος δεσμών**.

Παράδειγμα : Στο γράφημα G



αντιστοιχεί η απεικόνιση Γ, με

$$\begin{aligned}
\Gamma(v_1) &= \{v_2, v_4, v_5\}, \\
\Gamma(v_2) &= \{v_1, v_3, v_5\}, \\
\Gamma(v_3) &= \{v_2, v_4, v_5\}, \\
\Gamma(v_4) &= \{v_1, v_3\}, \\
\Gamma(v_5) &= \{v_1, v_2, v_3\}.
\end{aligned}$$

Ανακεφαλαίωση: Τρόποι περιγραφής ενός γραφήματος:

α) Σύμφωνα με τον ορισμό.

β) Γραφικός τρόπος.

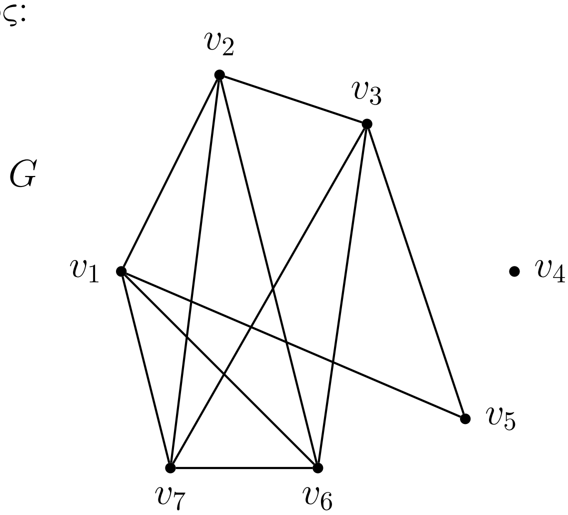
γ) Μήτρα.

δ) Απεικόνιση.

Παράδειγμα

α) Ορισμός: $G = (V, E)$ με $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ και $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}, \{v_1, v_7\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_6\}, \{v_2, v_7\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_3, v_7\}, \{v_6, v_7\}\}$.

β) Γραφικός τρόπος:



γ) Μήτρα:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

δ) Απεικόνιση:

$$\begin{aligned} &\Gamma : V \to \mathcal{P}(V), \text{ με} \\ &\Gamma(v_1) = \{v_2, v_5, v_6, v_7\}, \\ &\Gamma(v_2) = \{v_1, v_3, v_6, v_7\}, \\ &\Gamma(v_3) = \{v_2, v_5, v_6, v_7\}, \\ &\Gamma(v_4) = \emptyset, \\ &\Gamma(v_5) = \{v_1, v_3\}, \\ &\Gamma(v_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_7\}, \\ &\Gamma(v_7) = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}. \end{aligned}$$

5.1.10 Συνεκτικότητα

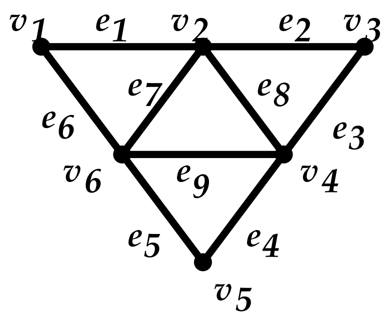
Διαδρομή που ενώνει τις κορυφές v_i, v_j ενός γράφηματος G (ή $v_i - v_j$ **διαδρομή**) λέγεται κάθε ακολουθία της μορφής $(v_i, e_{ik}, v_k, e_{kl}, v_l, \ldots, v_r, e_{rj}, v_j)$, όπου e_{st} είναι ο δεσμός του γραφήματος που ενώνει τις κορυφές v_s και v_t. (Συνήθως περιγράφουμε μια διαδρομή μόνο με τις διαδοχικές κορυφές της: $(v_i, v_k, v_l, \ldots, v_r, v_j)$). **Μήκος** μιας διαδρομής ονομάζεται το πλήθος των δεσμών της.

Αν σε μια $v_i - v_j$ διαδρομή του G κάθε δεσμός εμφανίζεται μια μόνο φορά, η διαδρομή λέγεται $v_i - v_j$ **δρόμος** του G. Αν επιπλέον, σε ένα $v_i - v_j$ δρόμο του G κάθε κορυφή εμφανίζεται μια μόνο φορά, ο δρόμος λέγεται $v_i - v_j$ **μονοπάτι** του G.

Μια $v_i - v_j$ διαδρομή ή ένας $v_i - v_j$ δρόμος του G, με $v_i = v_j$ λέγεται **κλειστή διαδρομή** του G ή **κλειστός δρόμος** του G. Τέλος, ένας κλειστός δρόμος του G μήκους n, με n διακεκριμένες κορυφές, λέγεται **κύκλος** του G.

Παράδειγμα :

Για το γράφημα G έχουμε :



$v_1 - v_5$ διαδρομή του G : $(v_1, e_1, v_2, e_7, v_6, e_9, v_4, e_8, v_2, e_7, v_6, e_5, v_5)$, ή συντομότερα $(v_1, v_2, v_6, v_4, v_2, v_6, v_5)$.

$v_1 - v_5$ δρόμος του G : $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_6, v_5)$.

$v_1 - v_5$ μονοπάτι του G : $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_5)$.

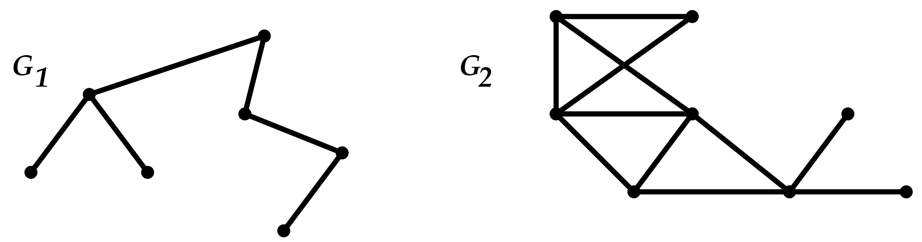
Κλειστή διαδρομή του G : $(v_1, v_2, v_6, v_4, v_3, v_2, v_6, v_1)$.

Κλειστός δρόμος του G : $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_6, v_1)$.

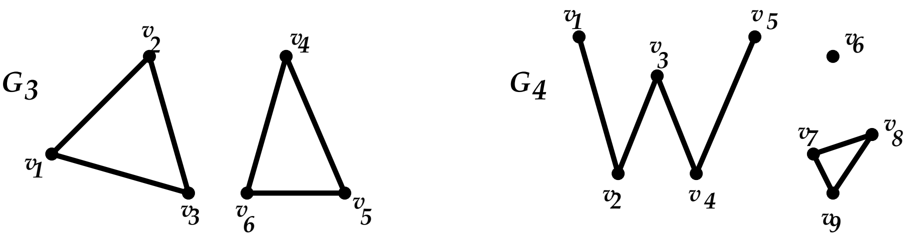
Κύκλος του G : $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_1)$.

Ένα γράφημα λέγεται **συνεκτικό** αν για οποιουσδήποτε δύο κορυφές του, υπάρχει μονοπάτι που τις ενώνει.

Παραδείγματα :



Συνεκτικά γραφήματα



Μη συνεκτικά γραφήματα

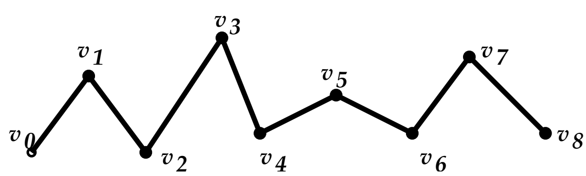
Συνιστώσα ενός γραφήματος G ονομάζεται κάθε μεγιστικό (maximal) συνεκτικό υπογράφημά του (δηλαδή κάθε συνεκτικό υπογράφημά του που δεν είναι υπογράφημα κάποιου άλλου συνεκτικού υπογραφήματος του G).

Προφανώς τα συνεκτικά γραφήματα αποτελούνται από μια μόνο συνιστώσα: τον εαυτό τους.

Παραδείγματα: Στο προηγούμενο σχήμα οι συνιστώσες του G_3 είναι τα δύο τρίγωνα $G_{3,1}$, $G_{3,2}$ με $V(G_{3,1}) = \{v_1, v_2, v_3\}$ και $V(G_{3,2}) = \{v_4, v_5, v_6\}$ αντίστοιχα, ενώ το G_4 έχει προφανώς τρεις συνιστώσες.

Το συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ με $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ λέγεται $v_0 - v_n$ **μονοπάτι** (ή απλά **μονοπάτι**) μήκους n, αν $d(v_0) = d(v_n) = 1$ και $d(v_i) = 2$, $\forall i \neq 0, n$.

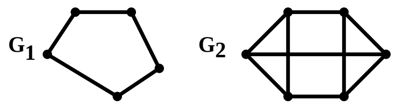
Παράδειγμα :



Μονοπάτι μήκους 8

Ένα συνεκτικό 2-κανονικό γράφημα λέγεται **κύκλος**[1], ενώ ένα 3-κανονικό γράφημα λέγεται **κυβικό γράφημα**.

Παραδείγματα :



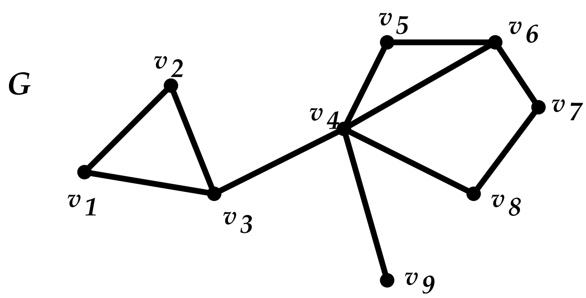
Τα γραφήματα G_1, G_2 είναι ο κύκλος C_5 και ένα κυβικό γράφημα αντίστοιχα.

Παρατήρηση : Παρατηρήστε τη διαφορά ανάμεσα στους ορισμούς «μονοπάτι γραφήματος» και «κύκλος γραφήματος» που δόθηκαν νωρίτερα και στους ορισμούς των γραφημάτων «μονοπάτι» και «κύκλος» που δίνονται εδώ.

Απόσταση $d(u,v)$ μεταξύ δύο κορυφών u, v μιας συνιστώσας του G ονομάζεται το ελάχιστο μήκος μεταξύ όλων των διαδρομών που τις συνδέουν.

Παράδειγμα:

Για το γράφημα



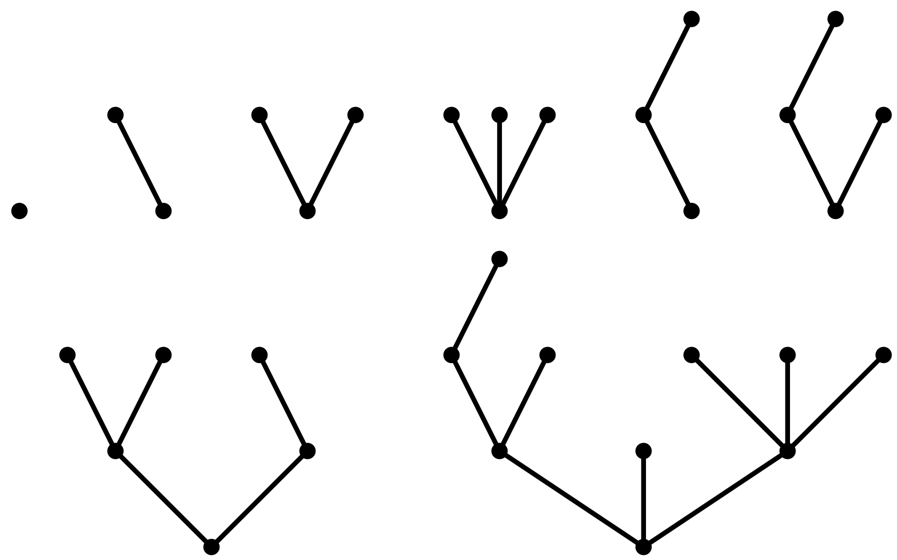
έχουμε ότι $d(v_3, v_6) = 2$, $d(v_1, v_7) = 4$.

[1] Ο κύκλος μήκους n συμβολίζεται με C_n.

5.2 Δένδρα

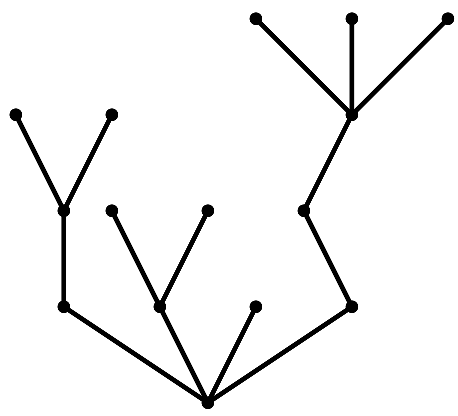
5.2.1 Βασικοί ορισμοί - Βασικά αποτελέσματα

Ένα συνεκτικό γράφημα δεσμών χωρίς κύκλους λέγεται **δένδρο**.
Παραδείγματα :

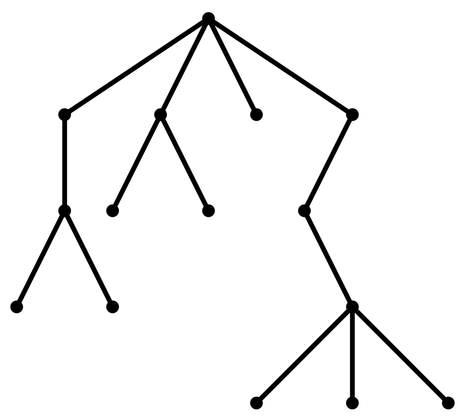


Οι κορυφές ενός δένδρου με βαθμό 1 λέγονται **φύλλα** του δένδρου.
Ένα γράφημα δεσμών χωρίς κύκλους λέγεται **δάσος**.

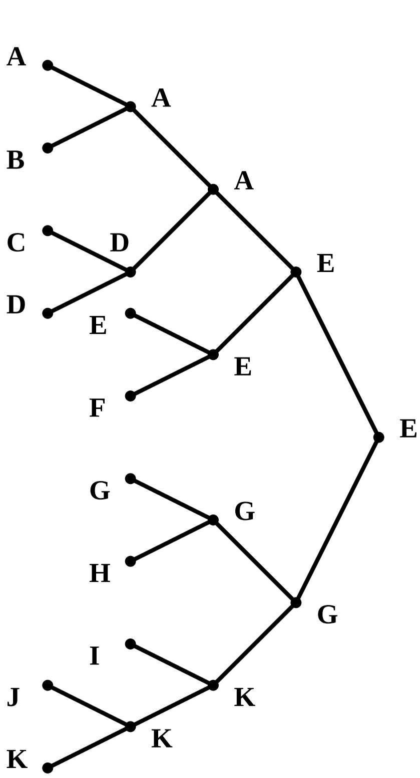
Αναπαράσταση δένδρων



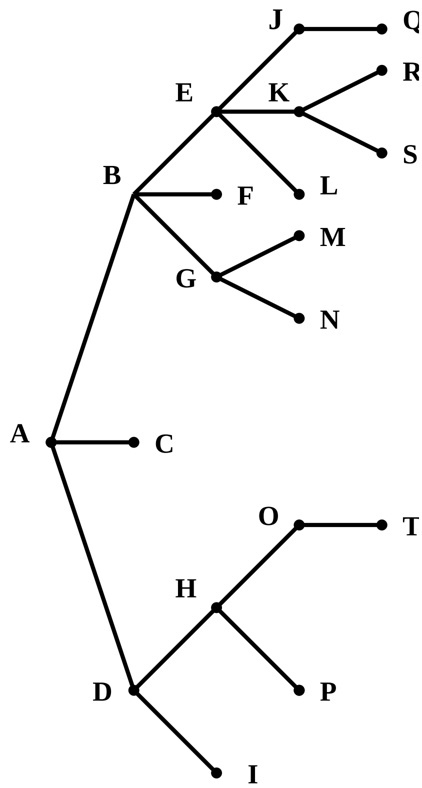
“Φυσικός” τρόπος



Στην πληροφορική



Τουρνουά

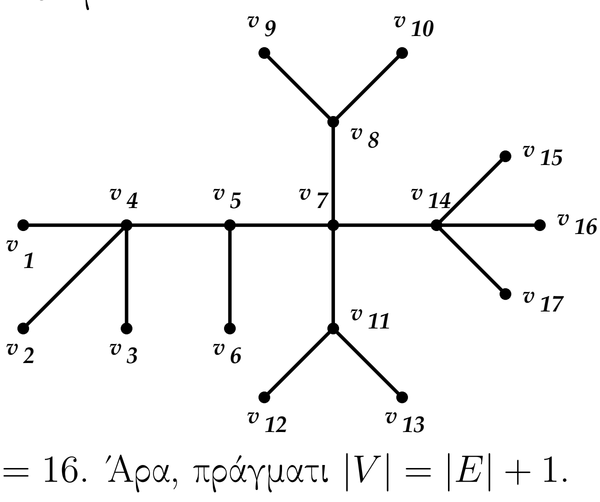


Γενεαλογικά δένδρα

Πρόταση 6. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*
1) Το G είναι δένδρο.
2) Κάθε δύο κορυφές του G ενώνονται με ένα μοναδικό μονοπάτι.
3) Το G είναι συνεκτικό, με $|V| = |E| + 1$.
4) Το G δεν έχει κύκλους και $|V| = |E| + 1$.

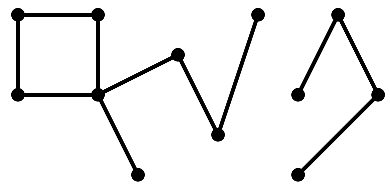
Παραδείγματα

α) Το παρακάτω δένδρο



έχει $|V| = 17$, $|E| = 16$. Άρα, πράγματι $|V| = |E| + 1$.

β) Το παρακάτω γράφημα



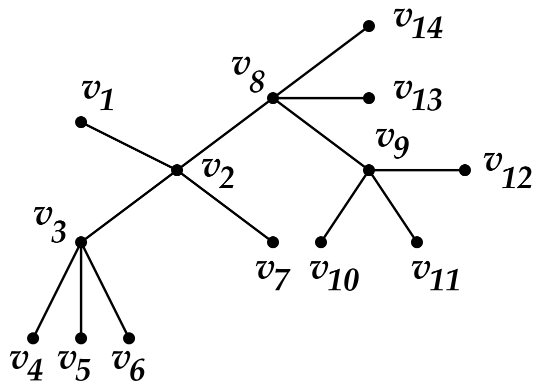
αν και έχει $|V| = 12$, $|E| = 11$ και άρα $|V| = |E| + 1$, προφανώς δεν είναι δένδρο, διότι δεν είναι συνεκτικό (και έχει και κύκλους).

Ερώτηση: Ένας δάσος αποτελείται από 20 κορυφές και 15 δεσμούς. Πόσα δένδρα περιέχει;

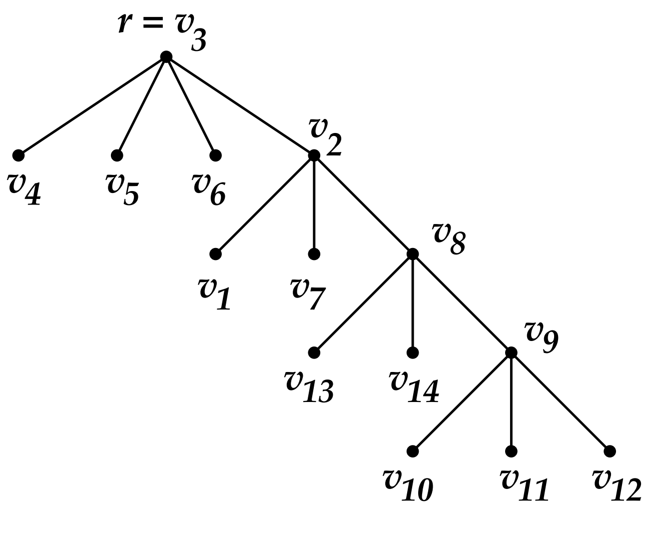
5.2.2 Δένδρα με ρίζα

Δένδρο με ρίζα είναι ένα δένδρο με έναν ειδικά επιλεγμένη κορυφή (τη **ρίζα** του δένδρου).

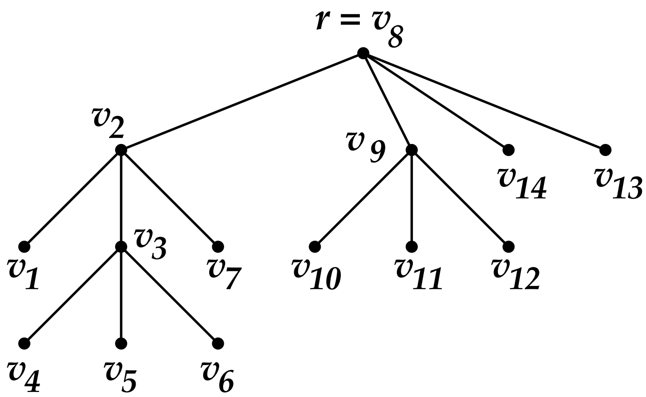
Παράδειγμα



Το δένδρο T.



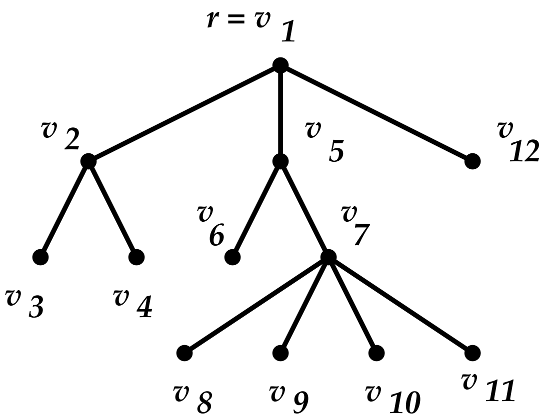
Το δένδρο T με ρίζα $r = v_3$.



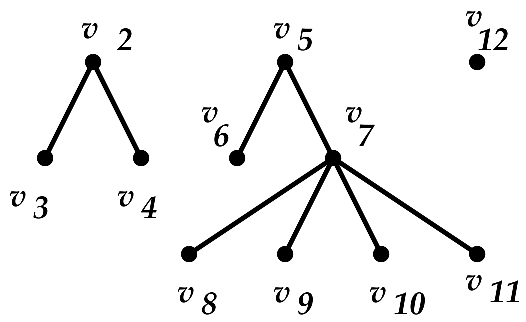
Το δένδρο T με ρίζα $r = v_8$.

Έστω r η ρίζα του δένδρου T. Τα δένδρα του δάσους $T - r$ λέγονται **υποδένδρα της ρίζας** r. Τα δένδρα του δάσους $T - r$ θεωρούνται επίσης δένδρα με ρίζα : Ρίζα καθενός είναι το άλλο άκρο του δεσμού που περιέχει την ρίζα r του T. Η έννοια των υποδένδρων μιας οποιασδήποτε κορυφής (που δεν είναι φύλλο) ορίζεται ανάλογα.

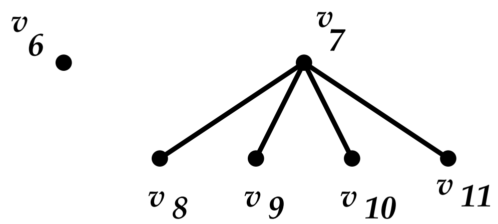
Παραδείγματα :



Υποδένδρα της ρίζας v_1 είναι τα :



Υποδένδρα της κορυφής v_5 είναι τα



Ορίζουμε το **επίπεδο** $l(v)$ μιας κορυφής v του T ως εξής: $l(r) = 0$ και αν στο (μοναδικό) $r - v$ μονοπάτι $(r, \ldots, u, v)$ έχουμε $l(u) = i$, τότε $l(v) = i + 1$.

(Στην περίπτωση αυτή το u λέγεται **γονέας** του v και το v λέγεται **παιδί** του u. Παιδιά του ίδιου γονέα λέγονται **αδέλφια**).

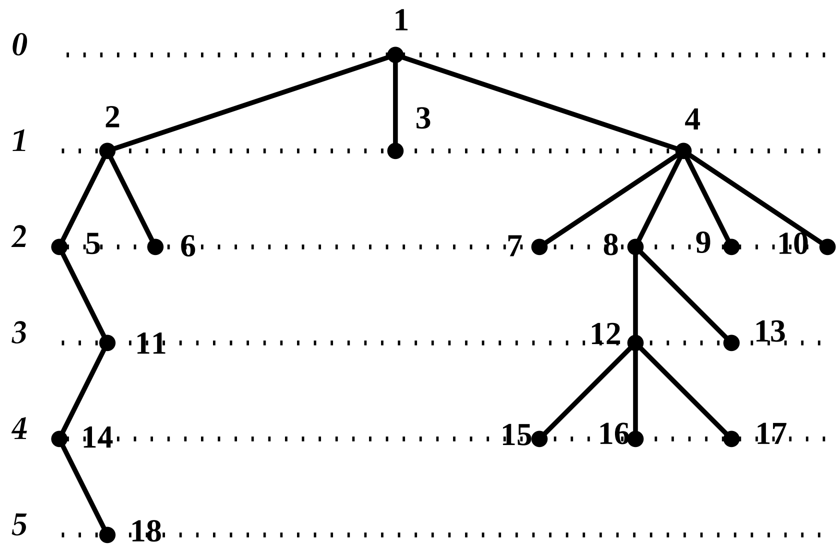
Αν υπάρχει στο T διαδρομή από μια κορυφή v_1 σε μια κορυφή v_k, η οποία χρησιμοποιεί κορυφές με επίπεδα που συνεχώς αυξάνουν τότε λέμε ότι η v_1 είναι **πρόγονος** της v_k και η v_k είναι **απόγονος** της v_1.

Μια κορυφή χωρίς παιδιά λέγεται **φύλλο** (ή **τερματικός κόμβος**). Αλλιώς λέγεται **ενδιάμεση** κορυφή.

Ύψος (ή **βάθος**) ενός δένδρου λέγεται το μεγαλύτερο από τα επίπεδα των κορυφών του.

Παράδειγμα :

Επίπεδα



1 : ρίζα
5, 6 : παιδιά του 2
7, 8, 9, 10 : παιδιά του 4
2 : πρόγονος των 5,6, 11,14,18
3, 6, 7, 9, 10, 13, 15, 16, 17, 18 : φύλλα
11 : ενδιάμεση κορυφή

2 : γονέας των 5, 6
4 : γονέας του 7
15, 16, 17 : αδέλφια
15 : απόγονος των 1, 4, 8, 12

Ύψος του δένδρου = 5.

Παρατήρηση : Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν $l(r) = 1$ αντί 0.

Μέγεθος ενός δένδρου T με ρίζα ονομάζεται ο αριθμός των δεσμών του και συμβολίζεται με $s(T)$. Το δένδρο που δεν έχει κανένα δεσμό ονομάζεται κενό δένδρο και συμβολίζεται με 0, ενώ το δένδρο που έχει ένα μόνο δεσμό συμβολίζεται με 1.

Το κενό δένδρο

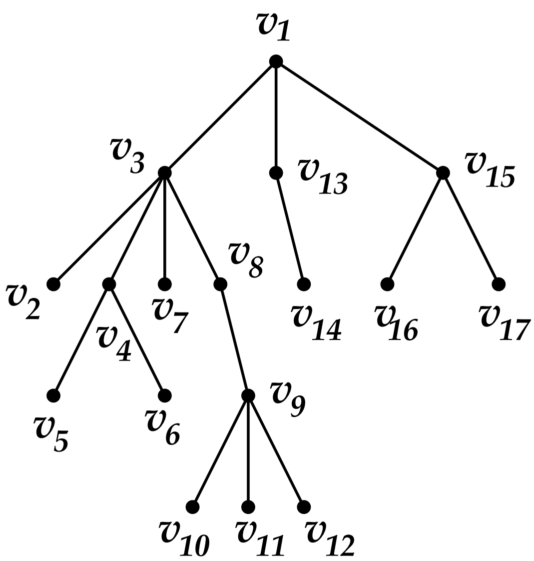
Το δένδρο 1

Βαθμός μιας κορυφής u ενός δένδρου με ρίζα ονομάζεται ο αριθμός των παιδιών της και συμβολίζεται με $\delta(u)$.

Παρατήρηση: Σε αντίθεση με τη γενική θεωρία των γραφημάτων, όπου ως βαθμός $d(u)$ ενός κόμβου u ορίστηκε ο αριθμός των γειτονικών κόμβων του, στα δένδρα συνηθίζεται να αγνοείται ο γονέας του κόμβου στον υπολογισμό του βαθμού του, δηλαδή ισχύει $\delta(u) = d(u) - 1$.

Πολλοί συγγραφείς για να διαχωρίσουν τα $d(u)$ και $\delta(u)$ ονομάζουν το δεύτερο **εξωτερικό βαθμό** του κόμβου u. Στο παρόν, χάριν απλότητας, στα δένδρα το $\delta(u)$ αποκαλείται βαθμός του κόμβου u. Προφανώς, κάθε φύλλο u ενός δένδρου T έχει βαθμό $\delta(u) = 0$.

τη **Παράδειγμα**

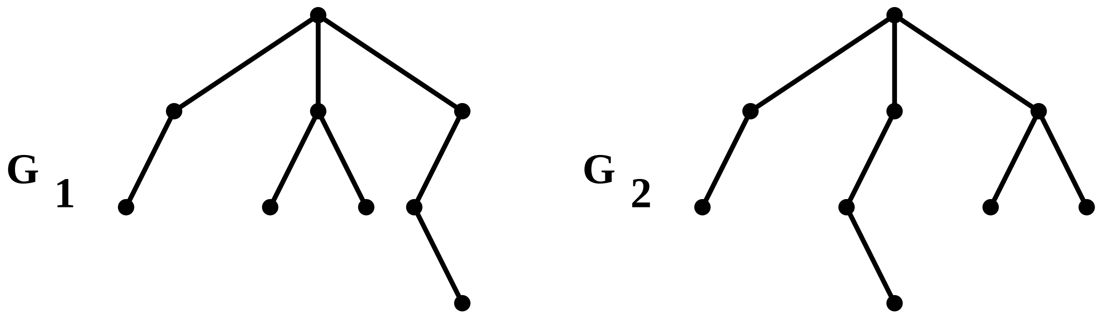


$$
\begin{aligned}
&\delta(v_3) = 4,\\
&\delta(v_1) = \delta(v_9) = 3,\\
&\delta(v_4) = \delta(v_{15}) = 2,\\
&\delta(v_8) = \delta(v_{13}) = 1,\\
&\delta(v_2) = \delta(v_5) = \delta(v_6) = \delta(v_7) = \delta(v_{10})\\
&\qquad = \delta(v_{11}) = \delta(v_{12}) = \delta(v_{14})\\
&\qquad = \delta(v_{16}) = \delta(v_{17}) = 0.
\end{aligned}
$$

5.3 Διατεταγμένα δένδρα

Ένα δένδρο με ρίζα λέγεται **διατεταγμένο** αν η αλλαγή της σχετικής θέσης των υποδένδρων της ρίζας του, θεωρείται ότι δημιουργεί μη ισόμορφο δένδρο.

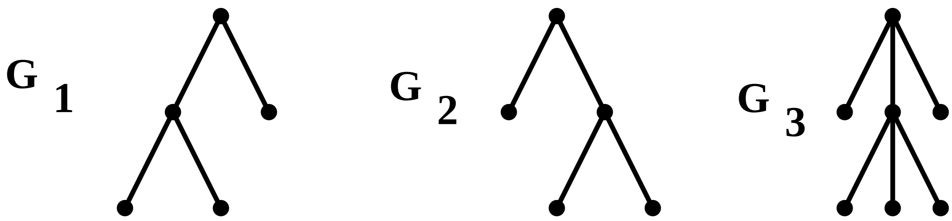
Παράδειγμα :



Αν τα G_1, G_2 δεν θεωρηθούν διατεταγμένα τότε $G_1 \simeq G_2$, αλλά τα διατεταγμένα δένδρα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα. (Σ' ένα διατεταγμένο δένδρο, τα υποδένδρα της ρίζας χαρακτηρίζονται σαν πρώτο, δεύτερο κ.λπ. από αριστερά πρός τα δεξιά.)

Ένα διατεταγμένο δένδρο, στο οποίο κάθε κορυφή επιτρέπεται να έχει το πολύ k παιδιά, λέγεται k-**δένδρο**.

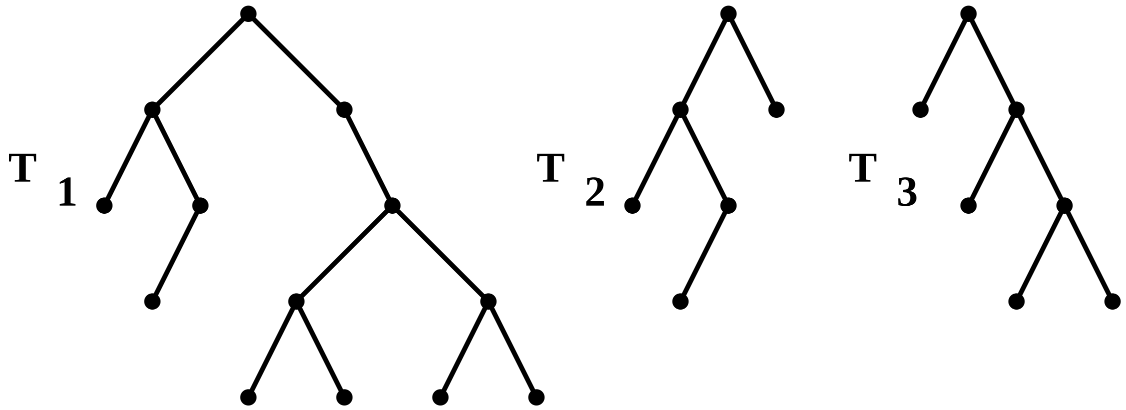
Παράδειγμα:



Το G_1 και το G_2 είναι 2-δένδρα, ενώ το G_3 είναι 3-δένδρο.

5.4 Δυαδικά δένδρα

Ένα δένδρο με ρίζα λέγεται **δυαδικό δένδρο** αν κάθε κόμβος του που δεν είναι φύλλο έχει είτε ένα αριστερό, είτε ένα δεξί παιδί, είτε δύο παιδιά (ένα αριστερό και ένα δεξί).

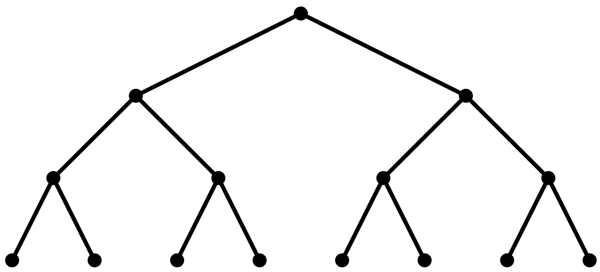


Τρία δυαδικά δένδρα T_1, T_2 και T_3.

Παρατήρηση: Σε αντίθεση με τον γενικό ορισμό των γραφημάτων, στα δυαδικά δένδρα συμπεριλαμβάνεται και το κενό δυαδικό δένδρο, δηλαδή το δένδρο T με $V(T) = \emptyset$.

Αν κάθε εσωτερικός κόμβος έχει ακριβώς δύο παιδιά και όλα τα φύλλα έχουν το ίδιο επίπεδο, έχουμε ένα **πλήρες δυαδικό δένδρο**.

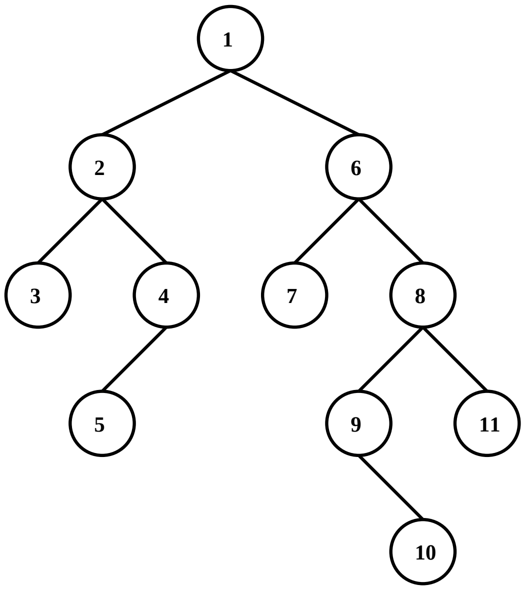
Παράδειγμα



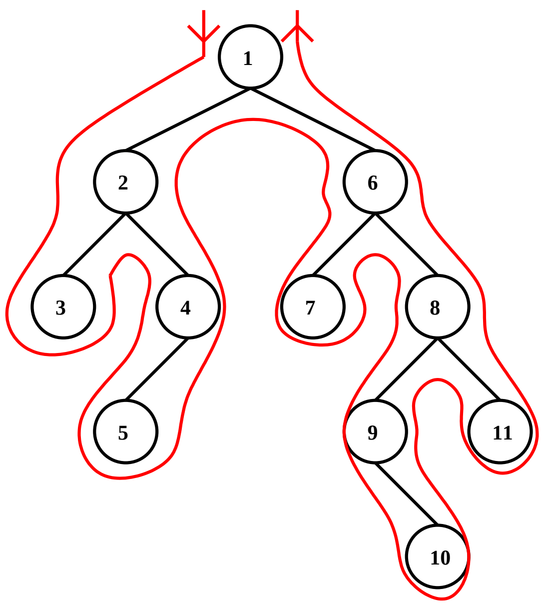
5.4.1 Διάσχιση δυαδικών δένδρων

Υπάρχουν 4 βασικοί τρόποι να διασχίσουμε (αριθμήσουμε) τους κόμβους ενός δυαδικού δένδρου. Καθένας από τους τρόπους αυτούς καθορίζει μια ολική διάταξη των κόμβων του δένδρου.

1) Προδιάταξη : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο πρίν επισκεφθούμε (αριθμήσουμε) σε προδιάταξη το αριστερό και το δεξί υποδένδρο του.
Παράδειγμα :

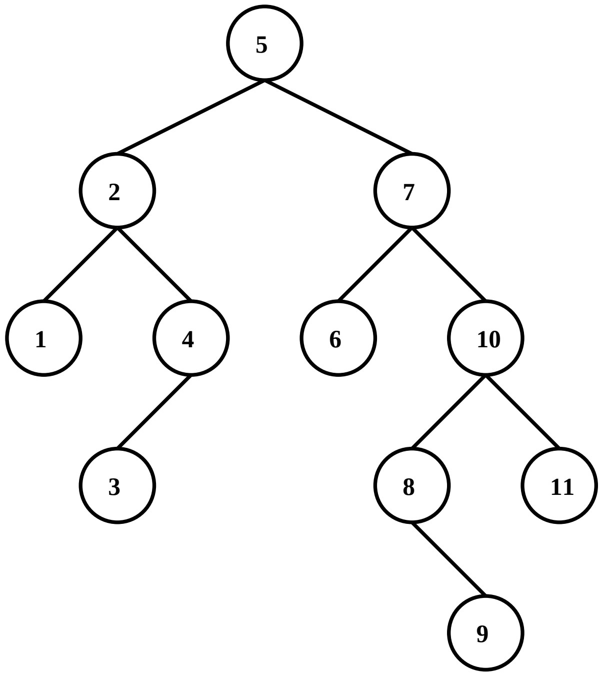


"Πρακτικός" τρόπος : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) την κάθε κορυφή μόλις την πρωτοσυναντήσουμε καθώς κινούμαστε όπως δείχνει το σχήμα :



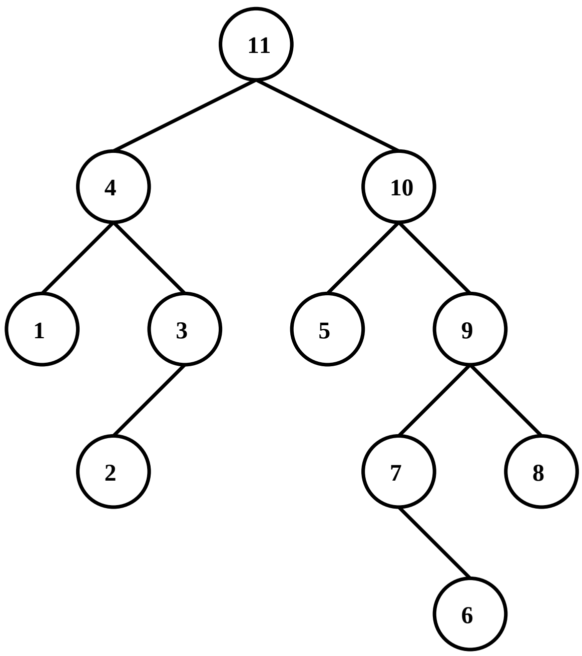
2) Ενδοδιάταξη : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο μετά την επίσκεψη (αρίθμηση) σε ενδοδιάταξη του αριστερού και πρίν την επίσκεψη (αρίθμηση) σε ενδοδιάταξη του δεξιού υποδένδρου του.

Παράδειγμα :

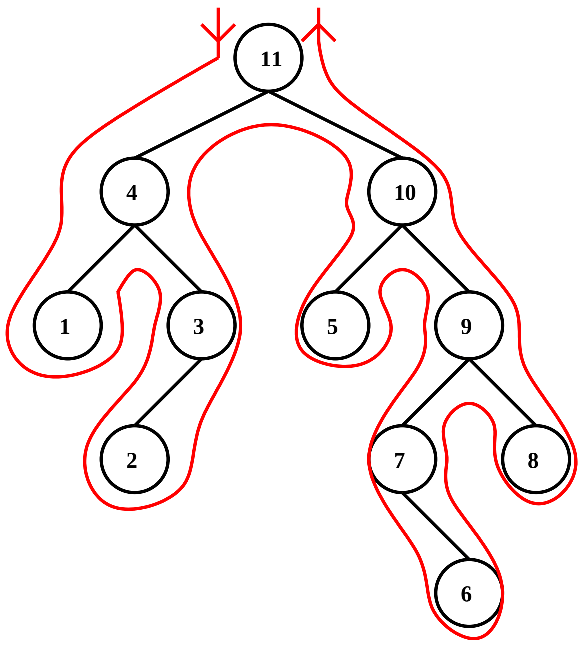


3) Μεταδιάταξη : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο αφού έχουμε επισκεφθεί (αριθμήσει) σε μεταδιάταξη και το αριστερό και το δεξί υποδένδρο του.

Παράδειγμα :

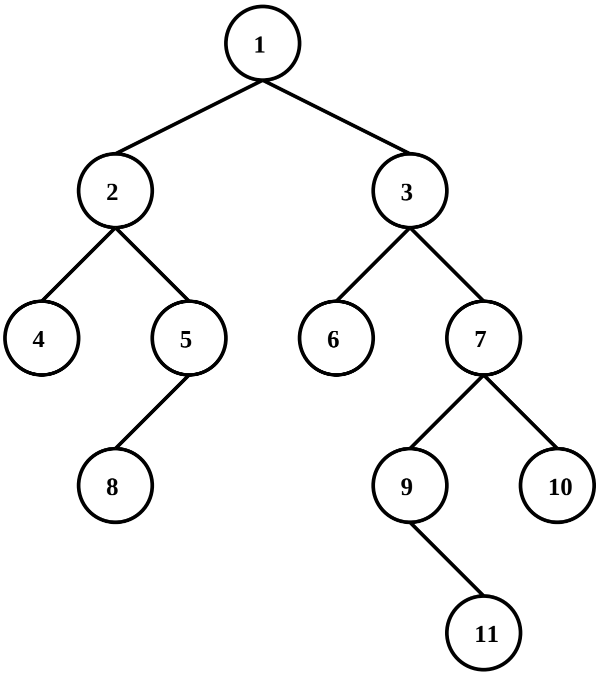


"Πρακτικός" τρόπος : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο την τελευταία φορά που τον συναντάμε (δηλαδή καθως τον εγκαταλείπουμε για να πάμε προς τον γονέα του) καθώς κινούμαστε όπως δείχνει το σχήμα :



4) Διάσχιση κατά σειρά επιπέδων : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) τις κορυφές κατά επίπεδο (από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο), όπου σε κάθε επίπεδο επισκεπτόμαστε τις κορυφές από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Παράδειγμα :



5.5 Ασκήσεις

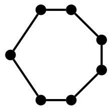
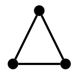
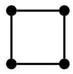
5.5.1 Λυμένες ασκήσεις

1) Να εξετασθεί αν υπάρχουν απλά γραφήματα δεσμών με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών:

i) (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), iv) (7, 6, 5, 4, 3, 2, 1),
ii) (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2), v) (6, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1),
iii) (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3), vi) (3, 3, 2, 2, 2, 2).

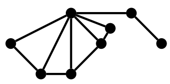
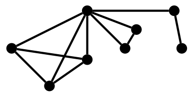
Λύση:

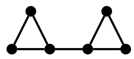
i) Δεν υπάρχει γράφημα, αφού το άθροισμα των βαθμών είναι περιττός αριθμός.

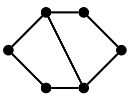
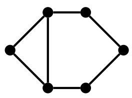
ii) Υπάρχει. Για παράδειγμα το  καθώς επίσης και το  

iii) Δεν υπάρχει, αφού το άθροισμα των βαθμών είναι περιττός αριθμός.

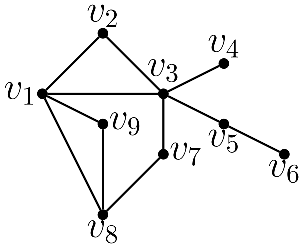
iv) Δεν υπάρχει, αφού το συνολικό πλήθος κορυφών είναι 7 και άρα (σε απλό γράφημα δεσμών) δεν μπορεί μια κορυφή να έχει βαθμό 7.

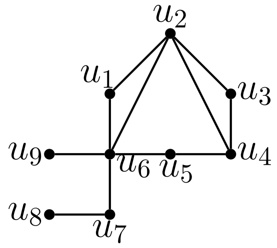
v) Υπάρχει. Για παράδειγμα το  καθώς επίσης και το 

vi) Υπάρχει. Για παράδειγμα το 

καθώς επίσης και τα  

2) Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα τα παρακάτω γραφήματα:



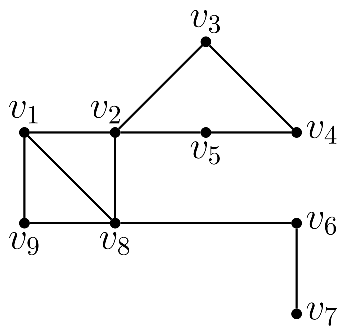


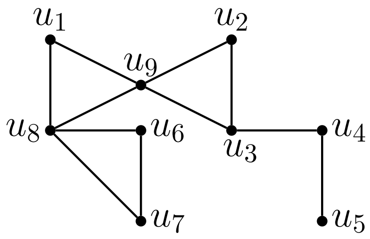
Λύση:

Τα γραφήματα είναι ισόμορφα αφού υπάρχει ο ισομορφισμός: $f : V \mapsto V'$ με

$$f(v_1) = u_2, \quad f(v_2) = u_1, \quad f(v_3) = u_6, \quad f(v_4) = u_9, \quad f(v_5) = u_7,$$
$$f(v_6) = u_8, \quad f(v_7) = u_5, \quad f(v_8) = u_4, \quad f(v_9) = u_3.$$

3) Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα τα παρακάτω γραφήματα:

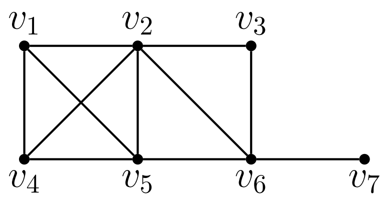




Λύση:

Τα γραφήματα δεν είναι ισόμορφα, αφού το G_1 περιέχει κύκλο μήκους 4 (τον $(v_2, v_3, v_4, v_5, v_2)$) ενώ το G_2 δεν περιέχει τέτοιο κύκλο.

4) Δίδεται το γράφημα



Να γραφεί $i)$ η μήτρα του και $ii)$ η απεικόνισή του.

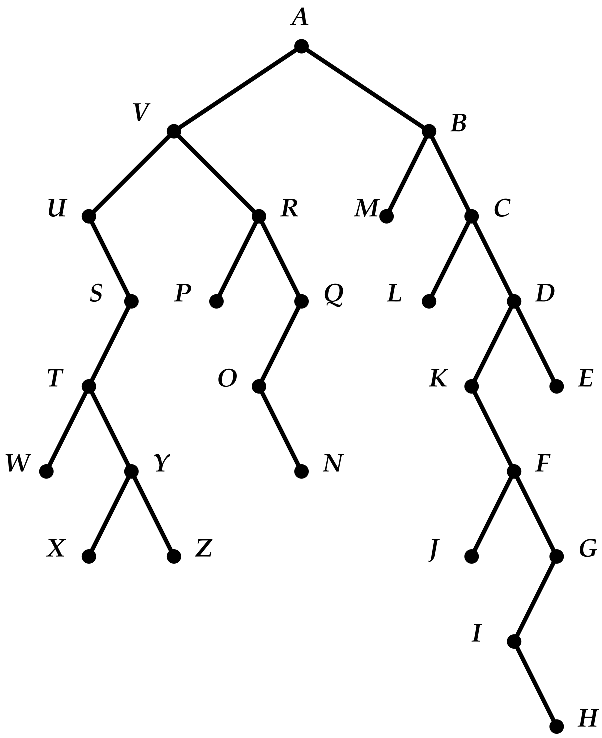
Λύση:

i)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ii) $\Gamma(v_1) = \{v_2, v_4, v_5\}$, $\quad \Gamma(v_2) = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $\quad \Gamma(v_3) = \{v_2, v_6\}$,
$\Gamma(v_4) = \{v_1, v_2, v_5\}$, $\quad \Gamma(v_5) = \{v_1, v_2, v_4, v_6\}$,
$\Gamma(v_6) = \{v_2, v_3, v_5, v_7\}$, $\quad \Gamma(v_7) = \{v_6\}$.

5) Να διατρέξετε σε προδιάταξη, ενδοδιάταξη, μεταδιάταξη και διάταξη κατά σειρά επιπέδων το παρακάτω δυαδικό δένδρο (με ρίζα το A):



Λύση:
Προδιάταξη: $AVUSTWYXZRPQONBMCLDKFJGIHE$
Ενδοδιάταξη: $UWTXYZSVPRONQAMBLCKJFIHGDE$
Μεταδιάταξη: $WXZYTSUPNOQRVMLJHIGFKEDCBA$
Κατά επίπεδα: $AVBURMCSPQLDTOKEWYNFXZJGIH$

5.5.2 Ασκήσεις προς επίλυση

1) Να εξετασθεί αν υπάρχουν γραφήματα δεσμών με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών.

i) (4, 4, 3, 3, 1),

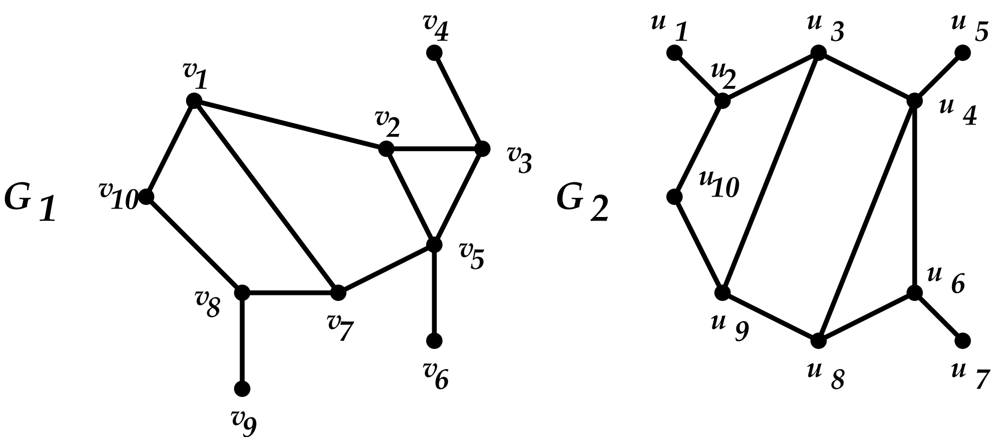
ii) (1, 1, 1, 1, 1, 1),

iii) (5, 3, 2, 2, 1, 1),

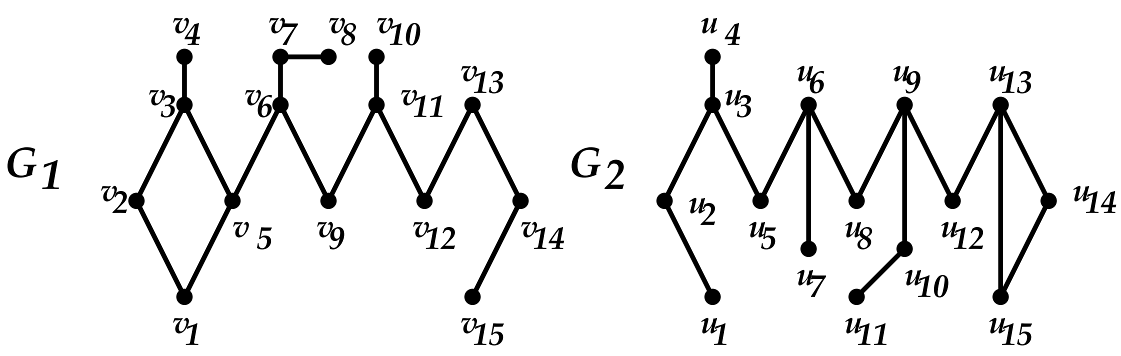
iv) (5, 3, 3, 2, 2).

2) Να αποδειχθεί ότι σε κάθε απλό γράφημα δεσμών G, με $|V(G)| \geq 2$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο κόμβοι με τον ίδιο βαθμό.

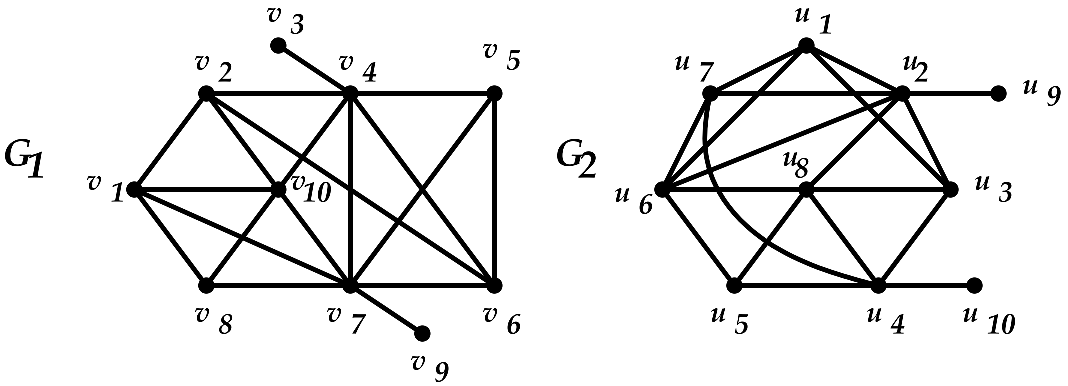
3) Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα τα παρακάτω γραφήματα



4) Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα τα παρακάτω γραφήματα



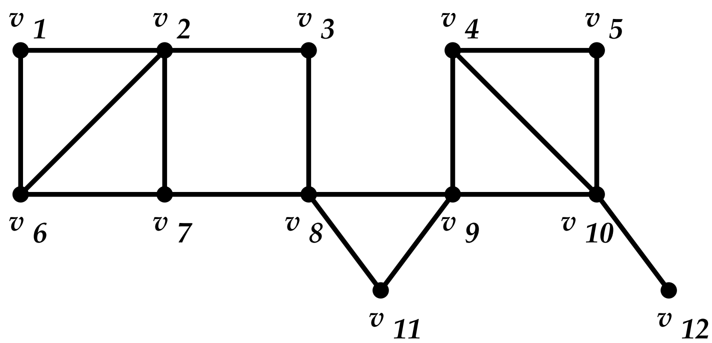
5) Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα τα παρακάτω γραφήματα



6) Να βρεθεί ο αριθμός των δεσμών του γραφήματος K_n.

7) Να δειχθεί ότι αν ένα απλό n-κανονικό γράφημα δεσμών $G = (V, E)$ έχει $|V| = 2n$, τότε είναι συνεκτικό.

8) Δίδεται το γράφημα



Να βρεθούν

i) Η ακολουθία βαθμών του.

ii) Οι αποστάσεις $d(v_1, v_9)$ και $d(v_4, v_6)$.

iii) Ένα μονοπάτι του, μήκους 5.

iv) Ένας κύκλος του, μήκους 5.

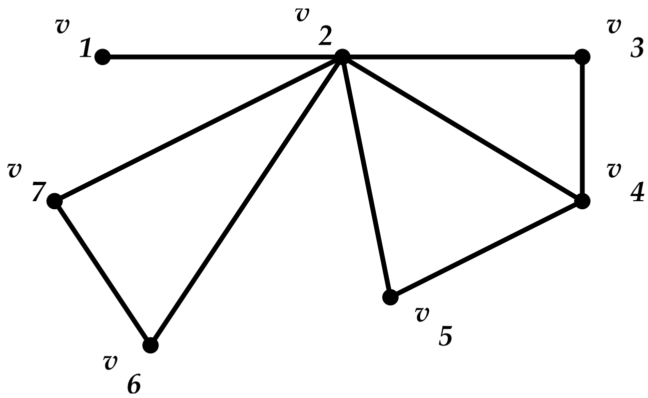
v) Όλα τα $v_1 - v_8$ μονοπάτια του.

9) Δίνεται το γράφημα δεσμών (V, E) όπου $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$, με την ακόλουθη μήτρα :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθεί μια διαδρομή του, μήκους 4.

10) Δίνεται το γράφημα



α) Να γραφεί η μήτρα του.
β) Να γραφεί μια διαδρομή του, μήκους 4.

11) Να γίνει επίσκεψη σε προδιάταξη, μεταδιάταξη, ενδοδιάταξη και διάταξη κατά σειρά επιπέδων στα παρακάτω δυαδικά δένδρα (με ρίζες v_{19}, u_1 αντίστοιχα)