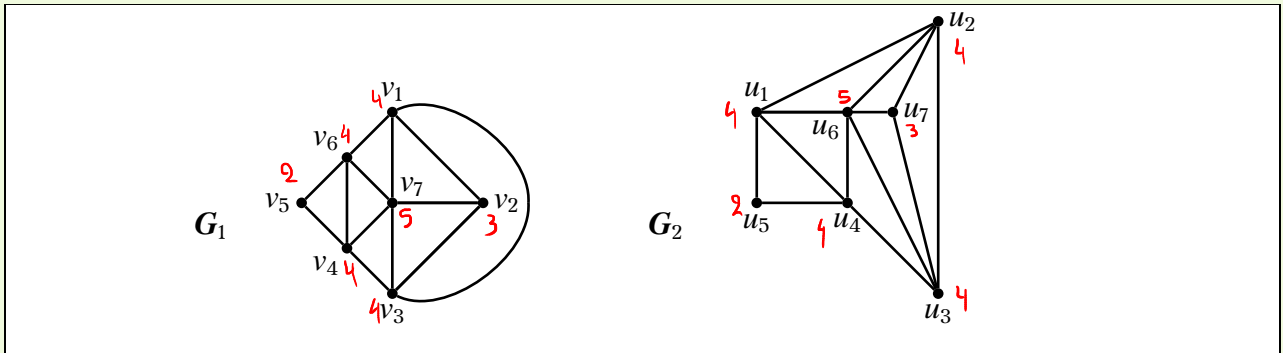


Άσκηση 1. Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα τα παρακάτω ζεύγη γραφημάτων.

(i)



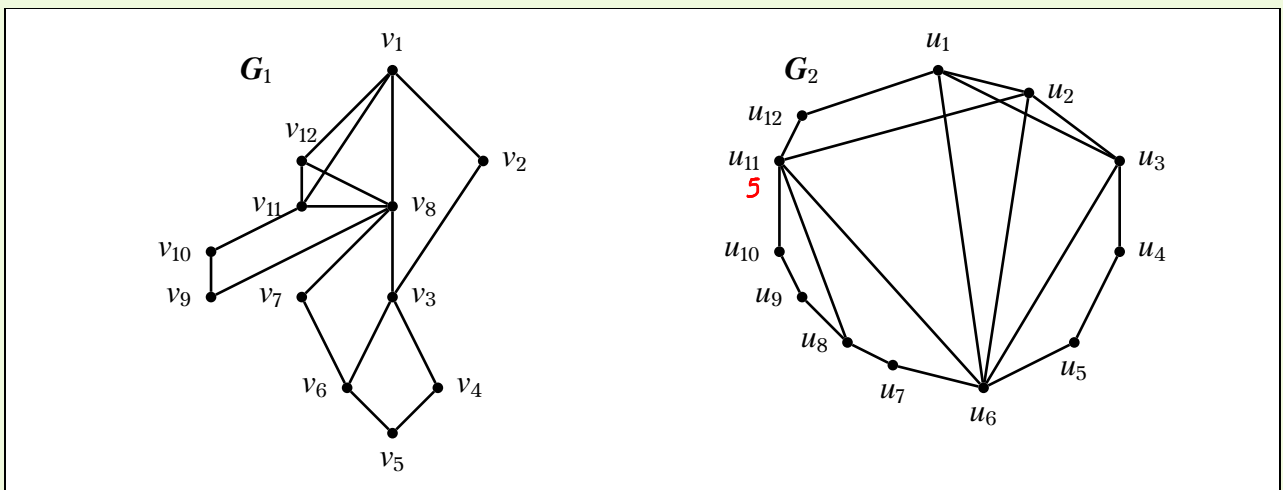
Λύση. Τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα. Ένας ισομορφισμός f είναι ο εξής:

- $f(v_1) = u_2$
- $f(v_2) = u_7$
- $f(v_3) = u_3$
- $f(v_4) = u_4$
- $f(v_5) = u_5$
- $f(v_6) = u_1$
- $f(v_7) = u_6$

$$\{v, u\} \in E(G_1) \Rightarrow \{f(v), f(u)\} \in E(G_2)$$

□

(ii)



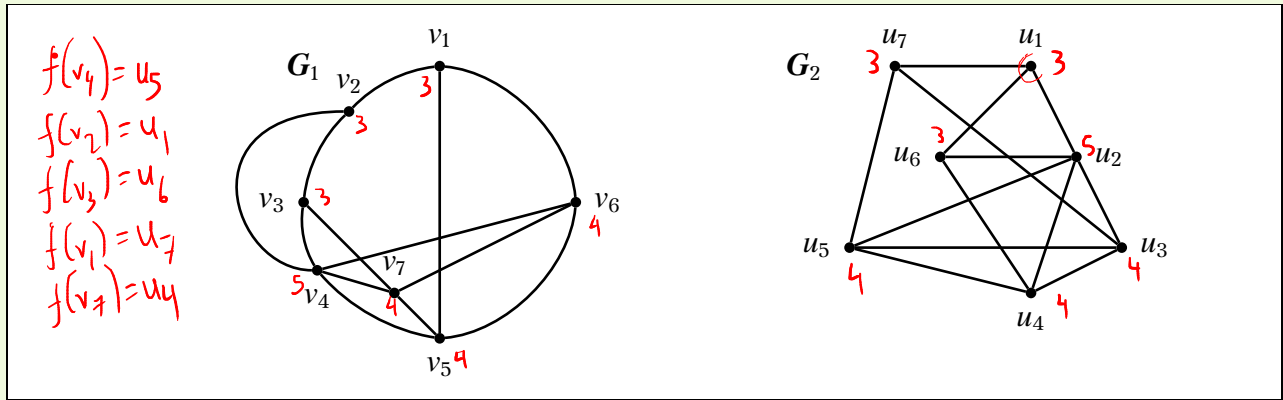
Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι έχουν διαφορετικές ακολουθίες βαθμών.

Ακολουθία βαθμών του G_1 : (6, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2).

Ακολουθία βαθμών του G_2 : (6, 5, 4, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2).

□

(iii)



Λύση. Τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα. Ένας ισομορφισμός f είναι ο εξής:

$$f(v_1) = u_7$$

$$f(v_2) = u_1$$

$$f(v_3) = u_6$$

$$f(v_4) = u_2$$

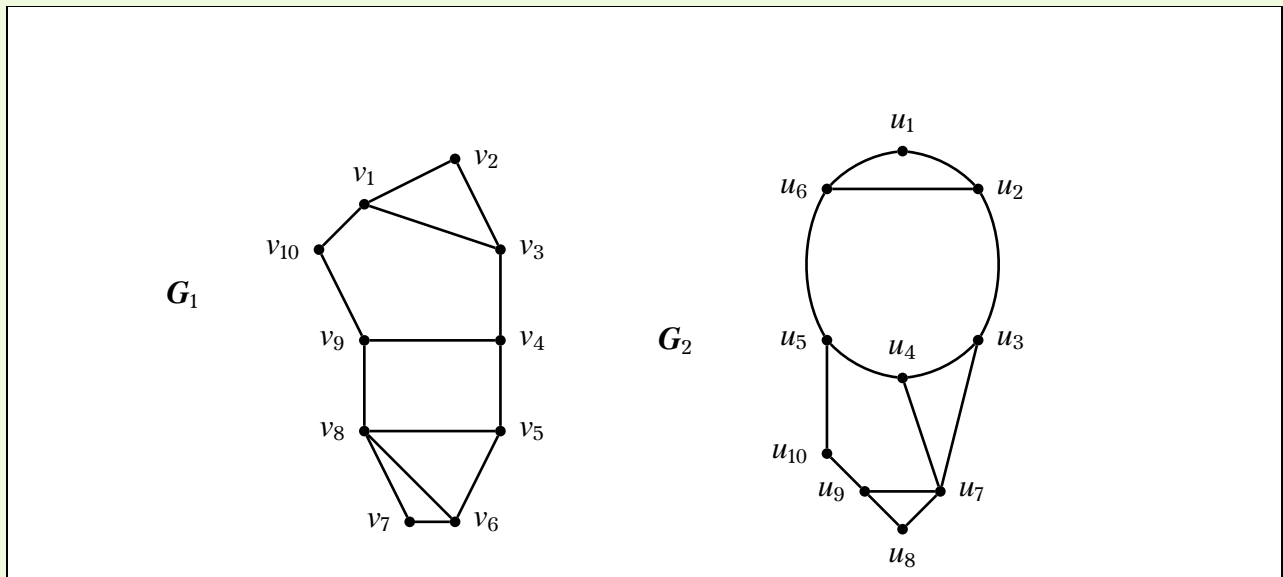
$$f(v_5) = u_5$$

$$f(v_6) = u_3$$

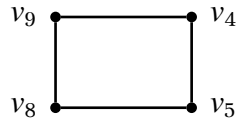
$$f(v_7) = u_4$$

□

(iv)

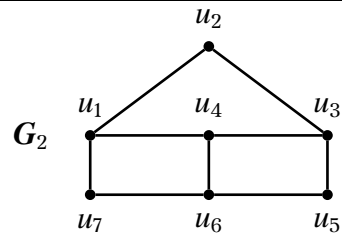
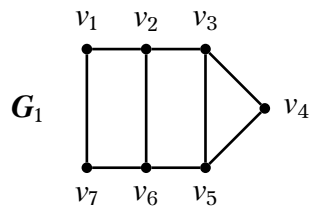


Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι το G_2 δεν περιέχει υπογράφημα ισόμορφο με το παρακάτω υπογράφημα του G_1 :



□

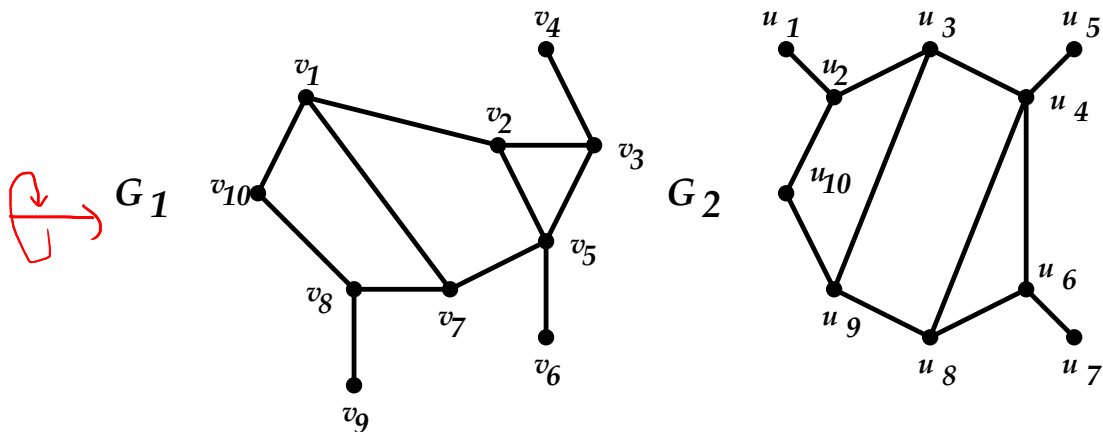
(v)



Λύση. Δεν είναι ισόμορφα: Το G_1 περιέχει το K_3 ενώ το G_2 όχι.

□

(vi)

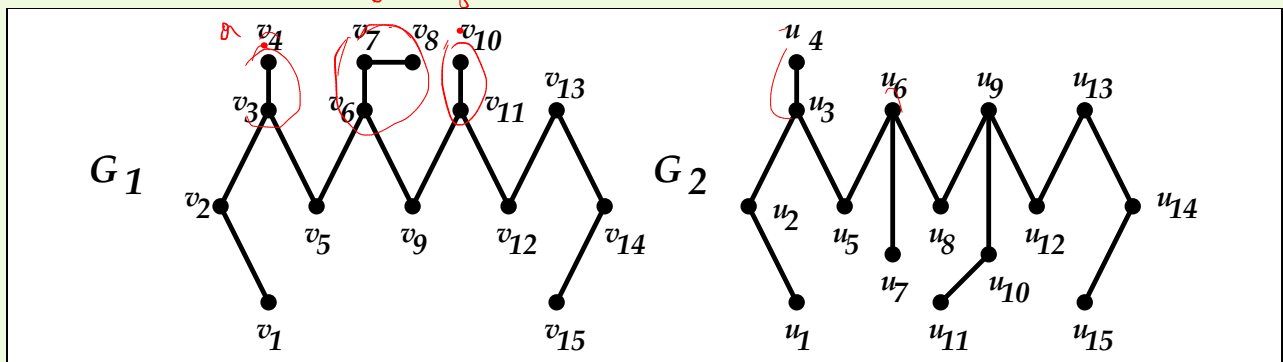


Λύση. Τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα. Ένας ισομορφισμός f είναι ο εξής:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= u_9 \\ f(v_2) &= u_8 \\ f(v_3) &= u_6 \\ f(v_4) &= u_7 \\ f(v_5) &= u_4 \\ f(v_6) &= u_5 \\ f(v_7) &= u_3 \\ f(v_8) &= u_2 \\ f(v_9) &= u_1 \\ f(v_{10}) &= u_{10} \end{aligned}$$

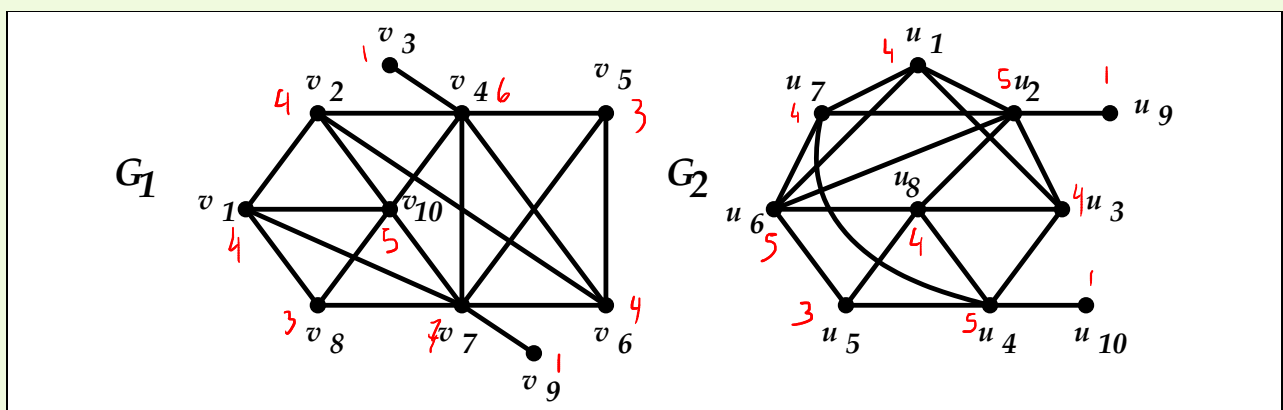
□

(vii)



Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι στο G_2 υπάρχουν κορυφές βαθμού 1 που απέχουν απόσταση 4 (οι u_4 και u_7) ενώ στο G_1 όχι. □

(viii)



Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι στο G_2 υπάρχει κορυφή βαθμού 1 η οποία συνδέεται με κορυφή βαθμού 5, ενώ στο G_1 δεν υπάρχουν τέτοιες κορυφές. □

Άσκηση 2. Να εξετασθεί αν υπάρχουν γραφήματα δεσμών με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών.

$$\sum_v \deg(v) = 2|E|$$

(i) (4, 4, 3, 3, 1).

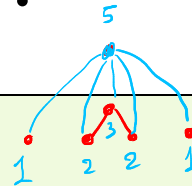
Λύση. Δεν υπάρχει διότι το άθροισμα των όρων της ακολουθίας είναι περιττός αριθμός. □

(ii) (5, 4, 3, 2, 1).

Λύση. Δεν υπάρχει διότι το άθροισμα των όρων της ακολουθίας είναι περιττός αριθμός. (Επίσης, προφανώς, σε ένα γράφημα με 5 κορυφές ο μέγιστος δυνατός βαθμός είναι 4.) □

(iii) (1, 1, 1, 1, 1).

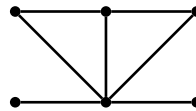
Λύση. Υπάρχει. Είναι το γράφημα:



(iv) (5, 3, 2, 2, 1, 1).

$$\rightarrow (2, 1, 1, 0, 0)$$

Λύση. Υπάρχει. Είναι το γράφημα:



(v) (5, 3, 3, 3, 2).

Λύση. Δεν υπάρχει διότι σε ένα γράφημα με 5 κορυφές ο μέγιστος δυνατός βαθμός είναι 4. □

(vi) (4, 4, 3, 3, 2, 2, 1).

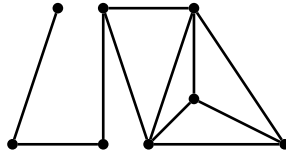
Λύση. Δεν υπάρχει διότι το άθροισμα των όρων της ακολουθίας είναι περιττός αριθμός. □

(vii) (4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1).

$$\rightarrow (3, 2, 2, 2, 2, 2, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 2, 2, 1)$$



Λύση. Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:



□

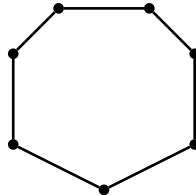
(viii) (6, 4, 3, 3, 2, 2).

Λύση. Δεν υπάρχει διότι σε ένα γράφημα με 6 κορυφές ο μέγιστος δυνατός βαθμός είναι 5.

□

(ix) (2, 2, 2, 2, 2, 2).

Λύση. Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:



□

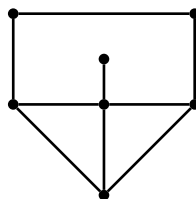
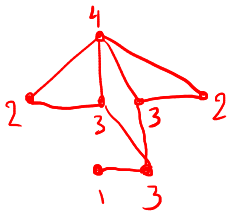
(x) (3, 3, 3, 3, 3, 3).

Λύση. Δεν υπάρχει διότι το άθροισμα των όρων της ακολουθίας είναι περιττός αριθμός.

□

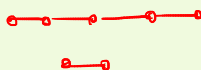
(xi) (4, 3, 3, 3, 2, 2, 1).

Λύση. Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:

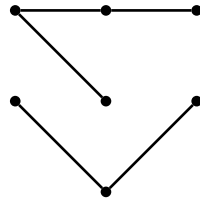


□

(xii) (2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)



Λύση. Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:



□