Λύση της Άσκησης 2, 1η διάλεξη

Θεωρούμε την πρόταση

$$\Pi(n): \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{4}-\frac{1}{n}$$

i) Για $n=2$, προκυπτει η προταση

$$\Pi(2): \frac{1}{2^2} \leq \frac{3}{4}-\frac{1}{2} \iff \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}-\frac{2}{4} \iff \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

η οποία ισχύει.

ii) Υποθέτουμε ότι για κάποιο $k \geqslant 2$ ισχύει η $\Pi(k)$ δηλαδή

$$\Pi(k): \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{k^2} \leq \frac{3}{4}-\frac{1}{k} \qquad (\text{ΥΕ})$$

Θα δείξουμε ότι η πρόταση $\Pi(k+1)$ είναι επίσης αληθής:

$$\Pi(k+1): \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{3}{4}-\frac{1}{k+1}$$

Πράγματι, ξεκινάμε απο το αριστερό μέλος της αποδεικτέας και έχουμε ότι

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} \overset{(\text{ΥΕ})}{\leq} \frac{3}{4}-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{3}{4}-\frac{1}{k+1} \iff$$

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} \overset{\text{ομώνυμα κλάσματα}}{\iff} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\iff k(k+1) \leq (k+1)^2 \overset{k+1>0}{\iff} k \leq k+1 \quad \text{το οποίο ισχύει}$$

Άρα, η $\Pi(k+1)$ είναι επίσης αληθής. Άρα, απο την αρχή της επαγωγής η $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \geqslant 2$

Παρατήρηση: $\alpha \geqslant b$ σημαίνει <u>είτε $\alpha > b$</u>, <u>είτε $\alpha = b$</u> έτσι π.χ. $10 \geqslant 8$, $10 \geqslant 10$