Ασκήσεις για την 1η απαλλακτική πρόοδο
Διαλέξεις 1,2,3

Πρόταση 1 (Αρχή της επαγωγής). *Έστω $\Pi(n)$ μια πρόταση με $n \in \mathbb{N}^*$, για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:*

i) Η $\Pi(1)$ είναι αληθής.

ii) Αν η $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάποιο $k \geqslant 1$, τότε και η $\Pi(k+1)$ είναι αληθής.

Τότε η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Άσκηση 1. *Να αποδειχθεί η ταυτότητα*

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Λύση. Έστω $\Pi(n)$ η πρόταση $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ που θέλουμε να αποδείξουμε. Η $\Pi(1)$:

$$1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει η $\Pi(k)$, για κάποιο $k \geqslant 1$, δηλαδή ισχύει ότι

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι τότε ισχύει και η $\Pi(k+1)$:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Εκτελώντας τις πράξεις στο πρώτο μέλος και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η $\Pi(k)$ ισχύει, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = (k+1)\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} \\
&= (k+1)\frac{2k^2 + 7k + 6}{6} = (k+1)\frac{(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}$$

δηλαδή η $\Pi(k+1)$ ισχύει.

Επομένως, η $\Pi(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. □

Άσκηση 2. *Να αποδειχθεί η ταυτότητα*

$$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Λύση. Η σχέση προφανώς ισχύει για $n = 1$, αφού $1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $k \geqslant 1$:

$$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4},$$

Τότε θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k + 1$:

$$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4},$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η Π(k ισχύει, έχουμε ότι

$$1+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3 = \frac{(k+1)^2}{4}(k^2+4(k+1)) = \frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

δηλαδή η σχέση ισχύει και για $n = k + 1$.

Επομένως, η σχέση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. □

Άσκηση 3. *Να αποδειχθεί η ταυτότητα*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}, \qquad \text{όπου } n \geqslant 2$$

Λύση. Η σχέση ισχύει για $n = 2$, αφού $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} = 1 - \dfrac{1}{2^2} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}$. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $k \geqslant 2$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

Τότε θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

δηλαδή η σχέση ισχύει και για $n = k + 1$.

Επομένως, η σχέση ισχύει για κάθε $n \geqslant 2$. □

Άσκηση 4. *Να αποδειχθεί ότι*

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1},\ \text{για κάθε } n\in\mathbb{N}^*.$$

Λύση. Η σχέση προφανώς ισχύει για $n=1$, αφού $\dfrac{1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{1+1}$. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $k\geqslant 1$:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

δηλαδή η σχέση ισχύει και για $n=k+1$.

Επομένως, η σχέση ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$. □

Άσκηση 5. *Να βρεθεί που είναι το σφάλμα στην επόμενη "επαγωγική απόδειξη".*

Πρόταση *Όλα τα τριαντάφυλλα έχουν το ίδιο χρώμα.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς τον αριθμό n των τριαντάφυλλων.

Έστω η πρόταση $\Pi(n)$: "Σε κάθε σύνολο με n τριαντάφυλλα όλα έχουν το ίδιο χρώμα."

Η $\Pi(1)$ είναι προφανώς αληθής.

Έστω ότι η $\Pi(k)$ είναι αληθής, δηλαδή σε κάθε σύνολο με k τριαντάφυλλα όλα έχουν το ίδιο χρώμα. Θα αποδειχθεί ότι και η $\Pi(k+1)$ είναι αληθής.

Έστω $\{r_1,r_2,\ldots,r_k,r_{k+1}\}$ είναι ένα σύνολο με $k+1$ τριαντάφυλλα. Τότε τα υποσύνολα $\{r_1,r_2,\ldots,r_k\}$ και $\{r_2,\ldots,r_k,r_{k+1}\}$ περιέχουν k τριαντάφυλλα, επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής, σε κάθε σύνολο όλα τα τριαντάφυλλα έχουν το ίδιο χρώμα. Επειδή το r_2 ανήκει και στα δύο σύνολα, έπεται όλα τα τριαντάφυλλα έχουν το ίδιο χρώμα, άρα η $\Pi(k+1)$ είναι αληθής. □

Λύση. Το επαγωγικό βήμα από το $n=1$ στο $n=2$ δεν είναι έγκυρο. Πράγματι, όταν $n=2=1+1$, δηλαδή όταν $k=1$ τότε τα σύνολα $\{r_1,\ldots,r_k\}=\{r_1\}$ και $\{r_2,\ldots,r_{k+1}\}=\{r_2\}$ δεν έχουν κοινό στοιχείο το r_2. □

Άσκηση 6. *Έστω ότι για μια πρόταση $\Pi(n)$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν η $\Pi(k)$ είναι αληθής, τότε και η $\Pi(k+3)$ είναι επίσης αληθής. Τι πρέπει να ισχύει έτσι ώστε η $\Pi(n)$ να είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$;*

Λύση. Αρκεί να είναι αληθείς οι προτάσεις $\Pi(0)$, $\Pi(1)$, $\Pi(2)$. Τότε θα είναι αληθείς και οι προτάσεις $P(3k)$, $P(3k+1)$, $P(3k+2)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επειδή κάθε φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$ ανήκει σε μια από τις 3 μορφές $3k$, $3k+1$, $3k+2$ έπεται ότι η πρόταση $P(n)$ θα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Πρόταση 2 (Αρχή της πλήρους επαγωγής). *Έστω $\Pi(n)$ μια πρόταση με $n \in \mathbb{N}^*$, για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:*

i) Η $\Pi(1)$ είναι αληθής.

ii) Αν η $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάθε $1 \leqslant k < n$, τότε και η $\Pi(n)$ είναι αληθής.

Τότε η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Άσκηση 7. *(*) Να δειχθεί ότι μπορούμε να πληρώσουμε οποιοδήποτε πολλαπλάσιο των 10 ευρώ και μεγαλύτερο ή ίσο των 40 ευρώ, χρησιμοποιώντας μόνο χαρτονομίσματα των 20 και 50 ευρώ.*

Λύση. Κάθε πολλαπλάσιο των 10 ευρώ και μεγαλύτερο ή ίσο των 40 ευρώ εκφράζεται στην μορφή

$$10n, \text{ όπου } n \geqslant 4$$

Για $n = 4$, δηλαδή το ποσό $10 \cdot 4 = 40$ μπορεί να πληρωθεί χρησιμοποιώντας 2 χαρτονομίσματα των 20 ευρώ, οπότε η πρόταση ισχύει για $n = 4$.

Για $n = 5$, δηλαδή το ποσό $10 \cdot 5 = 50$ μπορεί να πληρωθεί χρησιμοποιώντας 1 χαρτονόμισμα των 50 ευρώ, οπότε η πρόταση ισχύει για $n = 5$.

Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάθε k με $5 \leqslant k \leqslant n-1$, δηλαδή μπορούμε να πληρώσουμε κάθε ποσό $10 \cdot k$, όπου $5 \leqslant k \leqslant n-1$, χρησιμοποιώντας μόνο χαρτονομίσματα των 20 και 50 ευρώ.

Θα δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $k = n$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$10n = 10(n-2+2) = 10(n-2) + 20$$

Επειδή $5 \leqslant k \leqslant n-1 \Leftrightarrow 5 \leqslant n-1 \Leftrightarrow 4 \leqslant n-2$ οπότε $4 \leqslant \underbrace{n-2}_{k} \leqslant n-1$. Επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής υπάρχει τρόπος να πληρώσουμε το ποσό $10(n-2)$ χρησιμοποιώντας μόνο χαρτονομίσματα των 20 και 50 ευρώ.

Επομένως, μπορούμε να πληρώσουμε και το ποσό

$$10n = 10(n-2) + 20$$

προσθέτοντας στην λύση της επαγωγικής υπόθεσης άλλο ένα χαρτονόμισμα των 20 ευρώ. Επομένως, ο ισχυρισμός ισχύει για το n.

Άρα, η πρόταση ισχύει για κάθε $n \geqslant 5$ (και άρα και για κάθε $n \geqslant 4$) $\square$

Παραδείγματα

$40 = 2 \cdot 20$

$50 = 1 \cdot 50$

$60 = 40 + 20 = 2 \cdot 20 + 20 = 3 \cdot 20$

$70 = 50 + 20 = 1 \cdot 50 + 20 = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 50$

$80 = 60 + 20 = 3 \cdot 20 + 20 = 4 \cdot 20$

$90 = 70 + 20 = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 50 + 20 = 2 \cdot 20 + 1 \cdot 50$, κ.ο.κ.

Άσκηση 8 (Ταυτότητες με σύνολα). *Έστω E ένα μη κενό σύνολο και $A, B, C \subseteq E$. Να δειχθεί ότι*

$$A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C).$$

(Επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την διαφορά.)

Λύση. (**1ος τρόπος: Με την μέθοδο των πινάκων.**) Τα A, B, C είναι υποσύνολα του E. Στον επόμενο πίνακα εξετάζουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μπορεί να ισχύουν για κάθε στοιχείο $x \in E$. Σημειώνουμε 1 αν το x ανήκει στο σύνολο και 0 αλλιώς.

A	B	C	$B\backslash C$	$A \cap (B\backslash C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B)\backslash(A \cap C)$
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Οι στήλες $A \cap (B\backslash C)$ και $(A \cap B)\backslash(A \cap C)$ είναι ίδιες. Άρα, τα σύνολα αυτά έχουν τα ίδια στοιχεία του E, δηλαδή είναι ίσα.

Παρατήρηση: Οι επιπλέον στήλες που χρησιμοποιήθηκαν στην επαλήθευση ήταν βοηθητικές και μπορούν να παραλειφθούν.

(**2ος τρόπος: Με τη χρήση ιδιοτήτων.**) Χρησιμοποιώντας τις βασικές ιδιότητες των πράξεων συνόλων, έχουμε τις επόμενες ισότητες:

$$\begin{aligned}
(A \cap B)\backslash(A \cap C) &= (A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) && X\backslash Y = X \cap \overline{Y} \\
&= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) && \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \\
&= ((A \cap B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) && X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \\
&= \varnothing \cup (A \cap B \cap \overline{C}) && X \cap \overline{X} = \varnothing \\
&= A \cap (B \cap \overline{C}) && X \cup \varnothing = X \\
&= A \cap (B\backslash C) && X\backslash Y = X \cap \overline{Y}.
\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Ξεκινήσαμε τις πράξεις από το δεξιό μέλος της ισότητας, το οποίο ήταν πιο “σύνθετο” από το αριστερό μέλος, και άρα είχε περισσότερες επιλογές για εφαρμογή των ιδιοτήτων. □

Βασικές Ιδιότητες Πράξεων

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$, $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$
3. $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$, $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (De Morgan).

Μια σχέση R στο E ονομάζεται **ισοδυναμία** όταν ικανοποιεί τις ιδιότητες:
(i) $\alpha R\alpha$, για κάθε $a \in E$ (**ανακλαστική**)
(ii) $\alpha R\beta \Leftrightarrow \beta R\alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in E$ (**συμμετρική)**
(ii) $\alpha R\beta$ και $\beta R\gamma \Longrightarrow \alpha R\gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in E$ (**μεταβατική**).
Συνήθως η σχέση ισοδυναμίας σημειώνεται με $\sim$ αντί R.

Άσκηση 9 (Παράδειγμα σχέσης ισοδυναμίας). *Έστω R μια σχέση στο $\mathbb{Z}$ με $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 5k$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Να δειχθεί ότι η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Λύση. Για κάθε $a \in \mathbb{Z}$ ισχύει $a^2 - a^2 = 0 = 5 \cdot 0$, όπου $0 \in \mathbb{Z}$, άρα aRa, δηλαδή η R είναι ανακλαστική.

Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ με aRb. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $a^2 - b^2 = 5k$, οπότε $b^2 - a^2 = 5(-k)$, όπου $-k \in \mathbb{Z}$, άρα bRa, δηλαδή η σχέση R είναι συμμετρική.

Έστω $a, b, c \in \mathbb{Z}$ με aRb και bRc. Τότε υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ με $a^2 - b^2 = 5k_1$ και $b^2 - c^2 = 5k_2$. Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι $a^2 - c^2 = 5(k_1 + k_2)$, όπου $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, άρα aRc, δηλαδή η σχέση R είναι μεταβατική.

Επομένως, η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z}$. □

Άσκηση 10 (Παράδειγμα σχέσης ισοδυναμίας). *Στο σύνολο $\mathbb{N}$ ορίζουμε μια σχέση R ως εξής:*

$$xRy \Leftrightarrow \text{ Υπάρχει } k \in Z \text{ ώστε } y - x = 3k.$$

Να δειχθεί ότι η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{N}$.

Λύση. Ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $x - x = 0 = 3 \cdot 0$, άρα ικανοποιείται ο ορισμός με $k = 0$, δηλαδή xRx.

Ισχύει η συμμετρική ιδιότητα. Πράγματι, αν $x, y \in \mathbb{N}$ με xRy, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $y - x = 3k$. Επομένως, $x - y = 3(-k)$, και επειδή, $-k \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι yRx.

Ισχύει η μεταβατική ιδιότητα. Πράγματι, αν $x, y, z \in \mathbb{N}$ με xRy και yRz, τότε υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$y - x = 3k_1 \qquad \text{και} \qquad z - y = 3k_2.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι $z - x = 3(k_1 + k_2)$ και επειδή $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι xRz.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας. □

Μια σχέση R στο E ονομάζεται (μερική) **διάταξη** όταν ικανοποιεί τις ιδιότητες:
(i) $\alpha R \alpha$, για κάθε $\alpha \in E$ (**ανακλαστική**)
(ii) $\alpha R \beta$ και $\beta R \alpha \Longrightarrow \alpha = \beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in E$ (**αντισυμμετρική**)
(iii) $\alpha R \beta$ και $\beta R \gamma \Longrightarrow \alpha R \gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in E$ (**μεταβατική**).

Συνήθως η σχέση διάταξης σημειώνεται με $\leqslant$.

Η διάταξη ονομάζεται **ολική** αν ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\alpha \leqslant \beta \text{ ή } \beta \leqslant \alpha, \;\; \forall \alpha, \beta \in E.$$

Άσκηση 11 (Παράδειγμα σχέσης διάταξης). *Έστω R σχέση στο $\mathbb{N}$, με $xRy \Leftrightarrow x = y^k$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}^*$. Να δειχθεί ότι η R είναι σχέση μερικής διάταξης. Είναι η R σχέση ολικής διάταξης;*

Λύση. Για κάθε $a \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $a = a^1$, όπου $1 \in \mathbb{N}^*$, άρα aRa, δηλαδή η σχέση R είναι ανακλαστική.

Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ με aRb και bRa. Τότε υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $a = b^{k_1}$ και $b = a^{k_2}$. Αντικαθιστώντας το b έχουμε ότι $a = a^{k_1 k_2}$. Επομένως, $k_1 k_2 = 1$, οπότε $k_1 = k_2 = 1$, άρα $a = b$. Δηλαδή, η σχέση R είναι αντισυμμετρική.

Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ με aRb και bRc. Τότε υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $a = b^{k_1}$ και $b = c^{k_2}$. Αντικαθιστώντας το b προκύπτει ότι $a = c^{k_1 k_2}$, όπου $k_1 k_2 \in \mathbb{N}^*$, άρα aRc, δηλαδή η σχέση R είναι μεταβατική.

Επομένως, η σχέση R είναι σχέση μερικής διάταξης.

Η σχέση R δεν είναι ολική διάταξη, διότι ούτε $2R3$, ούτε $3R2$. □

Άσκηση 12 (Παράδειγμα σχέσης διάταξης). *Να εξετασθεί αν η σχέση R στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, με*

$$x \, R \, y \Leftrightarrow x^2 \leqslant xy$$

είναι σχέση διάταξης.

Λύση. Η σχέση είναι ανακλαστική, δηλαδή ισχύει xRx, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, είναι

$$xRx \Leftrightarrow x^2 \leqslant x \cdot x$$

το οποίο ισχύει.

Η σχέση είναι αντισυμμετρική, δηλαδή ισχύει $xRy, yRx \Rightarrow x = y$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Πράγματι,

$$\begin{cases} xRy \\ yRx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leqslant xy \\ y^2 \leqslant yx \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 \leqslant 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \leqslant 0 \Rightarrow (x-y)^2 \leqslant 0 \Rightarrow x = y$$

Η σχέση είναι μεταβατική, δηλαδή ισχύει $xRy, yRz \Rightarrow xRz$, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$. Πράγματι,

$$\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leqslant xy \\ y^2 \leqslant yz \end{cases} \Rightarrow x^2y^2 \leqslant xyyz \Rightarrow x^2 \leqslant xz \Rightarrow xRz.$$

Κατόπιν τούτων, η σχέση R είναι σχέση διάταξης. □

Δίδεται ένα σύνολο V, στο οποίο έχουμε ορίσει μια μερική διάταξη $\lhd$. Μια **ολική** διάταξη $\leqslant$ στο V ονομάζεται **γραμμική επέκταση** ή **τοπολογική διάταξη** της διάταξης $\lhd$ στο V ανν για κάθε $a, b \in V$ ισχύει

$$a \lhd b \Rightarrow a \leqslant b.$$

Δηλαδή η διάταξη $\leqslant$ είναι "συμβατή" με την $\lhd$ και την επεκτείνει σε όλα τα ζεύγη στοιχείων.

Αλγόριθμος εύρεσης τοπολογικής διάταξης

- Είσοδος: Ένα σύνολο U διατεταγμένων ζευγών (x, y) που αναπαριστούν την μερική διάταξη $\lhd$ στο σύνολο V

- Έξοδος: Μια (διατεταγμένη) λίστα L των στοιχείων του V, η οποία αναπαριστά την τοπολογική διάταξη $\leqslant$.

- Όσο υπάρχουν στοιχεία του V που δεν έχουν προστεθεί στην L
  - Επιλέγουμε ένα στοιχείο $x \in V$ που δεν έχει μικρότερο στοιχείο μεταξύ των στοιχείων που δεν έχουν προστεθεί στην λίστα L (Δηλαδή το x δεν εμφανίζεται στην δεύτερη θέση κανενός ζεύγους του U.)
  - Προσθέτουμε το x στο τέλος της λίστας L.
  - Σβήνουμε όλα τα ζεύγη (x, y) του U που περιέχουν το x.

Άσκηση 13 (Τοπολογική διάταξη). *Να βρεθεί η σειρά εκτέλεσης των δραστηριοτήτων $A, B, C, D, E, F, G, H, K, M$ όταν*
$A < C$, $A < D$, $A < M$, $A < H$, $B < A$, $B < D$, $B < K$, $B < M$, $C < G$, $C < H$, $C < M$, $D < H$, $E < A$, $E < B$, $E < C$, $E < K$, $F < D$, $F < G$, $G < H$, $K < C$, $M < H$,
όπου $x < y$ όταν η x προηγείται της y.

Λύση. Εδώ $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, K, M\}$.

Έστω L η ζητούμενη τοπολογική διάταξη. Αρχικά $L = []$

$$U = \{(A, C), (A, D), (A, M), (A, H), (B, A), (B, D), (B, K), (B, M), (C, G), (C, H), (C, M), (D, H), (E, A), (E, B), (E, C), (E, K), (F, D), (F, G), (G, H), (K, C), (M, H)\}$$

Σε κάθε βήμα: Βρίσκουμε όλα τα στοιχεία $y \in V$ που δεν εμφανίζονται (ως δεύτερο στοιχείο) σε κανένα ζεύγος (x, y) του U, τα προσθέτουμε στο τέλος της L και σβήνουμε όλα τα ζεύγη (y, z) του U όπου εμφανίζεται το y (ως πρώτο στοιχείο).

1ο βήμα: $L = [E, F]$

$$\begin{aligned} U = \{&(A,C),(A,D),(A,M),(A,H),(B,A),(B,D),(B,K),(B,M),(C,G),(C,H),(C,M),\\ &(D,H),\cancel{(E,A)},\cancel{(E,B)},\cancel{(E,C)},\cancel{(E,K)},\cancel{(F,D)},\cancel{(F,G)},(G,H),(K,C),(M,H)\} \end{aligned}$$

2ο βήμα: $L = [E, F, B]$

$$\begin{aligned} U = \{&(A,C),(A,D),(A,M),(A,H),\cancel{(B,A)},\cancel{(B,D)},\cancel{(B,K)},\cancel{(B,M)},(C,G),(C,H),(C,M),\\ &(D,H),\cancel{(E,A)},\cancel{(E,B)},\cancel{(E,C)},\cancel{(E,K)},\cancel{(F,D)},\cancel{(F,G)},(G,H),(K,C),(M,H)\} \end{aligned}$$

3ο βήμα: $L = [E, F, B, A, K]$

$$\begin{aligned} U = \{&\cancel{(A,C)},\cancel{(A,D)},\cancel{(A,M)},\cancel{(A,H)},\cancel{(B,A)},\cancel{(B,D)},\cancel{(B,K)},\cancel{(B,M)},(C,G),(C,H),(C,M),\\ &(D,H),\cancel{(E,A)},\cancel{(E,B)},\cancel{(E,C)},\cancel{(E,K)},\cancel{(F,D)},\cancel{(F,G)},(G,H),\cancel{(K,C)},(M,H)\} \end{aligned}$$

4ο βήμα: $L = [E, F, B, A, K, C, D]$

$$\begin{aligned} U = \{&\cancel{(A,C)},\cancel{(A,D)},\cancel{(A,M)},\cancel{(A,H)},\cancel{(B,A)},\cancel{(B,D)},\cancel{(B,K)},\cancel{(B,M)},\cancel{(C,G)},\cancel{(C,H)},\cancel{(C,M)},\\ &\cancel{(D,H)},\cancel{(E,A)},\cancel{(E,B)},\cancel{(E,C)},\cancel{(E,K)},\cancel{(F,D)},\cancel{(F,G)},(G,H),\cancel{(K,C)},(M,H)\} \end{aligned}$$

5ο βήμα: $L = [E, F, B, A, K, C, D, G, M]$

$$\begin{aligned} U = \{&\cancel{(A,C)},\cancel{(A,D)},\cancel{(A,M)},\cancel{(A,H)},\cancel{(B,A)},\cancel{(B,D)},\cancel{(B,K)},\cancel{(B,M)},\cancel{(C,G)},\cancel{(C,H)},\cancel{(C,M)},\\ &\cancel{(D,H)},\cancel{(E,A)},\cancel{(E,B)},\cancel{(E,C)},\cancel{(E,K)},\cancel{(F,D)},\cancel{(F,G)},\cancel{(G,H)},\cancel{(K,C)},\cancel{(M,H)}\} \end{aligned}$$

6ο βήμα: $L = [E, F, B, A, K, C, D, G, M, H]$

$$\begin{aligned} U = \{&\cancel{(A,C)},\cancel{(A,D)},\cancel{(A,M)},\cancel{(A,H)},\cancel{(B,A)},\cancel{(B,D)},\cancel{(B,K)},\cancel{(B,M)},\cancel{(C,G)},\cancel{(C,H)},\cancel{(C,M)},\\ &\cancel{(D,H)},\cancel{(E,A)},\cancel{(E,B)},\cancel{(E,C)},\cancel{(E,K)},\cancel{(F,D)},\cancel{(F,G)},\cancel{(G,H)},\cancel{(K,C)},\cancel{(M,H)}\} \end{aligned}$$

Άρα, μια τοπολογική διάταξη είναι η $L = [E, F, B, A, K, C, D, G, M, H]$. □

Παρατήρηση: Στα βήματα της προηγούμενης άσκησης είχαμε εναλλακτικές επιλογές για την σειρά των στοιχείων της L. Συγκεκριμένα στο 1ο βήμα είχαμε 2 επιλογές για τα E, F, στο 3ο βήμα είχαμε 2 επιλογές για τα A, K, στο 4ο βήμα είχαμε 2 επιλογές για τα C, D και στο 5ο βήμα είχαμε 2 επιλογές για την σειρά των G, M. Από τις επιλογές αυτές προκύπτουν εναλλακτικές τοπολογικές διατάξεις, εδώ στο παράδειγμα υπάρχουν τουλάχιστον $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ διαφορετικές τοπολογικές διατάξεις.

Αν $(E, \leqslant)$ είναι ένα διατεταγμένο σύνολο και A είναι ένα μη κενό υποσύνολό του τότε ένα στοιχείο $\alpha \in E$ (αντίστοιχα $\beta \in E$) ονομάζεται **άνω** (αντίστοιχα **κάτω**) φράγμα του A όταν $x \leqslant \alpha$ (αντίστοιχα $\beta \leqslant x$) για κάθε $x \in A$. Όταν υπάρχει ένα τουλάχιστον άνω (αντίστοιχα κάτω) φράγμα ενός συνόλου A, τότε το σύνολο αυτό ονομάζεται **άνω** (αντίστοιχα **κάτω**) **φραγμένο** σύνολο.

Αν A είναι ένα άνω (αντίστοιχα κάτω) φραγμένο υποσύνολο του $(E, \leqslant)$ τότε ένα στοιχείο $s \in E$ (αντίστοιχα $i \in E$) που ικανοποιεί τις ιδιότητες:
(i) s είναι άνω φράγμα (αντίστοιχα i είναι κάτω φράγμα).
(ii) $s \leqslant \alpha$ (αντίστοιχα $\beta \leqslant i$) για κάθε άνω φράγμα α (αντίστοιχα κάτω φράγμα β) του A ονομάζεται **supremum ή ελάχιστο άνω φράγμα** (αντίστοιχα **infimum ή μέγιστο κάτω φράγμα** πέρας) του A και σημειώνεται με $\sup A$ (αντίστοιχα $\inf A$).

Πρέπει να τονισθεί ότι τα $\sup A$ και $\inf A$ δεν υπάρχουν πάντα για ένα σύνολο. Όταν όμως υπάρχουν είναι μοναδικά. Γενικά το $\sup A$ (αντίστοιχα $\inf A$) δεν ανήκει υποχρεωτικά στο σύνολο A. Όμως, στην περίπτωση που ανήκει ονομάζεται **μέγιστο** (αντίστοιχα **ελάχιστο**) στοιχείο του A και σημειώνεται με $\max A$ (αντίστοιχα $\min A$).

Άσκηση 14 (Φραγμένα σύνολα). *Έστω το διατεταγμένο σύνολο $(\mathbb{N}^*, |)$ και*

$$A_1 = \{32, 80, 160, 640\}$$

$$A_2 = \{n \in \mathbb{N}^* : n \textit{ περιττός }, n^2 \leqslant 40\}$$

Να ευρεθούν τα supremum (ελάχιστο άνω φράγμα) και infimum (μέγιστο κάτω φράγμα) των παραπάνω συνόλων. Ποια από αυτά έχουν μέγιστο ή ελάχιστο;

Λύση. Ισχύει ότι

$$\sup A_1 = \text{ΕΚΠ}(32, 80, 160, 640) = 640$$

Πράγματι,

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ είναι άνω φράγμα του } A_1$$

$$\Leftrightarrow 32|n \text{ και } 80|n \text{ και } 160|n \text{ και } 640|n$$

$$\Leftrightarrow n \text{ κοινό πολλαπλάσιο των στοιχείων του } A_1$$

Οπότε το ελάχιστο άνω φράγμα του A_1 θα είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των στοιχείων του A_1.

Επίσης,

$$\inf A_1 = \text{ΜΚΔ}(32, 80, 160, 640) = 16$$

Πράγματι,

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ είναι κάτω φράγμα του } A_1$$

$$\Leftrightarrow n|32 \text{ και } n|80 \text{ και } n|160 \text{ και } n|640$$

$$\Leftrightarrow n \text{ κοινός διαιρέτης των στοιχείων του } A_1$$

Οπότε το μέγιστο κάτω φράγμα του A_1 θα είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των στοιχείων του A_1.

Επομένως το A_1 έχει μέγιστο ως προς την διάταξη $|$ αφού το $\sup A_1 = 640$ ανήκει στο A_1, ενώ δεν έχει ελάχιστο ως προς την διάταξη $|$ αφού το $\inf A_1 = 16$ δεν ανήκει στο A_1.

Πριν απαντήσουμε στα ίδια ερωτήματα για το A_2 πρώτα θα βρούμε τα στοιχεία του. Έχουμε ότι

$$A_2 = \{1, 3, 5\}$$

(αφού $1^2 \leqslant 40$, $3^2 \leqslant 40$, $5^2 \leqslant 40$, $7^2 \nleqslant 40$, κ.ο.κ.)

Οπότε,

$$\sup A_2 = \text{ΕΚΠ}(1, 3, 5) = 15$$

$$\inf A_2 = \text{ΜΚΔ}(1, 3, 5) = 1$$

Επομένως, το A_2 έχει ελάχιστο και δεν έχει μέγιστο ως προς την διάταξη $|$. $\square$

Άσκηση 15 (Φραγμένα σύνολα). *Έστω το διατεταγμένο σύνολο* $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ *όπου* $E = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$ *(Υπενθύμιση:* $\mathcal{P}(E)$ *το δυναμοσύνολο του E.)*

Να ευρεθούν τα supremum και infimum των παρακάτω υποσυνόλων του E

$$A_1 = \{\{10, 15\}, \{5, 20, 25\}, \{10, 30\}, \{20, 35\}\}$$

$$A_2 = \{\{10, 20, 25\}, \{5, 10, 40\}, \{5, 10, 35\}, \{5, 10, 20, 40\}\}$$

Ποια από αυτά έχουν μέγιστο ή ελάχιστο;

Λύση. Ισχύει ότι

$$\sup A_1 = \{10, 15\} \cup \{5, 20, 25\} \cup \{10, 30\} \cup \{20, 35\} = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$$

Πράγματι,

$$B \subseteq E \text{ είναι άνω φράγμα του } A_1$$
$$\Leftrightarrow \{10, 15\} \subseteq B \text{ και } \{5, 20, 25\} \subseteq B \text{ και } \{10, 30\} \subseteq B \text{ και } \{20, 35\} \subseteq B$$
$$\Leftrightarrow B \text{ υπερσύνολο των στοιχείων του } A_1$$

Οπότε το ελάχιστο άνω φράγμα του A_1 θα είναι το "μικρότερο" τέτοιο υπερσύνολο B, δηλαδή η ένωση των στοιχείων του A_1.

$$\inf A_1 = \{10, 15\} \cap \{5, 20, 25\} \cap \{10, 30\} \cap \{20, 35\} = \varnothing$$

Πράγματι,

$$B \subseteq E \text{ είναι κάτω φράγμα του } A_1$$
$$\Leftrightarrow B \subseteq \{10, 15\} \text{ και } B \subseteq \{5, 20, 25\} \text{ και } B \subseteq \{10, 30\} \text{ και } B \subseteq \{20, 35\}$$
$$\Leftrightarrow B \text{ υποσύνολο των στοιχείων του } A_1$$

Οπότε το μέγιστο άνω φράγμα του A_1 θα είναι το "μεγαλύτερο" τέτοιο υποσύνολο B, δηλαδή η τομή των στοιχείων του A_1.

Επομένως, το A_1 έχει δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο ως προς την διάταξη $\subseteq$.

Ομοίως,

$$\sup A_2 = \{10, 20, 25\} \cup \{5, 10, 40\} \cup \{5, 10, 35\} \cup \{5, 10, 20, 40\} = \{5, 10, 20, 25, 35, 40\}$$

$$\inf A_2 = \{10, 20, 25\} \cap \{5, 10, 40\} \cap \{5, 10, 35\} \cap \{5, 10, 20, 40\} = \{10\}.$$

Επομένως, το A_2 έχει δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο ως προς την διάταξη $\subseteq$. □

Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο ενός συνόλου E τότε η απεικόνιση $f : E \to \{0,1\}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική συνάρτηση του** A και συμβολίζεται με μ_A (ή χ_A).

Άσκηση 16 (Χαρακτηριστική συνάρτηση). *Να αποδειχθούν τα παρακάτω*
(i) $A = B$ *αν και μόνο αν* $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, $\forall x \in E$.
(ii) $A \subseteq B$ *αν και μόνο αν* $\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x)$, $\forall x \in E$.
(iii) $\mu_A(x) + \mu_{\overline{A}}(x) = 1$ *για κάθε* $x \in E$.
(iv) $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A\cap B}(x)$, $\forall x \in E$.
(v) $\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$, $\forall x \in E$.
(Υπόδειξη: Διακρίνετε περιπτώσεις για το $x \in E$*)*

Λύση της (iv). Έστω $x \in E$. Διακρίνουμε τις παρακάτω 4 περιπτώσεις για το x.

- $x \in A$, $x \in B$. Τότε $x \in A \cup B$ και $x \in A \cap B$.

  Οπότε $\mu_{A\cup B}(x) = 1$, $\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \{1,1\} = 1$ και $\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_{A\cap B}(x) = 1 + 1 - 1 = 1$.

- $x \in A$, $x \notin B$. Τότε $x \in A \cup B$ και $x \notin A \cap B$.

  Οπότε $\mu_{A\cup B}(x) = 1$, $\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \{1,0\} = 1$ και $\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_{A\cap B}(x) = 1 + 0 - 0 = 1$.

- $x \notin A$, $x \in B$. Τότε $x \in A \cup B$ και $x \notin A \cap B$.

  Οπότε $\mu_{A\cup B}(x) = 1$, $\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \{0,1\} = 1$ και $\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_{A\cap B}(x) = 0 + 1 - 0 = 1$.

- $x \notin A$, $x \notin B$. Τότε $x \notin A \cup B$ και $x \notin A \cap B$.

  Οπότε $\mu_{A\cup B}(x) = 0$, $\max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \{0,0\} = 0$ και $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A\cap B}(x) = 0 + 0 - 0 = 0$.

Επομένως, η σχέση $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A\cap B}(x)$ ισχύει για κάθε $x \in E$. □

(i) Μια απεικόνιση $f : A \to B$ ονομάζεται $1-1$ όταν δύο οποιαδήποτε διαφορετικά πρότυπα έχουν διαφορετικές εικόνες, δηλαδή

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in A \text{ με } x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

Ισοδύναμα για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.
(ii) Μια απεικόνιση $f : A \to B$ ονομάζεται **επί** όταν κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A, δηλαδή όταν $B = R(f)$.
(iii) Μια απεικόνιση $f : A \to B$ ονομάζεται **αμφιμονοσήμαντη** όταν είναι $1-1$ και επί.

Άσκηση 17 (Συναρτήσεις 1-1, επι, αμφιμονοσήμαντες). *Σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση $f : A \to B$ είναι $1-1$, επί, ή αμφιμονοσήμαντη;*
(i) $A = [0,1]$, $B = [5,9]$ και $f(x) = 3x+5$.
(ii) $A = [0,1]$, $B = [5,9]$ και $f(x) = 3x+5$.
(iii) $A = [-2,2]$, $B = [0,4]$ και $f(x) = x^2$.
(iv) $A = [0,2]$, $B = [\frac{1}{3},1]$ και $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Λύση. (i) Έστω $x_1, x_2 \in A = [0,1]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$3x_1 + 5 = 3x_2 + 5 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η f είναι $1-1$.
Έστω $y \in B = [5,9]$ με $f(x) = y$ τότε

$$5 \leqslant y \leqslant 9 \Leftrightarrow 5 \leqslant 3x+5 \leqslant 9 \Leftrightarrow 0 \leqslant 3x \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $y \in B$ τα οποία δεν είναι εικόνα κανενός προτύπου του A δηλαδή η f δεν είναι επί. Για παράδειγμα, δεν υπάρχει $x \in A$ ώστε $f(x) = 9$. Πράγματι, $f(x) = 9 \Leftrightarrow 3x+5 = 9 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \notin A$.
Η f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.
(ii) (Όμοιο με το (i)) Έστω $x_1, x_2 \in A = [0,1]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$3x_1 + 5 = 3x_2 + 5 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η f είναι $1-1$.
Έστω $y \in B = [5,8]$ με $f(x) = y$ τότε

$$5 \leqslant y \leqslant 8 \Leftrightarrow 5 \leqslant 3x+5 \leqslant 8 \Leftrightarrow 0 \leqslant 3x \leqslant 3 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Επομένως, η f είναι επί αφού για κάθε $y \in [5,8]$ υπάρχει $x \in [0,1]$ ώστε $f(x) = y$. Πράγματι, από την εξίσωση $y = 3x+5$ προκύπτει ότι $x = \frac{y-5}{3}$.
Άρα, η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

(iii) Έστω $x_1, x_2 \in A = [-2, 2]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

Επομένως, αν $x_2 = -x_1$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$ δηλαδή η f δεν είναι $1-1$.

Εναλλακτικά, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f(1) = f(-1) = 1$, οπότε η f δεν είναι $1-1$.

Έστω $y \in B = [0, 4]$ με $f(x) = y$ τότε

$$0 \leqslant y \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow 0 \leqslant |x| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$$

Επομένως, η f είναι επί αφού για κάθε $y \in [0, 4]$ υπάρχει $x \in [-2, 2]$ ώστε $f(x) = y$. Πράγματι, από την εξίσωση $y = x^2$ προκύπτει ότι $x = \pm\sqrt{y}$.

Η f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.

(iv) Έστω $x_1, x_2 \in A = [0, 2]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$\frac{1}{x_1 + 1} = \frac{1}{x_2 + 1} \Leftrightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η f είναι $1-1$.

Έστω $y \in B = [\frac{1}{3}, 1]$ με $f(x) = y$ τότε

$$\frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{x+1} \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant x + 1 \leqslant 3 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 2$$

Επομένως, η f είναι επί αφού για κάθε $y \in [\frac{1}{3}, 1]$ υπάρχει $x \in [0, 2]$ ώστε $f(x) = y$. Πράγματι, από την εξίσωση $y = \frac{1}{x+1}$ προκύπτει ότι $x = \frac{1}{y} - 1$.

Η f είναι αμφιμονοσήμαντη. □

Άσκηση 18. *Να εξετασθεί αν η απεικόνιση $f(x) = x^2 + x + 1/\mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα.*

Λύση. Ο ισχυρισμός είναι λάθος. Είναι

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = y^2 + y + 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)(x + y) + x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)(x + y + 1) = 0 \end{aligned}$$

Αν λοιπόν επιλέξουμε x, y τέτοια ώστε $x \neq y$ και $x + y = -1$, π.χ. $x = 0$ και $y = -1$, τότε $f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$ και $f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$. □

Άσκηση 19. *Να εξετασθεί αν η απεικόνιση $f : A \to B$, με $A = [1, 2]$ και $B = [7, 10]$ και τύπο $f(x) = 2x + 5$ είναι επί.*

Λύση. Ο ισχυρισμός είναι λάθος. Είναι

$$x \in A \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow 2 \leqslant 2x \leqslant 4 \Rightarrow 7 \leqslant 2x + 5 \leqslant 9 \Rightarrow 7 \leqslant f(x) \leqslant 9$$

Άρα, αν $y \in B$, με $y > 9$, τότε δεν υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$. □

Άσκηση 20. *Δίνονται τα σύνολα $A = \{2^3, 2^4, 2^5, \ldots\}$ και $B = \{4^6, 4^8, 4^{10}, \ldots\}$. Να δοθεί μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : A \to B$.*

Λύση. Απεικονίζουμε το τυχαίο στοιχείο 2^n, $n \in \mathbb{N}^*$, του A στο 4^{2n}, δηλαδή ορίζουμε $f(2^n) = 4^{2n}$.

Επειδή $4^{2n} = (2^2)^{2n} = 2^{4n} = (2^n)^4$, η f ορίζεται ισοδύναμα από τον τύπο $f(x) = x^4$.

Το τυχαίο στοιχείο y του B είναι της μορφής $y = 4^{2n}$. Το στοιχείο αυτό είναι εικόνα του $x = 2^n \in A$, άρα η f είναι επί. Επιπλέον, η f είναι και ένα προς ένα, διότι το x είναι το μοναδικό πρότυπο για το y. Πράγματι, αν υπάρχει και άλλο πρότυπο $x' = 2^m$ με $f(x') = y$, τότε

$$y = 4^{2n} = f(x') = f(2^m) = 4^{2m} \Rightarrow 2n = 2m \Rightarrow n = m \Rightarrow x = x'.$$ □

Άρα η f είναι και ένα προς ένα.

Αν $f : A \to B$ είναι μια απεικόνιση και $\Gamma \subseteq A$, $\Delta \subseteq B$ τότε τα σύνολα

$$f(\Gamma) = \{y \in B : \text{ υπάρχει } x \in \Gamma \text{ με } y = f(x)\} = \{f(x) : x \in \Gamma\}$$

και

$$f^{-1}(\Delta) = \{x \in A : f(x) \in \Delta\}$$

ονομάζονται αντίστοιχα **εικόνα** του Γ και **αντίστροφη εικόνα** του Δ.

Άσκηση 21 (Εικόνες συνόλων). *Έστω* $A = \{1,2,3,4,5,6,7\} = [7]$, $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} = \{0\} \cup [12]$ *και* $f : A \to B$ *με*

$$f(x) = (x-5)(x-4).$$

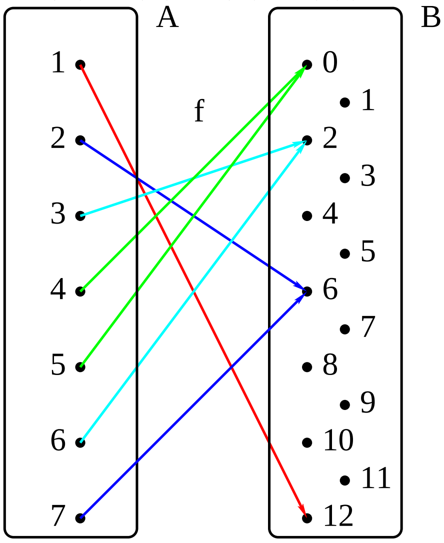
Να βρεθούν τα σύνολα

i) $f(A)$, $f(\{3,4\})$, $f(\varnothing)$, $f(\{1,2,6\})$,

ii) $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{0,2\})$, $f^{-1}(\{12\})$, $f^{-1}(\{9\})$, $f^{-1}(\{4,5,6\})$.

Λύση. Ισχύει ότι

i) $f(A) = \{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7)\} = \{12,6,2,0,0,2,6\} = \{0,2,6,12\}$.



$f(\{3,4\}) = \{f(3), f(4)\} = \{2,0\}$.

$f(\varnothing) = \varnothing$.

$f(\{1,2,6\}) = \{f(1), f(2), f(6)\} = \{12,6,2\}$.

ii) $f^{-1}(B) = A$.

$f^{-1}(\{2\}) = \{3,6\}$, διότι $f(3) = f(6) = 2$ και $f(x) \neq 2$ για κάθε $x \in A$ με $x \neq 3,6$.

$f^{-1}(\{0\}) = \{4,5\}$, διότι $f(4) = f(5) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ με $x \neq 4,5$.

$f^{-1}(\{0,2\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{2\}) = \{3,6\} \cup \{4,5\} = \{3,4,5,6\}$.

$f^{-1}(\{12\}) = \{1\}$, διότι $f(1) = 12$ και $f(x) \neq 12$ για κάθε $x \in A$ με $x \neq 1$.

$f^{-1}(\{9\}) = \varnothing$, διότι $f(x) \neq 9$ για κάθε $x \in A$.

$f^{-1}(\{4,5,6\}) = f^{-1}(\{4\}) \cup f^{-1}(\{5\}) \cup f^{-1}(\{6\}) = \varnothing \cup \varnothing \cup \{2,7\} = \{2,7\}$. □