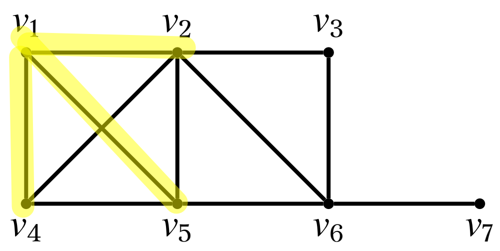
**Ασκήσεις για την 1η απαλλακτική πρόοδο**
**Διαλέξεις 4,5**

**Άσκηση 1** (Μήτρα και απεικόνιση γραφήματος).
*Δίδεται το γράφημα*




*Να γραφεί i) η μήτρα του και ii) η απεικόνισή του.*

*Λύση:*

*i)*

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}$$

*ii)* $\Gamma(v_1) = \{v_2, v_4, v_5\}$,

$\Gamma(v_2) = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,

$\Gamma(v_3) = \{v_2, v_6\}$

$\Gamma(v_4) = \{v_1, v_2, v_5\}$,

$\Gamma(v_5) = \{v_1, v_2, v_4, v_6\}$,

$\Gamma(v_6) = \{v_2, v_3, v_5, v_7\}$,

$\Gamma(v_7) = \{v_6\}$.

Υπενθυμιση: Βαθμος κορυφης $d(v)$ = # των γειτονων της
= # δεσμων τους οποιους ειναι ακρο η $v$

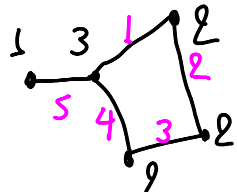


**Άσκηση 2** (Λήμμα της χειραψίας).

*i) Να βρεθεί ο αριθμός των δεσμών του $K_n$ (πλήρες γράφημα με $n$ κορυφές).*

*Λύση.* Το $K_n$ περιέχει $n$ κορυφές και ο βαθμός κάθε κορυφής του $K_n$ ισούται με $n-1$. Από τον τύπο

$$\boxed{2|E| = \sum_{v \in V} d(v)}$$




$1+3+2+2+2=10=2\cdot 5$ # δεσμων του G

προκύπτει ότι

$$2|E(K_n)| = \sum_{i=1}^{n}(n-1) = n(n-1) \Leftrightarrow |E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$2|E(K_n)| = \underbrace{(n-1)+(n-1)+\dots+(n-1)}_{n \text{ κορυφες}} = n(n-1)$$

□

*ii) Έστω $G = (V, E)$ ένα $d$-κανονικό γράφημα με $|V| = n$. Να βρεθεί το $|E|$.*

$d$-κανονικο ≡ όλες οι κορυφες εχουν βαθμο $d$

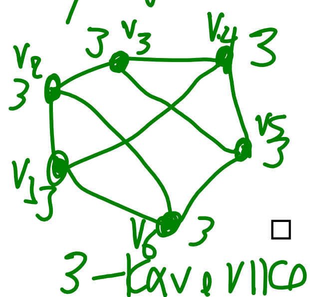
*Λύση.* Από τον τύπο

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$$

προκύπτει ότι

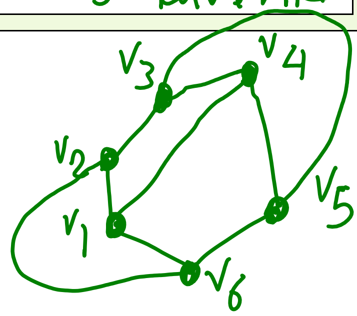
$$2|E| = \sum_{i=1}^{n} d = nd \Leftrightarrow |E| = \frac{dn}{2}$$

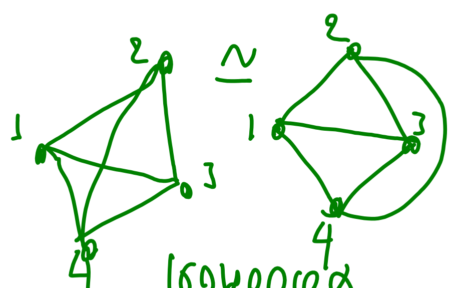
□




$$2|E| = \underbrace{3+3+3+\dots+3}_{n \text{ κορυφες}}$$

$$2|E| = 3n \Leftrightarrow \boxed{|E| = \frac{3n}{2}}$$




Παρατηρησεις

→ ① Σε καθε γραφημα, το αθροισμα ολων των βαθμων ειναι αρτιος αριθμος

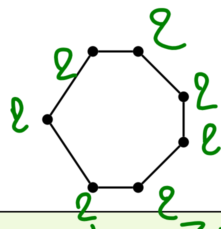
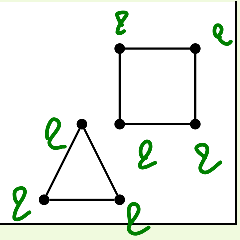
→ ② Σε καθε γραφημα με $n$ κορυφες, ο μεγιστος βαθμος ειναι $n-1$

**Άσκηση 3** (Ακολουθίες βαθμών). *Να εξετασθεί αν υπάρχουν γραφήματα δεσμών με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών.*

*i)* $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

*Δεν υπάρχει γράφημα, αφού το άθροισμα των βαθμών είναι περιττός αριθμός.*

*ii)* $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ C7

*Υπάρχει. Για παράδειγμα το*  *καθώς επίσης και το* 

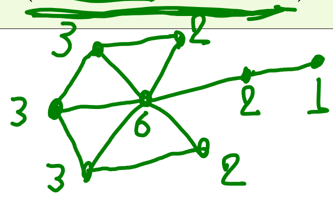
*iii)* $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$ 3+3+3+3+3+3+3 = 21 Περιττος

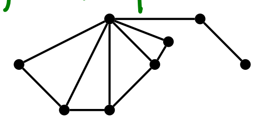
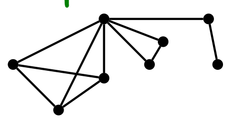
*Δεν υπάρχει, αφού το άθροισμα των βαθμών είναι περιττός αριθμός.*

*iv)* $(7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$ 7 κορυφες ⇒ Μεγιστος βαθμος 6

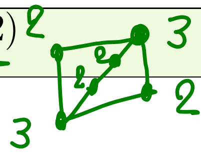
*Δεν υπάρχει, αφού το συνολικό πλήθος κορυφών είναι 7 και άρα (σε απλό γράφημα δεσμών) δεν μπορεί μια κορυφή να έχει βαθμό 7.*

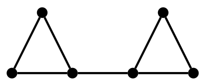
*v)* $(6, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1)$ Δεν μπορουμε να απορριψουμε οτι υπαρχει
Αρα, θα προσπαθησω να το φτιαξω

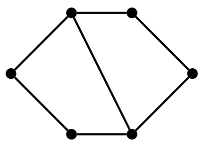
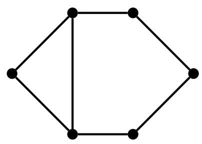


*Υπάρχει. Για παράδειγμα το*  *καθώς επίσης και το* 

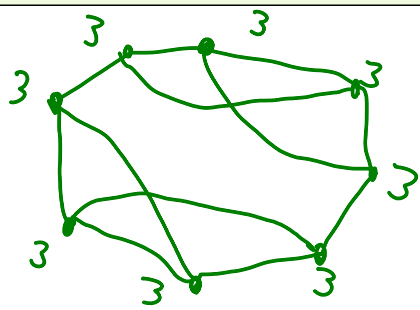
*vi)* $(3, 3, 2, 2, 2, 2)$



*Υπάρχει. Για παράδειγμα το* 

*καθώς επίσης και τα*  

3,3,3,3,3,3,3,3



**Άσκηση 4** (Ακολουθίες βαθμών). *Να εξετασθεί αν υπάρχουν γραφήματα δεσμών με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών.*

*(i)* $(4, 4, 3, 3, 2, 2, 1)$.

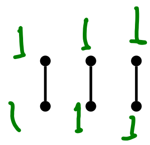
*Λύση.* Δεν υπάρχει διότι το άθροισμα των όρων της ακολουθίας είναι περιττός αριθμός. □

*(ii)* $(5, 3, 2, 2, 2)$.

*Λύση.* Δεν υπάρχει σε ένα γράφημα με 5 κορυφές ο μέγιστος βαθμός είναι το πολύ 4. □

*(iii)* $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

*Λύση.* Υπάρχει. Είναι το γράφημα:



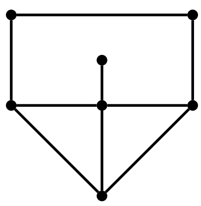

□

*(iv)* $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

*Λύση.* Υπάρχει. Για παράδειγμα ο κύκλος $C_7$ με 7 κορυφές. □

*(v)* $(4, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$.

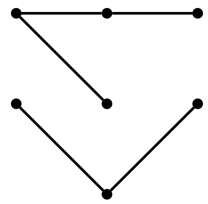
*Λύση.* Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:



□

*(vi)* $(2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$

*Λύση.* Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:



□

Μεθοδολογια για ακολουθια βαθμων

Διδεται μια ακολουθια φυσικων

α) Για να δειξουμε οτι δεν υπαρχει γραφημα με αυτην την ακολουθια βαθμων χρησιμοποιουμε τις παρατηρησεις

Παρατηρησεις

→ 1 Σε καθε γραφημα, το αθροισμα ολων των βαθμων ειναι αρτιος αριθμος

Το πολύ

→ 2 Σε καθε γραφημα με n κορυφες, ο μεγιστος βαθμος ειναι n−1

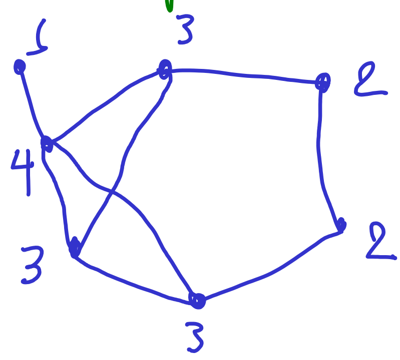
β) Για να δειξουμε οτι υπαρχει γραφημα με αυτην την ακολουθια βαθμων πρεπει (*) να το κατασκευασουμε.

1 2 3 4 5 6

4, 3, 3, 3, 2, 2, 1

7 κορυφες

~~7, 3, 3, 3, 2, 1, 1~~



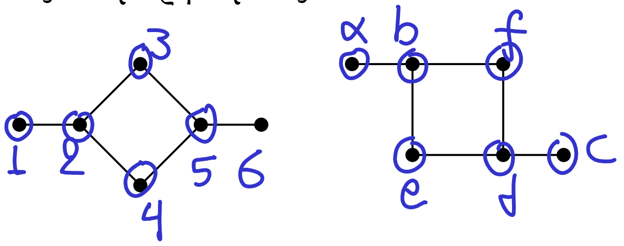
**Παρατηρήσεις στο πρόβλημα του ισομορφισμού:**

Δύο γραφήματα $G_1 = (V_1, E_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2)$ είναι ισόμορφα αν και μόνο αν υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $f : V_1 \to V_2$ ώστε

$$\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2.$$

- Για να αποδείξουμε ότι δυο γραφήματα είναι ισόμορφα υπάρχει μόνο ένας τρόπος. Να κατασκευάσουμε έναν ισομορφισμό μεταξύ των κορυφών τους (δηλαδή μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση που διατηρεί την σχέση γειτνίασης).

  Μπορεί να υπάρχουν πολλοί τέτοιοι ισομορφισμοί (ανάλογα με τις συμμετρίες που έχει ένα γράφημα). Για παράδειγμα, τα παρακάτω γραφήματα έχουν 4 διαφορετικούς ισομορφισμούς.

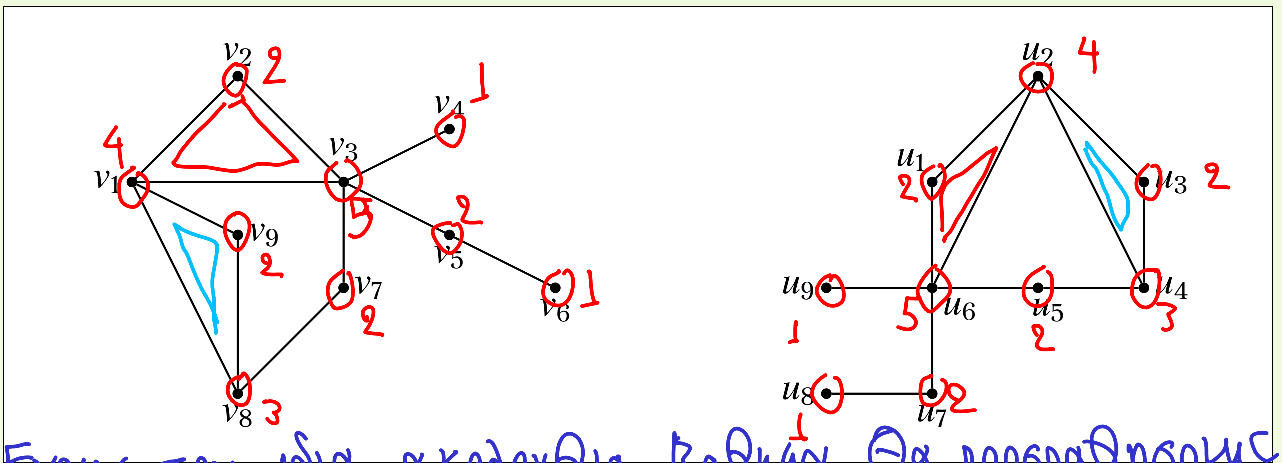



$f(1)=\alpha$
$f(2)=b$
$f(3)=e$
$f(4)=f$
$f(5)=d$
$f(6)=c$

- Για να αποδείξουμε ότι δύο γραφήματα **δεν** είναι ισόμορφα υπάρχουν πολλοί τρόποι. Αρκεί να βρούμε ένα χαρακτηριστικό που έχει το ένα από τα δύο γραφήματα και δεν το έχει το άλλο (ενώ θα έπρεπε να το είχε αν ήταν ισόμορφα). Π.χ. ακολουθίες βαθμών, κύκλους, αποστάσεις, κλίκες, μονοπάτια, κ.λπ.

**Άσκηση 5** (Ισόμορφα γραφήματα). *Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα τα παρακάτω ζεύγη γραφημάτων.*

*(i)*



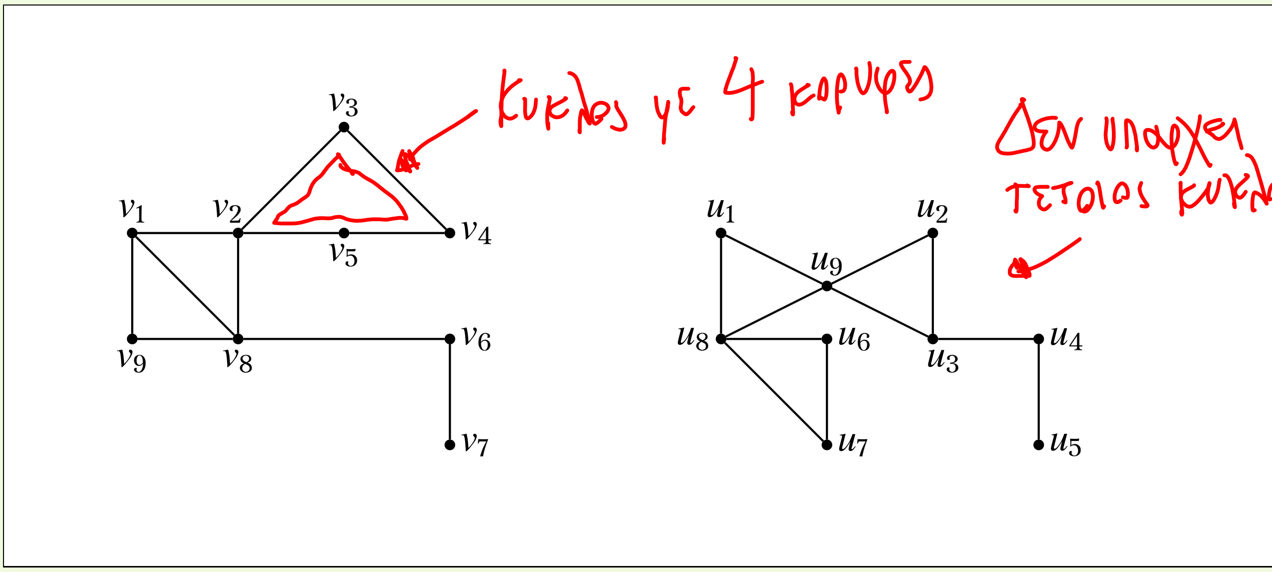

Έχουν την ίδια ακολουθία βαθμών. Θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε έναν ισομορφισμό:

$f(v_3)=u_6$, $f(v_4)=u_9$, $f(v_5)=u_7$, $f(v_6)=u_8$, $f(v_1)=u_2$, $f(v_2)=u_1$, $f(v_8)=u_4$, $f(v_9)=u_3$, $f(v_7)=u_5$

*Λύση.* *Τα γραφήματα είναι ισόμορφα αφού υπάρχει ο ισομορφισμός:* $f : V \mapsto V'$ *με*

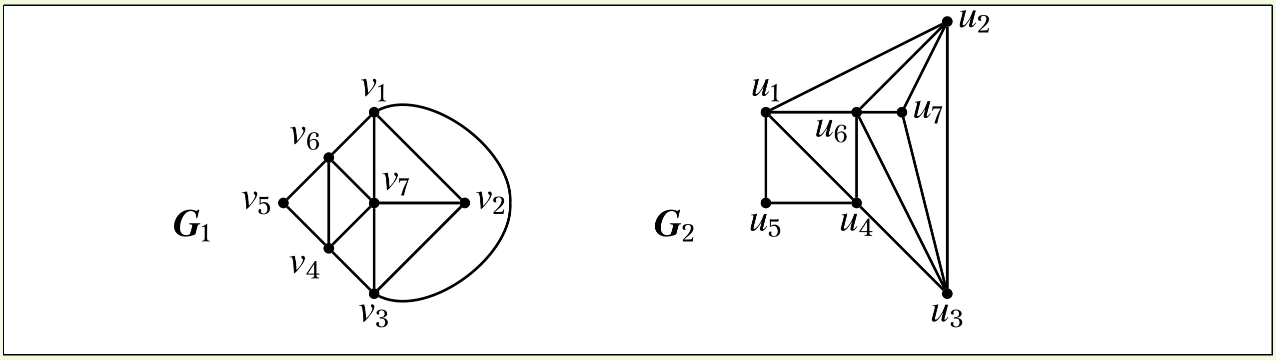
$$f(v_1) = u_2, \quad f(v_2) = u_1, \quad f(v_3) = u_6,$$
$$f(v_4) = u_9, \quad f(v_5) = u_7, \quad f(v_6) = u_8,$$
$$f(v_7) = u_5, \quad f(v_8) = u_4, \quad f(v_9) = u_3.$$

*(ii)*




*Λύση.* *Τα γραφήματα δεν είναι ισόμορφα, αφού το* $G_1$ *περιέχει κύκλο μήκους 4 (τον* $(v_2, v_3, v_4, v_5, v_2)$*) ενώ το* $G_2$ *δεν περιέχει τέτοιο κύκλο.*

*(iii)*

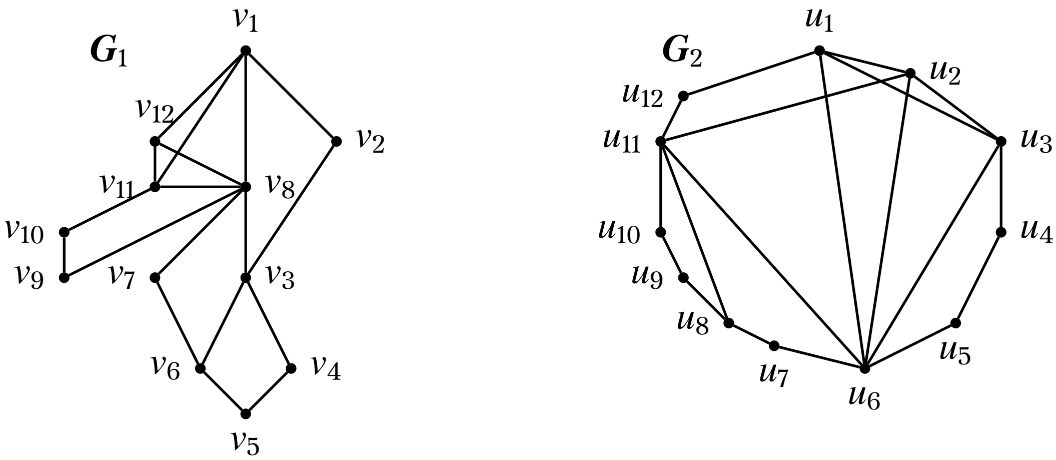


*Λύση.* Τα $G_1$, $G_2$ είναι ισόμορφα. Ένας ισομορφισμός $f$ είναι ο εξής:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= u_2 \\ f(v_2) &= u_7 \\ f(v_3) &= u_3 \\ f(v_4) &= u_4 \\ f(v_5) &= u_5 \\ f(v_6) &= u_1 \\ f(v_7) &= u_6 \end{aligned}$$

□

*(iv)*

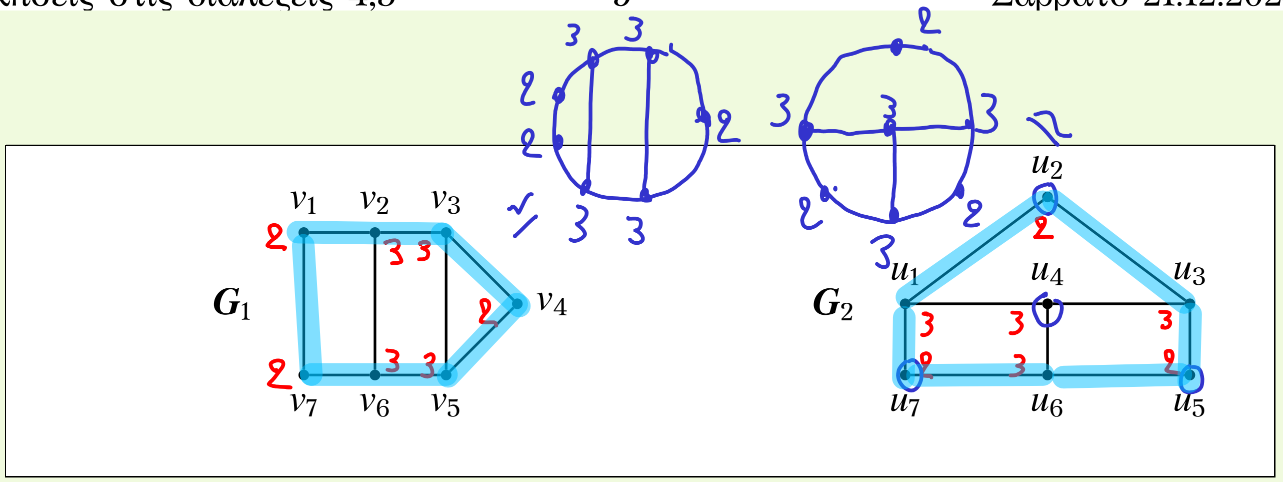



*Λύση.* Τα $G_1$, $G_2$ δεν είναι ισόμορφα, διότι έχουν διαφορετικές ακολουθίες βαθμών.

Ακολουθία βαθμών του $G_1$: $(6, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

Ακολουθία βαθμών του $G_2$: $(6, 5, 4, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$. □

(v)




*Λύση.* Δεν είναι ισόμορφα: Το $G_1$ περιέχει κύκλο μήκους 3 ενώ το $G_2$ όχι. □

Δεν ειναι ισομορφα. Διοτι

α) Το $G_1$ εχει κυκλο μηκους 3, ενω το $G_2$ οχι
$(v_3\, v_4\, v_5)$

β) Στο $G_2$ υπαρχει κορυφη βαθμου 3 (η $u_4$) που ενωνεται με 3 κορυφες βαθμου 3, ενω στο $G_1$ οχι

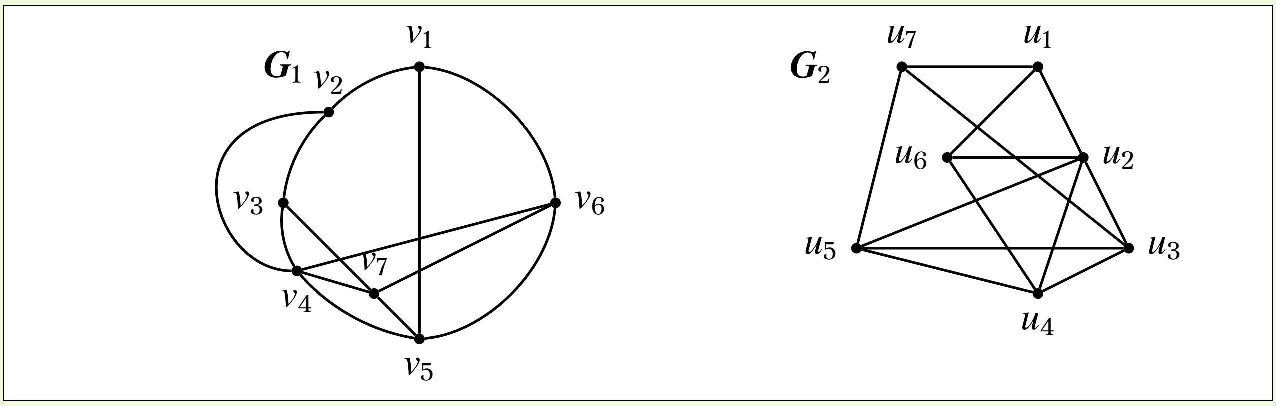
γ) Στο $G_1$ υπαρχουν κορυφες βαθμου 2 που απεχουν αποσταση 1, ενω στο $G_2$ οχι

δ) Στο $G_1$ υπαρχει κυκλος που περιεχει ολες τις κορυφες (κυκλος Hamilton), ενω στο $G_2$ οχι

ε) Το $G_1$ εχει 2 κυκλους μηκους 4, ενω το $G_2$ εχει 3 κυκλους μηκους 4

στ) ....

*(vi)*

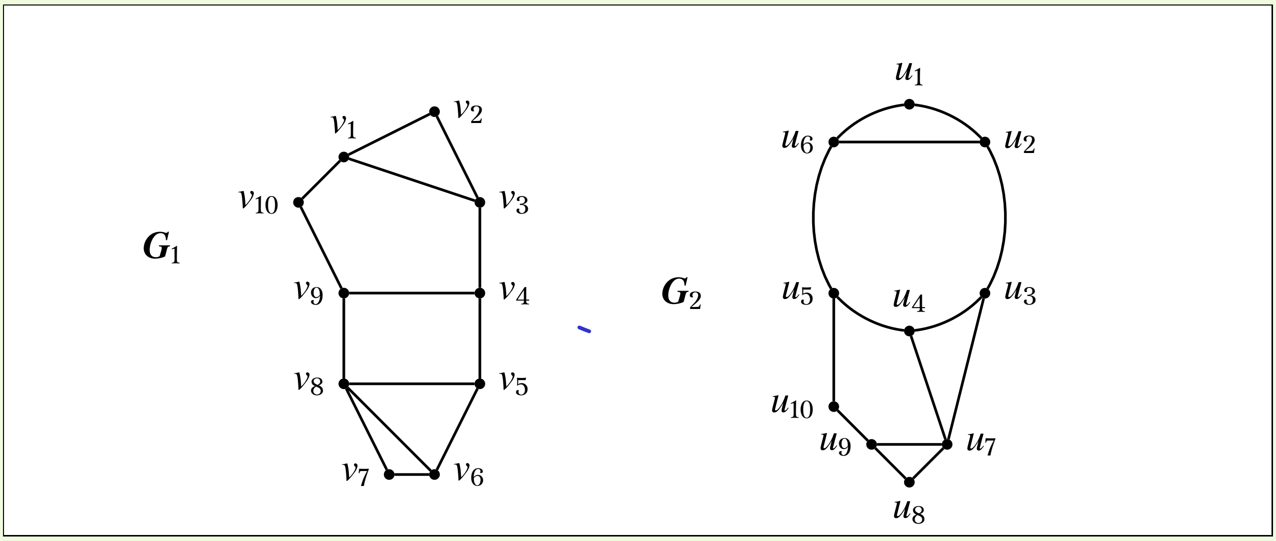



*Λύση.* Τα $G_1$, $G_2$ είναι ισόμορφα. Ένας ισομορφισμός $f$ είναι ο εξής:

$$f(v_1) = u_7$$
$$f(v_2) = u_1$$
$$f(v_3) = u_6$$
$$f(v_4) = u_2$$
$$f(v_5) = u_5$$
$$f(v_6) = u_3$$
$$f(v_7) = u_4$$

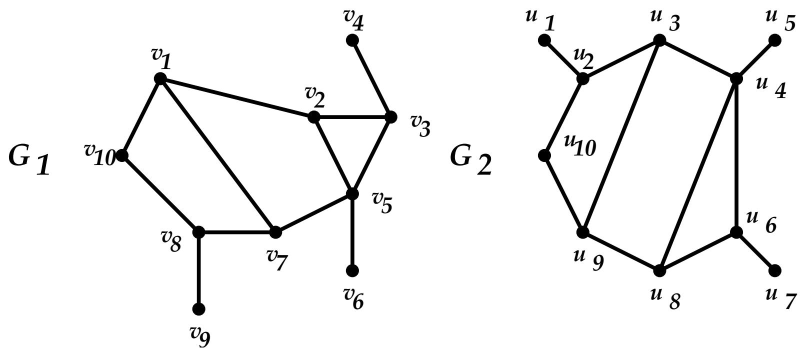
□

*(vii)*




*Λύση.* Τα $G_1$, $G_2$ δεν είναι ισόμορφα, διότι το $G_1$ περιέχει κύκλο μήκους 4 ενώ το $G_2$ όχι. □

*(viii)*

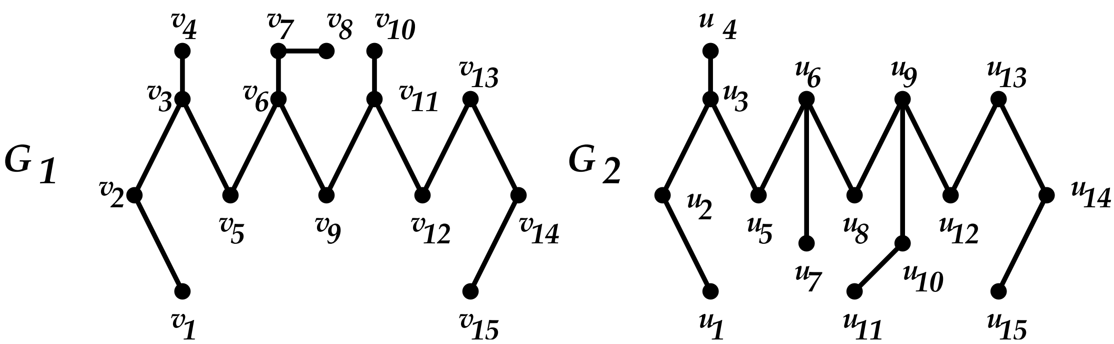



*Λύση.* Τα $G_1$, $G_2$ είναι ισόμορφα. Ένας ισομορφισμός $f$ είναι ο εξής:

$$
\begin{aligned}
f(v_1) &= u_9\\
f(v_2) &= u_8\\
f(v_3) &= u_6\\
f(v_4) &= u_7\\
f(v_5) &= u_4\\
f(v_6) &= u_5\\
f(v_7) &= u_3\\
f(v_8) &= u_2\\
f(v_9) &= u_1\\
f(v_{10}) &= u_{10}
\end{aligned}
$$

□

*(ix)*




*Λύση.* Τα $G_1$, $G_2$ δεν είναι ισόμορφα, διότι στο $G_2$ υπάρχουν κορυφές βαθμού 1 που απέχουν απόσταση 4 (οι $u_4$ και $u_7$) ενώ στο $G_1$ όχι. □

↳ SOS! (5η διάλεξη)

**Άσκηση 6** (Δένδρα και δάση).
*α) Ένα δένδρο $T$ έχει $|E| = 100$ δεσμούς. Να βρεθεί το πλήθος $|V|$ των κορυφών του.*

***Λύση.*** *Σε κάθε δένδρο $T = (V, E)$ ισχύει ότι*

$$\boxed{|V| = |E| + 1}$$

*Εδώ $|E| = 100$, επομένως το δένδρο έχει $|V| = 100 + 1 = 101$ κορυφές.*

*β) Ένα δάσος $F$ αποτελείται από 3 δένδρα και έχει 100 δεσμούς. Να βρεθεί το πλήθος των ~~δεσμών~~ κορυφών του.*

***Λύση.*** *Έστω $T_1 = (V_1, E_1)$, $T_2 = (V_2, E_2)$, $T_3 = (V_3, E_3)$ τα τρία δένδρα του δάσους $F = (V, E)$.*

*Παρατηρούμε ότι $|V| = |V_1| + |V_2| + |V_3|$ (1) και $|E| = |E_1| + |E_2| + |E_3|$ (2).*

*Όμως, για τα δένδρα του δάσους ισχύουν $|V_1| = |E_1| + 1$, $|V_2| = |E_2| + 1$, $|V_3| = |E_3| + 1$, οπότε το δάσος έχει*

$$|V| = |V_1| + |V_2| + |V_3| = |E_1| + 1 + |E_2| + 1 + |E_3| + 1 = |E| + 3 = 100 + 3 = 103$$

*κορυφές.*

→ SUPER SOS! (5η διάλεξη)

**Άσκηση 7** (Διασχίσεις δυαδικών δένδρων). *Να γίνει διάτρεξη σε προδιάταξη, ενδοδιάταξη, μεταδιάταξη και διάταξη κατά σειρά επιπέδων το δυαδικό δένδρο*

Μεταδιάταξη

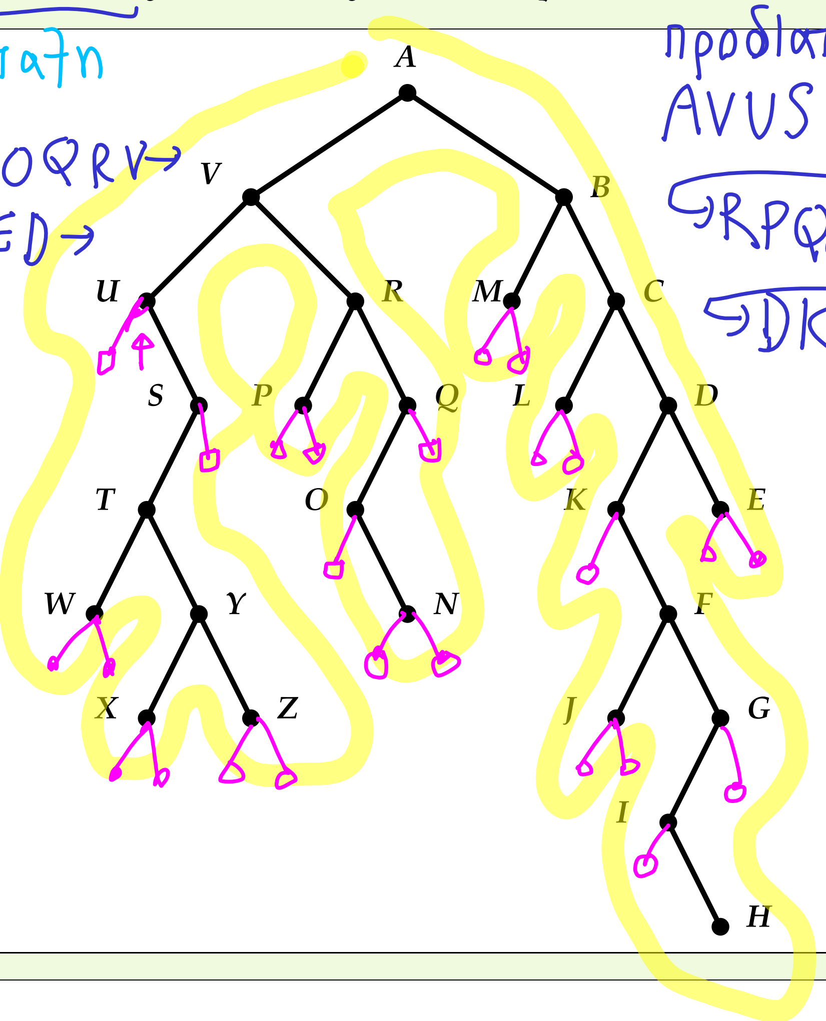
WXZYTS UPNOQRV→
→MLJHIGFKED→
CBA

Ενδοδιάταξη

UWT XYZSVP
RONQAMBLC
KJFIHGDE

Προδιάταξη

AVUS TWYXZ
→RPQONBMCL
→DKFJGIHE




*Προδιάταξη:*
*AVUSTWYXZRPQONBMCLDKFJGIHE*
*Ενδοδιάταξη:*
*UWTXYZSVPRONQAMBLCKJFIHGDE*
*Μεταδιάταξη:*
*WXZYTSUPNOQRVMLJHIGFKEDCBA*
*Κατά επίπεδα:*
*AVBURMCSPQLDTOKEWYNFXZJGIH*

**Άσκηση 8** (Διασχίσεις δυαδικών δένδρων). *Να γίνει επίσκεψη σε προδιάταξη, μεταδιάταξη, ενδοδιάταξη και διάταξη κατά σειρά επιπέδων στα παρακάτω δυαδικά δένδρα (με ρίζες $v_{19}$, $u_1$ αντίστοιχα)*