# Ασκήσεις για την 1η απαλλακτική πρόοδο
# Διαλέξεις 4,5

**Πολλαπλασιαστική αρχή ή**
**Κανόνας γινομένου**

Αν ένα αντικείμενο $A$ μπορεί να επιλεγεί κατά $m$ τρόπους και ένα αντικείμενο $B$ κατά $n$ τρόπους τότε και τα δύο μαζί μπορούν να επιλεγούν κατά $m \cdot n$ τρόπους.

Έστω $E$ ένα σύνολο με $n$ στοιχεία, δηλαδή $|E| = n$. (**Παρατήρηση**: $|E|$ ονομάζεται **πληθάριθμος** ή **πληθικός αριθμός** του $E$).

Κάθε διατεταγμένη $m$-άδα $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ με $a_i \in E$ για κάθε $i \in [m] = \{1, 2, \ldots, m\}$ ονομάζεται **διάταξη των $n$ στοιχείων ανά $m$** ($m$-permutation of $n$ elements).

Αν τα στοιχεία μιας διάταξης είναι διαφορετικά (δηλαδή $a_i \neq a_j$ για κάθε $i, j \in [m]$ με $i \neq j$) τότε αυτή ονομάζεται **απλή διάταξη** (ή **διάταξη**) ενώ αν τα στοιχεία της δεν είναι κατ' ανάγκη διαφορετικά τότε αυτή ονομάζεται **επαναληπτική διάταξη** ή **διάταξη με επανάληψη**.

Αν $n = m$, τότε η διάταξη $n$ ανά $n$ ονομάζεται **μετάθεση** $n$ στοιχείων.

Μια επαναληπτική μετάθεση στην οποία εμφανίζονται $k$ διαφορετικά στοιχεία ονομάζεται **μετάθεση $k$ ειδών στοιχείων**.

**Αριθμός διατάξεων $P(n,m)$ $n$ στοιχείων ανά $m$**

$$P(n,m) = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}_{m \text{ όροι}} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

όπου $n!$ **($n$ παραγοντικό)** ισούται με

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n, \text{ όταν } n \geqslant 1$$

και

$$0! = 1$$

**Αριθμός μεταθέσεων $n$ στοιχείων**

$$P_n = n!$$

**Αριθμός επαναληπτικών διατάξεων $n$ στοιχείων ανά $m$**

$$U(n,m) = n^m$$

**Άσκηση 1.** *Πόσους πενταψήφιους φυσικούς αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία*
$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, *όταν*

(i) *πρέπει να έχουν τα ψηφία τους διαφορετικά,*

(ii) *τα ψηφία τους μπορεί να επαναλαμβάνονται,*

(iii) *πρέπει να είναι άρτιοι αριθμοί και τα ψηφία τους να είναι διαφορετικά*

(iv) *το άθροισμα του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου τους να είναι ίσο με 4 και τα ψηφία τους μπορούν να επαναλαμβάνονται.*

*Λύση.* Ο τυχαίος πενταψήφιος αριθμός θα είναι της μορφής $x = x_1x_2x_3x_4x_5$, όπου $x_i \in [9]$, το $i$-οστό ψηφίο του αριθμού.

$i$) Για το $x_1$ υπάρχουν 9 επιλογές.
Για το $x_2$ υπάρχουν 8 επιλογές.
Για το $x_3$ υπάρχουν 7 επιλογές.
Για το $x_4$ υπάρχουν 6 επιλογές.
Για το $x_5$ υπάρχουν 5 επιλογές.

Άρα, από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $P(9,5) = \dfrac{9!}{(9-5)!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ διαφορετικοί αριθμοί.

$ii$) Κάθε $x_i$ επιλέγεται με 9 τρόπους, οπότε συνολικά υπάρχουν $9^5$ τέτοιοι αριθμοί.

$iii$) Το $x_5$ επιλέγεται άρτιος με 4 τρόπους, δηλαδή $x_5 \in \{2, 4, 6, 8\}$, και τα υπόλοιπα 4 επιλέγοντας μεταξύ των υπόλοιπων 8 αριθμών με $P(8, 4)$ τρόπους. Συνολικά προκύπτουν $4P(8, 4) = 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ τρόποι.

$iv$) Θα πρέπει να είναι $x_1 + x_5 = 4$. Επειδή

$$4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1,$$

τα $x_1, x_5$ επιλέγονται με 3 τρόπους. Τα υπόλοιπα 3 ψηφία επιλέγονται με $9^3$ τρόπους. Συνολικά προκύπτουν $3 \cdot 9^3 = 3^7$ τέτοιοι αριθμοί. □

Έστω ένα σύνολο $E$ με $|E| = n$.

Κάθε σύνολο που αποτελείται από $m$ στοιχεία του $E$ ονομάζεται **συνδυασμός των $n$ στοιχείων ανά $m$** ($m$-combination of $n$ elements).

Αν τα στοιχεία ενός συνδυασμού είναι διαφορετικά τότε αυτός ονομάζεται **απλός συνδυασμός** (ή **συνδυασμός**) ενώ αν τα στοιχεία του δεν είναι κατ' ανάγκη διαφορετικά τότε αυτός ονομάζεται **επαναληπτικός συνδυασμός** ή **συνδυασμός με επανάληψη**.

Ουσιαστικά κάθε απλός συνδυασμός των $n$ στοιχείων του $E$ ανά $m$ είναι ένα υποσύνολο του $E$ με $m$ στοιχεία.

*Η διαφορά συνδυασμών και διατάξεων είναι ότι στους συνδυασμούς δεν παίζει ρόλο η σειρά των στοιχείων.*

**Αριθμός συνδυασμών $\binom{n}{m}$ $n$ στοιχείων ανά $m$**

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

**Αριθμός επαναληπτικών συνδυασμών των $n$ στοιχείων ανά $m$**

$$E(n,m) = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \binom{n+m-1}{m}$$

**Άσκηση 2.** *Με πόσους τρόπους μπορούν να χωρισθούν 20 φοιτητές σε 3 ομάδες των 10, 6 και 4 ατόμων αντίστοιχα.*

*Λύση.* Υπάρχουν $\binom{20}{10}$ τρόποι για να επιλέξουμε τους φοιτητές της ομάδας των 10 ατόμων. Στην συνέχεια, υπάρχουν $\binom{20-10}{6} = \binom{10}{6}$ τρόποι για να επιλέξουμε τους φοιτητές της ομάδας των 6 ατόμων. Και $\binom{10-6}{4} = \binom{4}{4} = 1$ τρόπος για να επιλέξουμε τους φοιτητές της ομάδας των 4 ατόμων.

Άρα, από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $\binom{20}{10} \cdot \binom{10}{6} \cdot \binom{4}{4}$ τρόποι να χωρισθούν οι 20 φοιτητές σ αυτές τις 3 ομάδες. □

**Άσκηση 3.** *Με πόσους τρόπους ένα τριμελές συμβούλιο μπορεί να σχηματισθεί από 4 αντρόγυνα*

1. *αν όλοι είναι εξίσου εκλέξιμοι,*
2. *αν το συμβούλιο πρέπει να περιλαμβάνει δύο γυναίκες και έναν άντρα,*
3. *αν και οι δύο σύζυγοι δεν μπορούν να παρευρίσκονται στο συμβούλιο.*

*Λύση.* *i*) Υπάρχουν συνολικά $n = 8$ άτομα, επομένως τα 3 μέλη επιλέγονται με $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ τρόπους

*ii*) Επιλέγονται 2 από τις 4 γυναίκες με $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ τρόπους και ένας από τους 4 άντρες με $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ τρόπους, οπότε συνολικά υπάρχουν $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4!}{2!2!}4 = 24$ τρόποι σχηματισμού του συμβουλίου.

*iii*) Αρχικά επιλέγουμε 3 από τα 4 ζευγάρια με $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4$ τρόπους και στη συνέχεια ένα άτομο από κάθε επιλεγμένο ζευγάρι. Για κάθε ένα από τα 3 ζευγάρια υπάρχουν 2 τρόποι να επιλέξουμε το άτομο που θα συμπεριληφθεί στο συμβούλιο, οπότε υπάρχουν $2^3$ επιλογές των 3 ατόμων. Συνολικά προκύπτουν $4 \cdot 2^3 = 32$ τρόποι. □

**Άσκηση 4.** *Από 21 καθηγητές εκ των οποίων 8 είναι μαθηματικοί, 6 φυσικοί και 7 χημικοί θέλουμε να σχηματίσουμε μια επιτροπή από 5 καθηγητές στους οποίους τουλάχιστον ένας πρέπει να είναι φυσικός για να πάρουν μέρος σε ένα συνέδριο. Πόσες επιτροπές μπορούν να σχηματισθούν.*

*Λύση.* 8Μ, 6Φ, 7Χ, $n = 8 + 7 + 6 = 21$. (**1ος τρόπος**) Διακρίνουμε περιπτώσεις για τον αριθμό των φυσικών που συμμετέχουν στην επιτροπή:

- 1 φυσικός.

  Υπάρχουν $\binom{6}{1}$ τρόποι για να επιλέξουμε τον 1 φυσικό και $\binom{15}{4}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα υπόλοιπα μέλη. Άρα, $\binom{6}{1} \cdot \binom{15}{4}$ τρόποι.

- 2 φυσικοί.

  Υπάρχουν $\binom{6}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε τους 2 φυσικούς και $\binom{15}{3}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα υπόλοιπα μέλη. Άρα, $\binom{6}{2} \cdot \binom{15}{3}$ τρόποι.

- 3 φυσικοί

  Υπάρχουν $\binom{6}{3}$ τρόποι για να επιλέξουμε τους 3 φυσικούς και $\binom{15}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα υπόλοιπα μέλη. Άρα, $\binom{6}{3} \cdot \binom{15}{2}$ τρόποι.

- 4 φυσικοί

  Υπάρχουν $\binom{6}{4}$ τρόποι για να επιλέξουμε τους 4 φυσικούς και $\binom{15}{1}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα υπόλοιπα μέλη. Άρα, $\binom{6}{4} \cdot \binom{15}{1}$ τρόποι.

- 5 φυσικοί

  Υπάρχουν $\binom{6}{5}$ τρόποι για να επιλέξουμε τους 5 φυσικούς και $\binom{15}{0} = 1$ τρόποι για να επιλέξουμε τα υπόλοιπα μέλη. Άρα, $\binom{6}{5} \cdot \binom{15}{0}$ τρόποι.

Συνολικά, υπάρχουν $\binom{6}{1} \cdot \binom{15}{4} + \binom{6}{2} \cdot \binom{15}{3} + \binom{6}{3} \cdot \binom{15}{2} + \binom{6}{4} \cdot \binom{15}{1} + \binom{6}{5} \cdot \binom{15}{0}$ τρόποι σχηματισμού της επιτροπής.

(**2ος τρόπος**) Το πλήθος των επιτροπών χωρίς περιορισμό είναι ίσο με $\begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Το πλήθος των επιτροπών χωρίς φυσικό είναι ίσο με $\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι $\begin{pmatrix} 21 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$. □

**Αριθμός μεταθέσεων $k$ ειδών στοιχείων με $n_1, n_2, \ldots, n_k$ στοιχεία αντίστοιχα.**

$$M(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

όπου $n = n_1 + n_2 \cdots n_k$.

**Άσκηση 5**. *Πόσες είναι οι μεταθέσεις των γραμμάτων της λέξης*
*Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Υ Π Ο Λ Ι Σ*

*Λύση.* Ας συμβολίσουμε με $W$ την τυχαία λέξη και με $|W|_x$ το πλήθος των εμφανίσεων του γράμματος $x$ στην $W$. Το μήκος της $W$ είναι $n = 18$. Το ζητούμενο πλήθος είναι

$$\frac{n!}{|W|_\Pi!|W|_A!|W|_N!|W|_E!|W|_I!|W|_\Sigma!|W|_T!|W|_H!|W|_M!|W|_O!|W|_Y!|W|_\Lambda!} = \frac{18!}{3!1!1!1!3!2!1!1!2!1!1!}$$

□

**Άσκηση 6**. *Πόσες λέξεις μπορούν να κατασκευασθούν χρησιμοποιώντας όλα τα γράμματα της λέξης Ε Φ Α Ρ Μ Ο Γ Η και πόσες από αυτές έχουν τα γράμματα Α και Ρ διαδοχικά.*

*Λύση.* Όπως σε προηγούμενη άσκηση, προκύπτουν $\frac{8!}{1!1!1!1!1!1!1!1!} = 8!$ τρόποι.

Αν τα Α, Ρ πρέπει να είναι διαδοχικά, τότε θεωρούνται ως ένα γράμμα και προκύπτουν 7!2 τρόποι. Ο συντελεστής 2 προκύπτει επειδή επιλέγουμε αν εμφανίζεται πρώτο το Α ή το Ρ. □

**Άσκηση 7**. *Κατά πόσους τρόπους 4 λευκές 5 κίτρινες και 9 μαύρες μπάλες μπορούν να διαταχθούν:*

1. *Χωρίς περιορισμό.*
2. *Αν κάθε διάταξη τους αρχίζει με λευκή και τελειώνει με μαύρη μπάλα.*

*Λύση.* $i$) Χωρίς περιορισμό, έχουμε $\frac{18!}{4!5!9!}$.

$ii$) Αφού συμπληρωθούν η πρώτη και τελευταία θέση (με έναν τρόπο), απομένουν 16 μπάλες οι οποίες έχουν $\frac{16!}{3!5!8!}$ τρόποι για να διαταχθούν. □

**Ακέραιες Λύσεις Γραμμικής Εξίσωσης**

Ο αριθμός των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων $x_i$, $i \in [n]$ της γραμμικής εξίσωσης

$$x_1 + x_2 \cdots + x_n = m \tag{1}$$

όπου $m, n \in \mathbb{N}^*$ είναι ίσος με $\left[ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right] = \binom{n+m-1}{m}$.

**Άσκηση 8**. *Πέντε άτομα μπαίνουν σε ασανσέρ στο ισόγειο ενός κτιρίου με 4 ορόφους. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν στους ορόφους αν μας ενδιαφέρει μόνο ο αριθμός των ατόμων που βγήκαν σε κάθε όροφο;*

*Λύση.* (**1ος τρόπος**) Κατανέμουμε τους 4 ορόφους στα 5 άτομα, επαναληπτικά, με

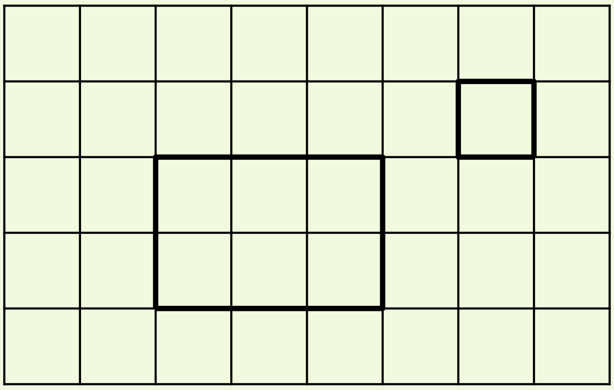
$$\left[ \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} \right] = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5}$$

(**2ος τρόπος**) Κάθε κατανομή των 5 ατόμων στους 4 ορόφους αντιστοιχεί σε μη αρνητική ακέραια λύση της εξίσωσης

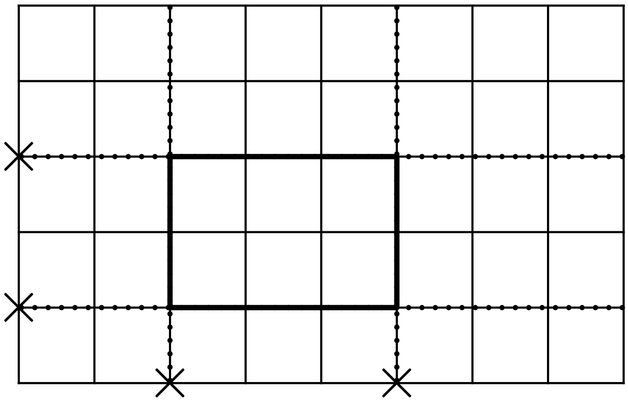
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

όπου $x_i$ είναι ο αριθμός των ατόμων που βγαίνουν στον όροφο $i$, $i \in [4]$. Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με πλήθος των λύσεων της εξίσωσης, δηλαδή με $\left[ \begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix} \right] = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5}$. □

**Άσκηση 9.** *(*) Να βρεθεί ο αριθμός των ορθογωνίων με κορυφές τα σημεία και πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα μιας $n \times m$ σκακιέρας.*



*Λύση.* Κάθε ορθογώνιο προσδιορίζεται μονοσήμαντα επιλέγοντας 2 σημεία στην κάτω πλευρά της σκακιέρας και 2 σημεία στην αριστερή πλευρά της σκακιέρας.



Υπάρχουν $\binom{m+1}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε 2 σημεία στη κάτω πλευρά.
Υπάρχουν $\binom{n+1}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε 2 σημεία στην αριστερή πλευρά.
Από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $\binom{m+1}{2}\binom{n+1}{2}$ επιλογές. □

Έστω $a, b \in \mathbb{N}^*$ με $a = \pi b + \upsilon$, όπου $0 \leqslant \upsilon < b$. Τότε ισχύει ότι

$$\text{ΜΚΔ}(a, b) = \text{ΜΚΔ}(b, \upsilon).$$

Επιπλέον, αν $\upsilon = 0$, τότε $\text{ΜΔΚ}(a, b) = b$.

**Άσκηση 10.** *Να βρεθεί ο ΜΚΔ των 12075 και 4655.*

*Λύση.* Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 12075 &= 2 \cdot 4655 + 2765 \\ 4655 &= 1 \cdot 2765 + 1890 \\ 2765 &= 1 \cdot 1890 + 875 \\ 1890 &= 2 \cdot 875 + 140 \\ 875 &= 6 \cdot 140 + 35 \\ 140 &= 4 \cdot 35 + 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\text{ΜΚΔ}(12075, 4655) = 35$. □

Έστω $n$ ένας σταθερός φυσικός αριθμός. Οι ακέραιοι $a, b$ καλούνται **ισότιμοι** (**modulo** $n$), ή **ισότιμοι κατά μέτρο** $n$, ή **ισοϋπόλοιποι modulo** $n$ και γράφουμε $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \pmod{\mathbf{n}}$ αν και μόνο αν η διαφορά $a - b$ διαιρείται από τον $n$, δηλαδή

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid (a - b).$$

Αν $n \nmid (a - b)$, γράφουμε $a \not\equiv b \pmod{n}$ και λέμε ότι ο $a$ είναι **ανισότιμος προς τον** $b$ **modulo** $n$.

**Άσκηση 11.** *Για ποιους φυσικούς αριθμούς $m$ ισχύουν οι ισοδυναμίες*

*i)* $35 \equiv 2 \pmod{m}$.

*ii)* $1000 \equiv 1 \pmod{m}$.

*iii)* $347 \equiv 0 \pmod{m}$.

*Λύση.* i) $35 \equiv 2 \pmod{m} \Leftrightarrow m | 35 - 2 \Leftrightarrow m | 33$. Οπότε τα ζητούμενα $m$ είναι οι θετικοί διαιρέτες του 33 δηλαδή τα 1, 3, 11 και 33.

ii) Ομοίως, $m | 347 - 0$. Επειδή 347 είναι πρώτος έπεται ότι $m = 1, 347$.

iii) Ομοίως, $m | 1000 - 1 = 999 = 3^3 \cdot 37$. Οπότε τα ζητούμενα $m$ είναι οι αριθμοί 1, 3, $3^2$, $3^3$, 37, $3 \cdot 37$, $3^2 \cdot 37$, $3^3 \cdot 37 = 999$. □

Έστω $\phi(n)$ το πλήθος των αριθμών $m$ που είναι μικρότεροι ή ίσοι από το $n$ και ισχύει ότι $\mathrm{GCD}(n, m) = 1$, δηλαδή τα $n$ και $m$ είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους.

Έστω $n$ ένας φυσικός αριθμός με κανονική παραγοντοποίηση

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

όπου $p_1, p_2, \ldots, p_k$ είναι πρώτοι αριθμοί και $a_1, a_2, \ldots, a_k$ είναι φυσικοί αριθμοί. Τότε

$$\phi(n) = \phi(p_1^{a_1})\phi(p_2^{a_2}) \cdots \phi(p_k^{a_k}) = (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1})(p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}) \cdots (p_k^{a_k} - p_k^{a_k-1}).$$

**Άσκηση 12**. *Να βρεθεί η τιμή της συνάρτησης $\phi$ για τους φυσικούς αριθμούς*

*i)* $31, 125, 55, 124, 650, 7!, 10!, \binom{10}{6}$.

*ii)* $2^m, 30^m, 20^{10m}, 2^m 3^n, 10^m 20^n$, *όπου* $m, n \in \mathbb{N}^*$.

*Λύση.* i)

$\phi(31) = 31^1 - 30^0 = 30$. (Ο 31 είναι πρώτος αριθμός)

$\phi(125) = \phi(5^3) = 5^3 - 5^2 = 100$.

$\phi(55) = \phi(5 \cdot 11) = (5^1 - 5^0)(11^1 - 11^0) = 40$.

$\phi(7!) = \phi(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7) = \phi(2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7) = \phi(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) = (2^4 - 2^3) \cdot (3^2 - 3^1) \cdot (5^1 - 5^0) \cdot (7^1 - 7^0) = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 = 192$.

ii)

$\phi(30^m) = \phi((2 \cdot 3 \cdot 5)^m) = \phi(2^m \cdot 3^m \cdot 5^m) = (2^m - 2^{m-1})(3^m - 3^{m-1})(5^m - 5^{m-1})$.

$\phi(10^m \cdot 20^n) = \phi(2^m \cdot 5^m \cdot (2^2)^n \cdot 5^n) = \phi(2^{m+2n} 5^{m+n}) = (2^{m+2n} - 2^{m+2n-1})(5^{m+n} - 5^{m+n-1})$. □

Αν $n$ είναι ένας σταθερός φυσικός αριθμός και $a,b,c,d$ ακέραιοι, ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν $a \equiv b \pmod{n}$ και $c \equiv d \pmod{n}$, τότε
$$a+c \equiv b+d \pmod{n} \text{ και } a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}.$$

2. Αν $a \equiv b \pmod{n}$, τότε
$$a+c \equiv b+c \pmod{n} \text{ και } a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{n}.$$

3. Αν $a \equiv b \pmod{n}$, τότε
$$a^k \equiv b^k \pmod{n} \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

4. Αν $p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_k x^k$ είναι ένα πολυωνύμο με ακέραιους συντελεστές και $a \equiv b \pmod{n}$, τότε
$$p(a) \equiv p(b) \pmod{n}.$$

**Θεώρημα Euler.** Αν $a, m$ είναι φυσικοί αριθμοί και ΜΚΔ$(a,m) = 1$, τότε ισχύει ότι
$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

**Άσκηση 13.** *Να βρεθεί ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που ικανοποιεί τις εξισώσεις*

*i)* $x \equiv 2^{304} \pmod{7}$. *iv)* $x \equiv 20^{640} \pmod{17}$. *vii)* $x \equiv 13^{802} \pmod{55}$.

*ii)* $x \equiv 15^{101} \pmod{8}$. *v)* $x \equiv 20^{323} \pmod{17}$. *viii)* $x \equiv 18^{51} \pmod{30}$.

*iii)* $x \equiv 15^{2011} \pmod{3}$. *vi)* $x \equiv 11^{481} \pmod{45}$. *ix)* $x \equiv 31^{30} \pmod{100}$.

*Λύση.* i) Επειδή ΜΚΔ$(7,2) = 1$ και $\phi(7) = 6$ έπεται ότι $2^6 \equiv 1 \pmod{7}$. Επομένως,
$$x \equiv 2^{304} \equiv 2^{6\cdot 50+4} \equiv (2^6)^{50} 2^4 \equiv 1^{50} \cdot 16 \equiv 2 \pmod{7}.$$
Άρα, $x = 2$.

v) Επειδή ΜΚΔ$(20,17) = 1$ και $\phi(17) = 16$ έπεται ότι $20^{16} \equiv 1 \pmod{17}$. Επιπλέον, $20 \equiv 3 \pmod{17}$. Επομένως,
$$x \equiv 20^{323} \equiv 3^{323} \equiv 3^{16\cdot 20+3} \equiv (3^{16})^{20} 3^3 \equiv 1^{20} \cdot 27 \equiv 10 \pmod{17}.$$
Άρα, $x = 10$.

viii) Επειδή ΜΚΔ$(18, 30) = 6 \neq 1$. Δεν μπορεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα του Euler. Πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις γενικές ιδιότητες των ισοτιμιών.

$$x \equiv 18^{51} \equiv (18)^{2\cdot 25+1} \equiv 324^{25} \cdot 18 \pmod{30}.$$

Όμως $324 = 10 \cdot 30 + 24$, οπότε $324 \equiv 24 \pmod{30}$. Άρα,

$$x \equiv 18^{51} \equiv 24^{25} \cdot 18 \equiv 24^{2\cdot 12+1} \cdot 18 \equiv 576^{12} \cdot 24 \cdot 18 \pmod{30}$$

Όμως $576 = 19 \cdot 30 + 6$ οπότε $576 \equiv 6 \pmod{30}$. Άρα,

$$x \equiv 576^{12} \cdot 24 \cdot 18 \equiv 6^{12} \cdot 24 \cdot 18 \equiv (6^2)^6 \cdot 432 \equiv 36^6 \cdot 432 \pmod{30}.$$

Όμως, $432 = 14 \cdot 30 + 12$ και $36 = 1 \cdot 30 + 6$ οπότε $432 \equiv 12 \pmod{30}$ και $36 \equiv 6 \pmod{30}$. Άρα,

$$\begin{aligned} x &\equiv 36^6 \cdot 432 \equiv 6^6 \cdot 12 \equiv 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 12 \equiv 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \equiv 36 \cdot 36 \cdot 2 \\ &\equiv 6 \cdot 6 \cdot 2 \equiv 36 \cdot 2 \equiv 6 \cdot 2 \equiv 12 \pmod{30}. \end{aligned}$$

Άρα, $x = 12$.

ix) Επειδή ΜΚΔ$(100, 31) = 1$ και $\phi(100) = 40$ έπεται ότι $31^{40} \equiv 1 \pmod{100}$

Στην περίπτωση μας ο εκθέτης του 31 είναι 30 που είναι μικρότερος του 40 οπότε δεν μπορούμε να αξιοποιήσουμε το θεώρημα του Euler. Πρέπει να αρκεστούμε στις γενικές ιδιότητες των ισοτιμιών.

$$x \equiv 31^{30} \equiv (31^2)^{15} \equiv 961^{15} \pmod{100}.$$

Όμως, $961 \equiv 61 \pmod{100}$ οπότε

$$x \equiv 961^{15} \equiv 61^{15} \equiv 61 \cdot (61^2)^7 \equiv 61 \cdot (3721)^7 \pmod{100}$$

Όμως, $3721 \equiv 21 \pmod{100}$ οπότε

$$x \equiv 61 \cdot (3721)^7 \equiv 61 \cdot 21^7 \equiv 61 \cdot 21 \cdot (21^2)^3 \equiv 1281 \cdot 441^3 \pmod{100}$$

Όμως, $1281 \equiv 81 \pmod{100}$ και $441 \equiv 41 \pmod{100}$ οπότε

$$x \equiv 1281 \cdot 441^3 \equiv 81 \cdot 41^3 \equiv 81 \cdot 41 \cdot 41^2 \equiv 3321 \cdot 1681 \equiv 21 \cdot 81 \equiv 1701 \equiv 1 \pmod{100}.$$

Άρα $x = 1$. □

**Άσκηση 14.** *Να δειχθεί ότι ο 13 διαιρεί τον $2^{70} + 3^{70}$.*

*Λύση.* Αρκεί να δειχθεί ότι $2^{70} + 3^{30} \equiv 0 \pmod{13}$. Επειδή ΜΚΔ$(13, 2) =$ ΜΚΔ$(13, 3) = 1$ και $\phi(13) = 12$ έπεται ότι $2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ και $3^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Επομένως,

$$2^{70} + 3^{70} \equiv 2^{5\cdot 12\cdot 10} + 3^{5\cdot 12+10} \equiv (2^{12})^5 \cdot 2^{10} + (3^{12})^5 \cdot 3^{10} \equiv 2^{10} + 3^{10} \equiv 4^5 + 9^5 \pmod{13}$$

Όμως $4^5 = 4 \cdot 4^4 = 4 \cdot 16^2$ και $9^5 = 9 \cdot 9^4 = 9 \cdot 81^2$. Επιπλέον, $16 \equiv 3 \pmod{13}$ και $81 \equiv 3 \pmod{13}$. Επομένως,

$$4^5 + 9^5 \equiv 4 \cdot 16^2 + 9 \cdot 81^2 \equiv 4 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3^2 \equiv 13 \cdot 9 \equiv 0 \pmod{13}$$ □

**Άσκηση 15.** *Να δειχθεί ότι ο $11 \cdot 31$ διαιρεί τον $20^{15} - 1$.*

*Λύση.* Επειδή οι αριθμοί 11 και 31 είναι πρώτοι αριθμοί πρέπει να δειχθεί ότι $11|20^{15} - 1$ και $31|20^{15} - 1$. Ισοδύναμα, $20^{15} \equiv 1 \pmod{11}$ και $20^{15} \equiv 1 \pmod{31}$

Επειδή $\text{ΜΚΔ}(11, 20) = \text{ΜΚΔ}(31, 20) = 1$ και $\phi(11) = 10$, $\phi(31) = 30$ έπεται ότι $20^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, $20^{30} \equiv 1 \pmod{31}$.

Επομένως, για το 11 έχουμε ότι:

$$20^{15} \equiv 20^{10} \cdot 20^5 \equiv 1^{10} \cdot 20^5 \equiv 20^2 \cdot 20^2 \cdot 2 \equiv 400 \cdot 400 \cdot 20 \pmod{11}.$$

Όμως, $20 \equiv 9 \pmod{11}$ και $400 = 36 \cdot 11 + 4$ οπότε $400 \equiv 4 \pmod{11}$. Άρα,

$$400 \cdot 400 \cdot 20 \equiv 4 \cdot 4 \cdot 9 \equiv 16 \cdot 9 \equiv 5 \cdot 9 \equiv 45 \equiv 1 \pmod{11}$$

Επίσης, για το 31 έχουμε ότι:

$$20^{15} \equiv (20^2)^7 \cdot 20 \equiv 400^7 \cdot 20 \pmod{31}$$

Όμως, $400 = 12 \cdot 31 + 28$ οπότε $400 \equiv 28 \equiv -3 \pmod{31}$. Άρα,

$$400^7 \cdot 20 = (-3)^7 \cdot 20 = (-1)^7 \cdot 3^7 \cdot 20 \equiv (-1) \cdot 3^7 \cdot (-11) \equiv 11 \cdot 3^7 \mod 31$$

Όμως $3^7 = 3^4 \cdot 3^3 = 81 \cdot 3 \cdot 9$ και $81 = 3 \cdot 31 + 19$ οπότε $81 \equiv 19 \pmod{31}$. Άρα,

$$11 \cdot 3^7 \equiv 11 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 9 \equiv 99 \cdot 57 \pmod{31}$$

Όμως $99 = 3 \cdot 31 + 6$ και $57 = 1 \cdot 31 + 26$ οπότε $99 \equiv 6 \mod 31$ και $57 \equiv 26 \pmod{31}$. Άρα,

$$99 \cdot 57 \equiv 6 \cdot 26 \equiv 156 \equiv 1 \pmod{31}$$

αφού $156 = 5 \cdot 31 + 1$.

Επομένως, οι αριθμοί 11 και 31 διαιρούν τον $20^{15} - 1$. □