ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΑΝΑΓΩΓΕΣ

Τμήμα Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Ικανοποιησιμότητα

Δίδονται τα σύνολα

$$\Sigma_1 = \{p_1 \vee p_2 \vee p_3, p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3, \neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3\}$$
$$\Sigma_2 = \{p_1 \vee p_2 \vee p_3, p_1 \vee \neg p_2, p_2 \vee \neg p_3, p_3 \vee \neg p_1, \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3\}$$

Είναι κάποιο από τα σύνολα Σ_1 και Σ_2 ικανοποιήσιμο, δηλαδή υπάρχουν εκτιμήσεις v_1, v_2 ώστε $v_1 \models \Sigma_1$ ή $v_2 \models \Sigma_2$;
Εύκολα, μπορούμε να ελέγξουμε ότι η εκτίμηση v_1 με $v_1(p_1) = 1$, $v_1(p_2) = v_1(p_3) = 0$ ικανοποιεί το σύνολο Σ_1.
Αντίθετα, καμιά εκτίμηση δεν ικανοποιεί το σύνολο Σ_2, διότι από τις προτάσεις $p_1 \vee \neg p_2$, $p_2 \vee \neg p_3$, $p_3 \vee \neg p_1$ έπεται ότι για κάθε εκτίμηση v_2 που ικανοποιεί το Σ_2 ισχύει ότι

$$v_2(p_1) = v_2(p_2) = v_2(p_3),$$

επομένως, σε κάθε περίπτωση έχουμε αντίστοιχα ότι

$$v_2(p_1 \vee p_2 \vee p_3) = 0 \qquad \text{ή} \qquad v_2(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) = 0.$$

Ικανοποιησιμότητα

Στην γενική του μορφή, το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας ορίζεται ως εξής:

Πρόβλημα Ικανοποιησιμότητας

Δίδεται ένα σύνολο Σ και ζητείται να δοθεί μια εκτίμηση v που ικανοποιεί το Σ ή η απάντηση ότι δεν υπάρχει τέτοια εκτίμηση.

Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας είναι ένα απο τα σημαντικότερα προβλήματα της Μαθηματικής Λογικής, με εφαρμογές στην Πληροφορική. Η προφανής μέθοδος λύσης του είναι η *εξαντλητική εξέταση* όλων των δυνατών εκτιμήσεων, π.χ. με την βοήθεια των πινάκων αληθείας. Όμως, αν στο Σ περιέχονται n διαφορετικά άτομα, τότε ο συνολικός αριθμός των δυνατών εκτιμήσεων ισούται με 2^n (διότι για κάθε άτομο έχουμε ακριβώς δύο επιλογές). Ακόμα και ένας υπολογιστής που εξετάζει 10^{20} περιπτώσεις το δευτερόλεπτο, για σύνολα που περιέχουν 100 άτομα θα έπρεπε να εξετάσει 2^{100} περιπτώσεις, το οποίο θα απαιτούσε περίπου 4 αιώνες!

Φυσικά, αντί να δοκιμάσουμε όλες τις περιπτώσεις, είναι καλύτερο πρώτα να μελετήσουμε τις προτάσεις του Σ, ελπίζοντας ότι θα μπορέσουμε να βρούμε κανόνες που πρέπει να ικανοποιούν όλες οι πιθανές εκτιμήσεις που ικανοποιούν το Σ, όπως στο παράδειγμα με το σύνολο Σ_2.

Δυστυχώς, στην γενική του μορφή το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας δεν έχει αντιμετωπισθεί με κάποιο αποδοτικό τρόπο. Μάλιστα, ανήκει σε μια κατηγορία "δύσκολων" προβλημάτων της Πληροφορικής, τα οποία χαρακτηρίζονται με τον όρο **NP-complete** προβλήματα.

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις του προβλήματος ικανοποιησιμότητας, για τις οποίες έχουν βρεθεί αποδοτικές μέθοδοι επίλυσης. Επίσης, θα μελετήσουμε την γενική περίπτωση και θα δούμε γιατί είναι τόσο σημαντικό πρόβλημα στην Πληροφορική.

Τύποι Horn

Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας έχει αποδοτική λύση στην περίπτωση όπου το Σ περιέχει μόνο προτάσεις που ανήκουν σε μια ειδική κατηγορία που ονομάζονται *τύποι Horn*. Χάριν απλότητας, θα περιοριστούμε σε τρεις μορφές των τύπων Horn.

Τύποι Horn

Μια πρόταση ονομάζεται τύπος Horn αν γράφεται σε μία από τις τρεις μορφές:

α) p_k

β) $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_k) \rightarrow p_{k+1}$

γ) $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_k$

όπου $p_1, p_2, \ldots, p_k, p_{k+1}$ είναι άτομα.

Στις μορφές β, γ, ανήκουν και προτάσεις της μορφής:
$p_k \rightarrow p_{k+1}$, $\neg p_k$.
Για παράδειγμα, οι προτάσεις $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_1$, p_1, $\neg p_2 \vee \neg p_3$, $p_3 \rightarrow p_1$, $\neg p_2$ είναι τύποι Horn.

Τύποι Horn

Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας στην περίπτωση των τύπων Horn μπορεί να λυθεί ακολουθώντας τον παρακάτω αλγόριθμο.
Είσοδος: Ένα σύνολο τύπων Horn
Έξοδος: Μια εκτίμηση που το ικανοποιεί, αν υπάρχει.

Βήμα 1: Θέσε ψευδείς τις εκτιμήσεις όλων των ατόμων, εκτός αυτών που περιέχονται **ως** προτάσεις στο Σ.

Βήμα 2: Όσο υπάρχει συνεπαγωγή η οποία δεν ικανοποιείται, θέσε την εκτίμηση του άτομου στο δεξιό της μέλος ως αληθή, και επανάλαβε μέχρις ότου όλες οι συνεπαγωγές ικανοποιούνται.

Βήμα 3: Έλεγξε μόνο τους τύπους οι οποίοι περιέχουν μόνο αρνήσεις ατόμων. Αν όλοι αυτοί οι τύποι είναι αληθείς, τότε επίστρεψε την εκτίμηση που βρέθηκε.
Αλλιώς, επίστρεψε ότι το σύνολο δεν ικανοποιείται.

Τύποι Horn - Παράδειγμα

Έστω Σ το σύνολο που αποτελείται από τους εξής τύπους Horn.

$$\Sigma = \{(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow p_1, p_1 \rightarrow p_2, (p_1 \wedge p_3) \rightarrow p_4, (p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_4, \\ p_1, p_4, \neg p_3 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2\}.$$

Το Σ περιέχει 4 άτομα: p_1, p_2, p_3, p_4.
Βήμα 1: Αρχικά θέτουμε όλα τα άτομα ψευδή εκτός από τα p_1, p_4, οπότε έχουμε

$$v(p_2) = v(p_3) = 0, \quad v(p_1) = v(p_4) = 1$$

Βήμα 2: Η συνεπαγωγή $p_1 \rightarrow p_2$ είναι ψευδής, άρα θέτουμε p_2 αληθές, οπότε έχουμε

$$v(p_3) = 0, \quad v(p_1) = v(p_2) = v(p_4) = 1$$

Τώρα, όλες οι συνεπαγωγές είναι αληθείς.
Βήμα 3: Η πρόταση $\neg p_3 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2$ είναι αληθής, αφού επαληθεύται από την εκτίμηση v.
Άρα, η εκτίμηση v που βρήκαμε ικανοποιεί το Σ.

Αν το σύνολο Σ περιέχει μόνο τύπους Horn, η μορφή των προτάσεων του είναι σχετικά απλή. Στην γενική περίπτωση του προβλήματος της ικανοποιησιμότητας, η μορφή των προτάσεων του Σ μπορεί να είναι ιδιαίτερα περίπλοκη. Για παράδειγμα, μπορεί να περιέχει μια πρόταση όπως η ϕ:
$(((p_1 \leftrightarrow \neg p_2) \to (\neg p_3 \leftrightarrow p_1)) \vee (p_2 \to \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_3)) \to ((\neg p_2 \wedge (p_1 \to p_4)) \vee (\neg p_4 \leftrightarrow \neg p_2))$, κ.ο.κ., όπου ακόμα και για μια συγκεκριμένη εκτίμηση v ο έλεγχος της τιμής αληθείας της ϕ δεν είναι προφανής.

Για το λόγο αυτό έχει μελετηθεί το πρόβλημα της εύρεσης προτάσεων ψ που είναι λογικά ισοδύναμες με μια δοθείσα πρόταση ϕ αλλά έχουν μια συγκεκριμένη ‘‘απλούστερη’’ μορφή, η οποία ονομάζεται **κανονική μορφή**.

Υπάρχουν δύο κανονικές μορφές: η **κανονική διαζευκτική μορφή** και η **κανονική συζευκτική μορφή**.

Κανονική διαζευκτική μορφή - DNF

Πρόταση Έστω S μια πρόταση η οποία περιέχει της προτασιακές μεταβλητές $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$. Ισχύει ότι:

$$S \models\mid \bigvee_{v \in [S]} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} q(v, i) \right),$$

$$\text{όπου } [S] = \{v : v(S) = 1\} \text{ και } q(v,i) = \begin{cases} \varphi_i, & \text{αν } v(\varphi_i) = 1 \\ \neg\varphi_i, & \text{αν } v(\varphi_i) = 0. \end{cases}$$

Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε πρόταση φ μπορεί να γραφτεί ως διαζεύξεις συζεύξεων ακολουθώντας την εξής διαδικασία:

- Στον πίνακα αληθείας της φ κοιτάζουμε μόνο τις γραμμές με $v(\varphi) = 1$. Για κάθε τέτοια γραμμή δημιουργούμε μια σύζευξη από n μεταβλητές (φ_i, αν στην i-οστή θέση της γραμμής έχουμε 1 και $\neg\varphi_i$ αν έχουμε 0).
- Συνδέουμε τις συζεύξεις αυτές με διαζεύξεις.

Κανονική διαζευκτική μορφή - DNF

Η γραφή που προκύπτει από τη διαδικασία αυτή ονομάζεται **(πλήρης) κανονική διαζευκτική μορφή** (**(full) disjunctive normal form**). Γενικότερα, αν μια πρόταση έχει γραφεί ως διαζεύξεις συζεύξεων, ονομάζεται **κανονική διαζευκτική μορφή** (**disjunctive normal form** - DNF)

Παράδειγμα 1

Η πρόταση

$$(\neg\phi \wedge \neg y) \vee (\phi \wedge y) \vee (y \wedge \neg\sigma)$$

είναι γραμμένη σε DNF (αλλά δεν είναι πλήρης).

Κανονική διαζευκτική μορφή - DNF

Παράδειγμα 2

Η πρόταση $\neg(\varphi \wedge y)$ έχει πίνακα αληθείας

φ	y	$\varphi \wedge y$	$\neg(\varphi \wedge y)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Για να τη γράψουμε λοιπόν σε πλήρη κανονική διαζευκτική μορφή ασχολούμαστε μόνο με τις τρεις τελευταίες γραμμές του πίνακα. Από τη 2^{η} γραμμή παίρνουμε: $\varphi \wedge \neg y$, από την 3^{η}: $\neg\varphi \wedge y$ και από την 4^{η}: $\neg\varphi\neg \wedge y$. Άρα τελικά

$$\neg(\varphi \wedge y) \models\mid (\varphi \wedge \neg y) \vee (\neg\varphi \wedge y) \vee (\neg\varphi \wedge \neg y).$$

Κανονική διαζευκτική μορφή - DNF

Παράδειγμα 3

Η πρόταση $S(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ με πίνακα:

φ_1	φ_2	φ_3	$S(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$		
1	1	1	**1**	$\longrightarrow$	$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$
1	1	0	0		
1	0	1	0		
1	0	0	**1**	$\longrightarrow$	$\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \wedge \neg\varphi_3$
0	1	1	**1**	$\longrightarrow$	$\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$
0	1	0	0		
0	0	1	0		
0	0	0	**1**	$\longrightarrow$	$\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \wedge \neg\varphi_3$

γράφεται σε DNF:

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \wedge \neg\varphi_3) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \wedge \neg\varphi_3).$$

Παρατήρηση

Τα άτομα, οι αρνήσεις ατόμων, προτάσεις που χρησιμοποιούν μόνο διαζεύξεις ατόμων (ή αρνήσεων ατόμων) και προτάσεις που χρησιμοποιούν μόνο συζεύξεις ατόμων (ή αρνήσεων ατόμων), μπορούν τετριμμένα να θεωρηθούν ότι είναι σε DNF.

Για παράδειγμα, η πρόταση $p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3 \vee p_4$ μπορεί να θεωρηθεί ως διάζευξη συζεύξεων (DNF) αφού είναι προφανώς ισοδύναμη με την $(p_1 \wedge p_1) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_2) \vee (p_3 \wedge p_3) \vee (p_4 \wedge p_4)$. Ομοίως, η πρόταση $p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3$ μπορεί να θεωρηθεί ως διάζευξη συζεύξεων (DNF) αφού είναι προφανώς ισοδύναμη με την $(p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$.

Κανονική συζευκτική μορφή - CNF

Αντίστοιχα με την κανονική διαζευκτική μορφή, μπορούμε επίσης να γράφουμε οποιαδήποτε πρόταση φ ως συζεύξεις διαζεύξεων:

- Κοιτάζουμε στον πίνακα αληθείας της φ μόνο τις γραμμές με $v(\varphi) = 0$. Για κάθε τέτοια γραμμή δημιουργούμε μια διάζευξη από n μεταβλητές ($\neg\varphi_i$ αν στη i-οστή θέση της γραμμής έχουμε 1 και φ_i αν έχουμε 0).
- Συνδέουμε τις διαζεύξεις αυτές με συζεύξεις.

Η γραφή που προκύπτει από αυτή την διαδικασία ονομάζεται **(πλήρης) κανονική συζευκτική μορφή** (**(full) conjuctive normal form - CNF**). Γενικότερα, αν μια πρόταση έχει γραφεί ως συζεύξεις διαζεύξεων, ονομάζεται **κανονική συζευκτική μορφή** (**conjuctive normal form - CNF**).

Κανονική συζευκτική μορφή - CNF

Έτσι, το προηγούμενο Παράδειγμα 2, δίνει

$$\neg(\varphi \wedge y) \models\!\!\!\dashv \neg\varphi \vee \neg y$$

και το Παράδειγμα 3 δίνει για την S τη μορφή

$$(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \varphi_3) \wedge (\neg\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \neg\varphi_3) \wedge$$
$$(\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \neg\varphi_3).$$

Κανονική συζευκτική μορφή - CNF

Παρατήρηση

Αντίστοιχα με την DNF, προφανώς ισχύει επίσης ότι τα άτομα, οι αρνήσεις ατόμων, προτάσεις που χρησιμοποιούν μόνο διαζεύξεις ατόμων (ή αρνήσεων ατόμων) και προτάσεις που χρησιμοποιούν μόνο συζεύξεις ατόμων (ή αρνήσεων ατόμων), μπορούν τετριμμένα να θεωρηθούν ότι είναι σε CNF.

Παρατήρηση

Αν μας είναι αρκετό να μετατρέψουμε μια πρόταση σε κανονική μορφή (χωρίς να είναι υποχρεωτικά πλήρης), μπορούμε πολλές φορές να το κάνουμε απλούστερα και γρηγορότερα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των συνδέσμων (επιμεριστικότητα των $\vee$, $\wedge$, κανόνες De Morgan κ.λπ).

Κανονική συζευκτική μορφή - CNF

Έτσι, για παράδειγμα, η πρόταση $p_4 \wedge (p_4 \rightarrow p_1)$, η οποία γράφεται με χρήση πινάκων αληθείας σε πλήρη CNF ως

$$(\neg p_1 \vee p_4) \wedge (\neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_1 \vee p_4),$$

μπορεί να γραφεί πολύ απλούστερα στην ισοδύναμή της (τετριμμένη, μη πλήρη) CNF ως $p_4 \wedge p_1$, αφού

$$\begin{aligned} p_4 \wedge (p_4 \rightarrow p_1) &\overset{(1)}{\models\!\!\!\dashv} p_4 \wedge (\neg p_4 \vee p_1) \\ &\overset{(2)}{\models\!\!\!\dashv} (p_4 \wedge \neg p_4) \vee (p_4 \wedge p_1) \\ &\overset{(3)}{\models\!\!\!\dashv} p_4 \wedge p_1 \end{aligned}$$

(1): Βλέπε τις βασικές (λογικές) ισοδυναμίες (σελ. 44)
(2): Επιμεριστικότητα
(3): Αφού η $p_4 \wedge \neg p_4$ είναι ψευδής. Γενικά ισχύει προφανώς ότι αν η ψ είναι ψευδής τότε $\psi \vee \phi \models\!\!\!\dashv \phi$.

Επάρκεια συνδέσμων

Στο σημείο αυτό μπορούμε να κάνουμε μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση:

Από τις προηγούμενες δύο κανονικές μορφές είναι φανερό ότι κάθε πρόταση ϕ είναι λογικά ισοδύναμη με μια πρόταση που περιέχει μόνο τους συνδέσμους $\neg$ και $\vee$, ή μόνο τους συνδέσμους $\neg$ και $\wedge$.

Πράγματι, όπως εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε, ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$(\varphi \to y) \models\mid (\neg\varphi \vee y)$

$(\varphi \leftrightarrow y) \models\mid (\varphi \to y) \wedge (y \to \varphi)$

(άρα $(\varphi \leftrightarrow y) \models\mid (\neg\varphi \vee y) \wedge (\neg y \vee \varphi)$)

$\neg(\varphi \wedge y) \models\mid \neg\varphi \vee \neg y$ (άρα $\varphi \wedge y \models\mid \neg(\neg\varphi \vee \neg y)$)

$\neg(\varphi \vee y) \models\mid \neg\varphi \wedge \neg y$ (άρα $\varphi \vee y \models\mid \neg(\neg\varphi \wedge \neg y)$)

Άρα, κάθε πρόταση που εκφράζεται από τα άτομα και τους λογικούς συνδέσμους $\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας μόνο δύο από τους τρεις πρώτους.

Στην πραγματικότητα ισχύει κάτι ακόμα πιο ισχυρό.

Επάρκεια συνδέσμων

Μέχρι τώρα ορίσαμε στο P το μονομελή σύνδεσμο $\neg$ και τους διμελείς συνδέσμους $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Ο μονομελής σύνδεσμος $\neg$ είναι στην ουσία μια απεικόνιση $F : P \mapsto P$ (με $F(\varphi) = \neg\varphi$) και συνοδεύεται από τον πίνακα αληθείας:

φ	$F(\varphi)$
1	0
0	1

Ισοδύναμα είπαμε ότι ο μονομελής σύνδεσμος $\neg$ ορίζεται στην ουσία από τη συνάρτηση $G_\neg : \{0,1\} \mapsto \{0,1\}$ με

φ	$G_\neg(\varphi)$
1	0
0	1

Ομοίως ο διμελής σύνδεσμος $\wedge$ είναι μια απεικόνιση $F : P^2 \mapsto P$ (με $F(\varphi, y) = \varphi \wedge y$) και συνοδεύεται από τον πίνακα αληθείας

φ	y	$F(\varphi)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Αντίστοιχα έχουν ορισθεί και οι διμελείς σύνδεσμοι $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Επάρκεια συνδέσμων

Τα παραπάνω γενικεύονται προφανώς για n-μελείς συνδέσμους ως εξής:

Ορισμός

Κάθε απεικόνιση $F : P^n \mapsto P$ που συνοδεύεται από έναν πίνακα αληθείας για τις τιμές της $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ (ή μια συνάρτηση $G_F : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$) ονομάζεται **n-μελής σύνδεσμος** στο P.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $G_F : \{0,1\}^3 \mapsto \{0,1\}$ με:

φ_1	φ_2	φ_1	$G_F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

είναι ένας τριμελής σύνδεσμος.

Επάρκεια συνδέσμων

Αποδεικνύεται το παρακάτω γενικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα

Το σύνολο $\{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ (άρα και τα σύνολα $\{\wedge, \vee, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$) είναι **επαρκές**.

Δηλαδή, οποιοσδήποτε n-μελής σύνδεσμος F είναι ισοδύναμος με μια πρόταση φ (και άρα μπορεί να αντικατασταθεί από αυτή) η οποία χρησιμοποιεί μόνο τους συνδέσμους $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (ή όπως είδαμε ήδη μόνο τους $\neg, \wedge, \vee$ ή μόνο τους $\neg, \wedge$ ή μόνο τους $\neg, \vee$).
Άρα οι σύνδεσμοι $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ (ή και μόνο οι $\neg, \wedge, \vee$ ή μόνο οι $\neg, \wedge$ ή μόνο οι $\neg, \vee$) επαρκούν για να εκφρασθεί μέσω αυτών οποιοσδήποτε άλλος σύνδεσμος.

1. Να εξετασθεί αν τα επόμενα σύνολα τύπων Horn είναι ικανοποιήσιμα.

1. $\{(p_1 \wedge p_3 \wedge p_5) \to p_4, \neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2,$
$p_3 \to p_1, \neg p_5 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2, p_3, (p_1 \wedge p_3) \to p_5\}$
Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = 1$ και $v(p_2) = 0$.
2. $\{p_6, \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2, (p_6 \wedge p_3) \to p_1,$
$\neg p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_3, (p_1 \wedge p_6) \to p_4, p_6 \to p_3\}$
Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = v(p_3) = v(p_6) = 1$ και $v(p_2) = v(p_4) = v(p_5) = 0$.
3. $\{\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, \neg p_2, p_2 \to p_1, (p_3 \wedge p_2 \wedge p_5) \to p_4,$
$\neg p_4 \vee \neg p_5, (p_4 \wedge p_1) \to p_2, p_1\}$.
Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = 1$ και $v(p_2) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = 0$.

1. Να εξετασθεί αν τα επόμενα σύνολα τύπων Horn είναι ικανοποιήσιμα.

1. $\{(p_1 \wedge p_3 \wedge p_5) \to p_4, \neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2,$
$p_3 \to p_1, \neg p_5 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2, p_3, (p_1 \wedge p_3) \to p_5\}$
Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = 1$ και $v(p_2) = 0$.
2. $\{p_6, \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2, (p_6 \wedge p_3) \to p_1,$
$\neg p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_3, (p_1 \wedge p_6) \to p_4, p_6 \to p_3\}$
Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = v(p_3) = v(p_6) = 1$ και $v(p_2) = v(p_4) = v(p_5) = 0$.
3. $\{\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, \neg p_2, p_2 \to p_1, (p_3 \wedge p_2 \wedge p_5) \to p_4,$
$\neg p_4 \vee \neg p_5, (p_4 \wedge p_1) \to p_2, p_1\}$.
Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = 1$ και $v(p_2) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = 0$.

1. Να εξετασθεί αν τα επόμενα σύνολα τύπων Horn είναι ικανοποιήσιμα.

1. $\{(p_1 \wedge p_3 \wedge p_5) \to p_4, \neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2,$
$p_3 \to p_1, \neg p_5 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2, p_3, (p_1 \wedge p_3) \to p_5\}$
Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = 1$ και $v(p_2) = 0$.
2. $\{p_6, \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2, (p_6 \wedge p_3) \to p_1,$
$\neg p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_3, (p_1 \wedge p_6) \to p_4, p_6 \to p_3\}$
Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = v(p_3) = v(p_6) = 1$ και $v(p_2) = v(p_4) = v(p_5) = 0$.
3. $\{\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, \neg p_2, p_2 \to p_1, (p_3 \wedge p_2 \wedge p_5) \to p_4,$
$\neg p_4 \vee \neg p_5, (p_4 \wedge p_1) \to p_2, p_1\}$.
Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = 1$ και $v(p_2) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = 0$.

1. Να εξετασθεί αν τα επόμενα σύνολα τύπων Horn είναι ικανοποιήσιμα.

1. $\{(p_1 \wedge p_3 \wedge p_5) \rightarrow p_4, \neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2, p_3 \rightarrow p_1, \neg p_5 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2, p_3, (p_1 \wedge p_3) \rightarrow p_5\}$
   Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = 1$ και $v(p_2) = 0$.
2. $\{p_6, \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2, (p_6 \wedge p_3) \rightarrow p_1, \neg p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_3, (p_1 \wedge p_6) \rightarrow p_4, p_6 \rightarrow p_3\}$
   Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = v(p_3) = v(p_6) = 1$ και $v(p_2) = v(p_4) = v(p_5) = 0$.
3. $\{\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, \neg p_2, p_2 \rightarrow p_1, (p_3 \wedge p_2 \wedge p_5) \rightarrow p_4, \neg p_4 \vee \neg p_5, (p_4 \wedge p_1) \rightarrow p_2, p_1\}$.
   Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = 1$ και $v(p_2) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = 0$.

1. Να εξετασθεί αν τα επόμενα σύνολα τύπων Horn είναι ικανοποιήσιμα.

1. $\{(p_1 \wedge p_3 \wedge p_5) \rightarrow p_4, \neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2, p_3 \rightarrow p_1, \neg p_5 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2, p_3, (p_1 \wedge p_3) \rightarrow p_5\}$
   Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = 1$ και $v(p_2) = 0$.
2. $\{p_6, \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2, (p_6 \wedge p_3) \rightarrow p_1, \neg p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_3, (p_1 \wedge p_6) \rightarrow p_4, p_6 \rightarrow p_3\}$
   Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = v(p_3) = v(p_6) = 1$ και $v(p_2) = v(p_4) = v(p_5) = 0$.
3. $\{\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, \neg p_2, p_2 \rightarrow p_1, (p_3 \wedge p_2 \wedge p_5) \rightarrow p_4, \neg p_4 \vee \neg p_5, (p_4 \wedge p_1) \rightarrow p_2, p_1\}$.
   Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = 1$ και $v(p_2) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = 0$.

1. Να εξετασθεί αν τα επόμενα σύνολα τύπων Horn είναι ικανοποιήσιμα.

1. $\{(p_1 \wedge p_3 \wedge p_5) \rightarrow p_4, \neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2, p_3 \rightarrow p_1, \neg p_5 \vee \neg p_1 \vee \neg p_2, p_3, (p_1 \wedge p_3) \rightarrow p_5\}$
   Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = 1$ και $v(p_2) = 0$.
2. $\{p_6, \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_2, (p_6 \wedge p_3) \rightarrow p_1, \neg p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_3, (p_1 \wedge p_6) \rightarrow p_4, p_6 \rightarrow p_3\}$
   Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = v(p_3) = v(p_6) = 1$ και $v(p_2) = v(p_4) = v(p_5) = 0$.
3. $\{\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, \neg p_2, p_2 \rightarrow p_1, (p_3 \wedge p_2 \wedge p_5) \rightarrow p_4, \neg p_4 \vee \neg p_5, (p_4 \wedge p_1) \rightarrow p_2, p_1\}$.
   Ικανοποιήσιμο, με $v(p_1) = 1$ και $v(p_2) = v(p_3) = v(p_4) = v(p_5) = 0$.

2. Σε μια διαδικασία επιλογής μεταξύ τριών αντικειμένων α, β, γ είναι απαραίτητη η ικανοποίηση των παρακάτω περιορισμών:

1. Δεν μπορούν να επιλεχθούν και τα τρία.
2. Αν επιλεχθεί το γ, τότε θα επιλεχθεί και το α.
3. Αν δεν επιλεχθεί το β, τότε δεν θα επιλεχθεί και το α.
4. Αν δεν επιλεχθεί το γ, τότε δεν θα επιλεχθεί και το α.

Μπορεί να γίνει αυτή η επιλογή;

$$\Sigma = \{\neg a \vee \neg b \vee \neg c, c \rightarrow a, \neg b \rightarrow \neg a, \neg c \rightarrow \neg a\}$$
$$\models\!\!\!| \; \{\neg a \vee \neg b \vee \neg c, c \rightarrow a, a \rightarrow b, a \rightarrow c\}$$

Ικανοποιήσιμο, με $v(b) = 1$ και $v(a) = v(c) = 0$, δηλαδή επιλέγεται μόνο το β.

2. Σε μια διαδικασία επιλογής μεταξύ τριών αντικειμένων α, β, γ είναι απαραίτητη η ικανοποίηση των παρακάτω περιορισμών:

1. Δεν μπορούν να επιλεχθούν και τα τρία.
2. Αν επιλεχθεί το γ, τότε θα επιλεχθεί και το α.
3. Αν δεν επιλεχθεί το β, τότε δεν θα επιλεχθεί και το α.
4. Αν δεν επιλεχθεί το γ, τότε δεν θα επιλεχθεί και το α.

Μπορεί να γίνει αυτή η επιλογή;

$$\Sigma = \{\neg a \vee \neg b \vee \neg c, c \to a, \neg b \to \neg a, \neg c \to \neg a\}$$
$$\models\!\!\!\dashv \{\neg a \vee \neg b \vee \neg c, c \to a, a \to b, a \to c\}$$

Ικανοποιήσιμο, με $v(b) = 1$ και $v(a) = v(c) = 0$, δηλαδή επιλέγεται μόνο το β.

3. Σε κάποια δίκη κλήθηκαν 4 μάρτυρες. Από τις καταθέσεις τους προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα.

1. Αν η μαρτυρία του M_1 είναι αληθής τότε και η μαρτυρία του M_2 είναι αληθής.
2. Η μαρτυρία του M_3 είναι αληθής, αν και μόνο αν η μαρτυρία του M_4 είναι αληθής.
3. Οι μαρτυρίες των M_2 και M_4 ουδέποτε συναληθεύουν.
4. Η μαρτυρία του M_3 είναι αληθής.

Να βρεθεί, αν υπάρχει, τρόπος ώστε όλα τα παραπάνω συμπεράσματα να είναι αληθή.

Απάντηση. Θα πρέπει να ικανοποιείται το σύνολο

$$\Sigma = \{M_1 \to M_2, M_3 \leftrightarrow M_4, M_2 \leftrightarrow \neg M_4, M_3\}.$$

Αναγκαστικά είναι $v(M_3) = 1$ και εφόσον αληθεύουν και τα υπόλοιπα, έχουμε

$$v(M_3) = 1 \Rightarrow v(M_4) = 1 \Rightarrow v(M_2) = 0 \Rightarrow v(M_1) = 0.$$

3. Σε κάποια δίκη κλήθηκαν 4 μάρτυρες. Από τις καταθέσεις τους προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα.

1. Αν η μαρτυρία του M_1 είναι αληθής τότε και η μαρτυρία του M_2 είναι αληθής.
2. Η μαρτυρία του M_3 είναι αληθής, αν και μόνο αν η μαρτυρία του M_4 είναι αληθής.
3. Οι μαρτυρίες των M_2 και M_4 ουδέποτε συναληθεύουν.
4. Η μαρτυρία του M_3 είναι αληθής.

Να βρεθεί, αν υπάρχει, τρόπος ώστε όλα τα παραπάνω συμπεράσματα να είναι αληθή.

Απάντηση. Θα πρέπει να ικανοποιείται το σύνολο

$$\Sigma = \{M_1 \to M_2, M_3 \leftrightarrow M_4, M_2 \leftrightarrow \neg M_4, M_3\}.$$

Αναγκαστικά είναι $v(M_3) = 1$ και εφόσον αληθεύουν και τα υπόλοιπα, έχουμε

$$v(M_3) = 1 \Rightarrow v(M_4) = 1 \Rightarrow v(M_2) = 0 \Rightarrow v(M_1) = 0.$$

4. Να γραφούν σε κανονική διαζευκτική και κανονική συζευκτική μορφή οι παρακάτω προτάσεις:

1. $\phi \to \psi$
   $\models\!\mid \neg\phi \lor \psi$ (Είναι σε μορφή CNF και DNF.)
2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$
   $\models\!\mid \neg\phi \lor \psi$
3. $(\neg\phi \lor (\phi \to \zeta)) \land (\neg\zeta \lor (\phi \to \psi))$
   $\models\!\mid (\neg\phi \lor \zeta) \land (\neg\zeta \lor \neg\phi \lor \psi)$ (CNF)
   $\models\!\mid (\neg\phi \land \neg\zeta) \lor (\zeta \land \neg\phi) \lor (\zeta \land \psi)$ (Μετά από πράξεις.) (DNF)
4. $(\neg\phi) \lor (\phi \land \psi)$
   $\models\!\mid \neg\phi \lor \psi$ (Μετά από πράξεις.)
5. $(\neg\phi) \to (\psi \land (\zeta \lor \psi))$
   $\models\!\mid \phi \lor \psi$ (Μετά από πράξεις.)

4. Να γραφούν σε κανονική διαζευκτική και κανονική συζευκτική μορφή οι παρακάτω προτάσεις:

1. $\phi \rightarrow \psi$
   $\models\!\mid \neg\phi \vee \psi$ (Είναι σε μορφή CNF και DNF.)
2. $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \psi$
   $\models\!\mid \neg\phi \vee \psi$
3. $(\neg\phi \vee (\phi \rightarrow \zeta)) \wedge (\neg\zeta \vee (\phi \rightarrow \psi))$
   $\models\!\mid (\neg\phi \vee \zeta) \wedge (\neg\zeta \vee \neg\phi \vee \psi)$ (CNF)
   $\models\!\mid (\neg\phi \wedge \neg\zeta) \vee (\zeta \wedge \neg\phi) \vee (\zeta \wedge \psi)$ (Μετά από πράξεις.) (DNF)
4. $(\neg\phi) \vee (\phi \wedge \psi)$
   $\models\!\mid \neg\phi \vee \psi$ (Μετά από πράξεις.)
5. $(\neg\phi) \rightarrow (\psi \wedge (\zeta \vee \psi))$
   $\models\!\mid \phi \vee \psi$ (Μετά από πράξεις.)

4. Να γραφούν σε κανονική διαζευκτική και κανονική συζευκτική μορφή οι παρακάτω προτάσεις:

1. $\phi \to \psi$
   $\models\!\mid \neg\phi \vee \psi$ (Είναι σε μορφή CNF και DNF.)
2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$
   $\models\!\mid \neg\phi \vee \psi$
3. $(\neg\phi \vee (\phi \to \zeta)) \wedge (\neg\zeta \vee (\phi \to \psi))$
   $\models\!\mid (\neg\phi \vee \zeta) \wedge (\neg\zeta \vee \neg\phi \vee \psi)$ (CNF)
   $\models\!\mid (\neg\phi \wedge \neg\zeta) \vee (\zeta \wedge \neg\phi) \vee (\zeta \wedge \psi)$ (Μετά από πράξεις.) (DNF)
4. $(\neg\phi) \vee (\phi \wedge \psi)$
   $\models\!\mid \neg\phi \vee \psi$ (Μετά από πράξεις.)
5. $(\neg\phi) \to (\psi \wedge (\zeta \vee \psi))$
   $\models\!\mid \phi \vee \psi$ (Μετά από πράξεις.)

4. Να γραφούν σε κανονική διαζευκτική και κανονική συζευκτική μορφή οι παρακάτω προτάσεις:

1. $\phi \rightarrow \psi$
   $\models\mid \neg\phi \vee \psi$ (Είναι σε μορφή CNF και DNF.)
2. $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \psi$
   $\models\mid \neg\phi \vee \psi$
3. $(\neg\phi \vee (\phi \rightarrow \zeta)) \wedge (\neg\zeta \vee (\phi \rightarrow \psi))$
   $\models\mid (\neg\phi \vee \zeta) \wedge (\neg\zeta \vee \neg\phi \vee \psi)$ (CNF)
   $\models\mid (\neg\phi \wedge \neg\zeta) \vee (\zeta \wedge \neg\phi) \vee (\zeta \wedge \psi)$ (Μετά από πράξεις.) (DNF)
4. $(\neg\phi) \vee (\phi \wedge \psi)$
   $\models\mid \neg\phi \vee \psi$ (Μετά από πράξεις.)
5. $(\neg\phi) \rightarrow (\psi \wedge (\zeta \vee \psi))$
   $\models\mid \phi \vee \psi$ (Μετά από πράξεις.)

4. Να γραφούν σε κανονική διαζευκτική και κανονική συζευκτική μορφή οι παρακάτω προτάσεις:

1. $\phi \to \psi$
   $\models\mid \neg\phi \vee \psi$ (Είναι σε μορφή CNF και DNF.)
2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$
   $\models\mid \neg\phi \vee \psi$
3. $(\neg\phi \vee (\phi \to \zeta)) \wedge (\neg\zeta \vee (\phi \to \psi))$
   $\models\mid (\neg\phi \vee \zeta) \wedge (\neg\zeta \vee \neg\phi \vee \psi)$ (CNF)
   $\models\mid (\neg\phi \wedge \neg\zeta) \vee (\zeta \wedge \neg\phi) \vee (\zeta \wedge \psi)$ (Μετά από πράξεις.) (DNF)
4. $(\neg\phi) \vee (\phi \wedge \psi)$
   $\models\mid \neg\phi \vee \psi$ (Μετά από πράξεις.)
5. $(\neg\phi) \to (\psi \wedge (\zeta \vee \psi))$
   $\models\mid \phi \vee \psi$ (Μετά από πράξεις.)

4. Να γραφούν σε κανονική διαζευκτική και κανονική συζευκτική μορφή οι παρακάτω προτάσεις:

1. $\phi \to \psi$
   $\models\!\mid \neg\phi \vee \psi$ (Είναι σε μορφή CNF και DNF.)
2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$
   $\models\!\mid \neg\phi \vee \psi$
3. $(\neg\phi \vee (\phi \to \zeta)) \wedge (\neg\zeta \vee (\phi \to \psi))$
   $\models\!\mid (\neg\phi \vee \zeta) \wedge (\neg\zeta \vee \neg\phi \vee \psi)$ (CNF)
   $\models\!\mid (\neg\phi \wedge \neg\zeta) \vee (\zeta \wedge \neg\phi) \vee (\zeta \wedge \psi)$ (Μετά από πράξεις.) (DNF)
4. $(\neg\phi) \vee (\phi \wedge \psi)$
   $\models\!\mid \neg\phi \vee \psi$ (Μετά από πράξεις.)
5. $(\neg\phi) \to (\psi \wedge (\zeta \vee \psi))$
   $\models\!\mid \phi \vee \psi$ (Μετά από πράξεις.)

4. Να γραφούν σε κανονική διαζευκτική και κανονική συζευκτική μορφή οι παρακάτω προτάσεις:

1. $\phi \to \psi$
   $\models\!\mid \neg\phi \lor \psi$ (Είναι σε μορφή CNF και DNF.)
2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$
   $\models\!\mid \neg\phi \lor \psi$
3. $(\neg\phi \lor (\phi \to \zeta)) \land (\neg\zeta \lor (\phi \to \psi))$
   $\models\!\mid (\neg\phi \lor \zeta) \land (\neg\zeta \lor \neg\phi \lor \psi)$ (CNF)
   $\models\!\mid (\neg\phi \land \neg\zeta) \lor (\zeta \land \neg\phi) \lor (\zeta \land \psi)$ (Μετά από πράξεις.) (DNF)
4. $(\neg\phi) \lor (\phi \land \psi)$
   $\models\!\mid \neg\phi \lor \psi$ (Μετά από πράξεις.)
5. $(\neg\phi) \to (\psi \land (\zeta \lor \psi))$
   $\models\!\mid \phi \lor \psi$ (Μετά από πράξεις.)

4. Να γραφούν σε κανονική διαζευκτική και κανονική συζευκτική μορφή οι παρακάτω προτάσεις:

1. $\phi \to \psi$
   $\models\mid \neg\phi \lor \psi$ (Είναι σε μορφή CNF και DNF.)
2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$
   $\models\mid \neg\phi \lor \psi$
3. $(\neg\phi \lor (\phi \to \zeta)) \land (\neg\zeta \lor (\phi \to \psi))$
   $\models\mid (\neg\phi \lor \zeta) \land (\neg\zeta \lor \neg\phi \lor \psi)$ (CNF)
   $\models\mid (\neg\phi \land \neg\zeta) \lor (\zeta \land \neg\phi) \lor (\zeta \land \psi)$ (Μετά από πράξεις.) (DNF)
4. $(\neg\phi) \lor (\phi \land \psi)$
   $\models\mid \neg\phi \lor \psi$ (Μετά από πράξεις.)
5. $(\neg\phi) \to (\psi \land (\zeta \lor \psi))$
   $\models\mid \phi \lor \psi$ (Μετά από πράξεις.)

Ασκήσεις

4. Να γραφούν σε κανονική διαζευκτική και κανονική συζευκτική μορφή οι παρακάτω προτάσεις:

1. $\phi \to \psi$
   $\models\!\!\!\dashv \neg\phi \vee \psi$ (Είναι σε μορφή CNF και DNF.)
2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$
   $\models\!\!\!\dashv \neg\phi \vee \psi$
3. $(\neg\phi \vee (\phi \to \zeta)) \wedge (\neg\zeta \vee (\phi \to \psi))$
   $\models\!\!\!\dashv (\neg\phi \vee \zeta) \wedge (\neg\zeta \vee \neg\phi \vee \psi)$ (CNF)
   $\models\!\!\!\dashv (\neg\phi \wedge \neg\zeta) \vee (\zeta \wedge \neg\phi) \vee (\zeta \wedge \psi)$ (Μετά από πράξεις.) (DNF)
4. $(\neg\phi) \vee (\phi \wedge \psi)$
   $\models\!\!\!\dashv \neg\phi \vee \psi$ (Μετά από πράξεις.)
5. $(\neg\phi) \to (\psi \wedge (\zeta \vee \psi))$
   $\models\!\!\!\dashv \phi \vee \psi$ (Μετά από πράξεις.)

4. Να γραφούν σε κανονική διαζευκτική και κανονική συζευκτική μορφή οι παρακάτω προτάσεις:

1. $\phi \to \psi$
   $\models\!\mid \neg\phi \vee \psi$ (Είναι σε μορφή CNF και DNF.)
2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$
   $\models\!\mid \neg\phi \vee \psi$
3. $(\neg\phi \vee (\phi \to \zeta)) \wedge (\neg\zeta \vee (\phi \to \psi))$
   $\models\!\mid (\neg\phi \vee \zeta) \wedge (\neg\zeta \vee \neg\phi \vee \psi)$ (CNF)
   $\models\!\mid (\neg\phi \wedge \neg\zeta) \vee (\zeta \wedge \neg\phi) \vee (\zeta \wedge \psi)$ (Μετά από πράξεις.) (DNF)
4. $(\neg\phi) \vee (\phi \wedge \psi)$
   $\models\!\mid \neg\phi \vee \psi$ (Μετά από πράξεις.)
5. $(\neg\phi) \to (\psi \wedge (\zeta \vee \psi))$
   $\models\!\mid \phi \vee \psi$ (Μετά από πράξεις.)

5. Να βρεθεί μια πρόταση που περιέχει τα άτομα p_1, p_2, p_3 η οποία είναι αληθής αν και μόνο αν ακριβώς δύο από τα p_1, p_2, p_3 είναι αληθή.

$$\phi = (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$$

5. Να βρεθεί μια πρόταση που περιέχει τα άτομα p_1, p_2, p_3 η οποία είναι αληθής αν και μόνο αν ακριβώς δύο από τα p_1, p_2, p_3 είναι αληθή.

$$\phi = (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$$

6. Να αποδειχθεί ότι ο σύνδεσμος $|$ (που ονομάζεται **σύνδεσμος του Sheffer**) με πίνακα αληθείας

φ	y	$\varphi \| y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

είναι επαρκής για να εκφράσει οποιοδήποτε λογικό σύνδεσμο.

Ασκήσεις

6. Να αποδειχθεί ότι ο σύνδεσμος $|$ είναι επαρκής για να εκφράσει οποιοδήποτε λογικό σύνδεσμο.

Λύση. Αφού ως γνωστό το $\{\neg, \vee, \wedge\}$ είναι επαρκές, αρκεί να εκφραστούν οι τρεις αυτοί σύνδεσμοι συναρτήσει του $|$. Χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία $p|q \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg(p \wedge q)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \neg p &\mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg(p \wedge p) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} p|p \\ p \vee q &\mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg(\neg p \wedge \neg q) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\neg p)|(\neg q) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (p|p)|(q|q) \\ p \wedge q &\mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg\neg(p \wedge q) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg(p|q) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (p|q)|(p|q) \end{aligned}$$

Άρα το μονοσύνολο $\{|\}$ είναι επαρκές.

Το πρόβλημα SAT

Το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας:

Δοθέντος ενός συνόλου Σ λογικών προτάσεων, να ευρεθεί εκτίμηση που να το ικανοποιεί ή η απάντηση ότι δεν υπάρχει τέτοια εκτίμηση.

Δεδομένου ότι κάθε πρόταση μπορεί να γραφεί ισοδύναμα σε CNF μορφή, το παραπάνω πρόβλημα είναι ισοδύναμο με

Το πρόβλημα SAT:

Δοθείσης μιας λογικής πρότασης ϕ σε CNF μορφή, να ευρεθεί εκτίμηση που να την ικανοποιεί ή η απάντηση ότι δεν υπάρχει τέτοια εκτίμηση.

Παρατήρηση:

Αν και στο πρόβλημα SAT ασχολούμαστε μόνο με μια πρόταση, αυτό δεν μειώνει την γενικότητα ή τη δυσκολία του. Αυτό ισχύει διότι αν ένα σύνολο Σ αποτελείται από περισσότερες από μία προτάσεις $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$, τότε γράφοντας κάθε μία από αυτές σε κανονική συζευκτική μορφή $\phi_1', \phi_2', \ldots, \phi_m'$, προκύπτει ότι το Σ είναι ικανοποιησιμο αν και μόνο αν η CNF πρόταση $\phi_1' \wedge \phi_2' \wedge \cdots \wedge \phi_m'$ είναι ικανοποιήσιμη.

Το πρόβλημα 3-SAT

Το πρόβλημα 3-SAT είναι μια ειδική περίπτωση του προβλήματος SAT, όπου κάθε παρένθεση της πρότασης ϕ περιέχει ακριβώς 3 όρους. Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η ϕ είναι σε μορφή 3-CNF.

Παράδειγμα

Η πρόταση

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee p_4)$$

είναι σε μορφή 3-CNF.

Αν και το 3-SAT αποτελεί ειδική περίπτωση του SAT, τελικά είναι ισοδύναμο με το γενικό πρόβλημα SAT, όπως προκύπτει από την αναγωγή που ακολουθεί.

Έστω ϕ μια πρόταση εκφρασμένη σε CNF ως $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_m$, όπου κάθε ϕ_i είναι διάζευξη από άτομα ή και αρνήσεις ατόμων. Μπορούμε για κάθε ϕ_i να κατασκευάσουμε μια λογικά ισοδύναμη διάζευξη με ακριβώς 3 όρους ως εξής:

- Αν η ϕ_i περιέχει έναν ακριβώς όρο, έστω τον p_1, τότε είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση ϕ_i':

  $$(p_1 \vee y_1 \vee y_2) \wedge (p_1 \vee \neg y_1 \vee y_2) \wedge (p_1 \vee y_1 \vee \neg y_2) \wedge (p_1 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2)$$

  όπου y_1, y_2 νέα άτομα.
- Αν η ϕ_i περιέχει 2 όρους, έστω $\phi_i : p_1 \vee p_2$, τότε είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση ϕ_i':

  $$(p_1 \vee p_2 \vee y_1) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee \neg y_1)$$

  όπου y_1 νέο άτομο.

Από το SAT στο 3-SAT

- Αν η ϕ_i περιέχει 3 ακριβώς άτομα, τότε δεν κάνουμε καμία αλλαγή
- Αν η ϕ_i περιέχει 4 ή περισσότερους όρους, έστω $\phi_i : p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_k$, $k > 3$ τότε την αντικαθιστούμε με την πρόταση ϕ_i':

$$
\begin{aligned}
&(p_1 \vee p_2 \vee y_1) \\
\wedge &(\neg y_1 \vee p_3 \vee y_2) \wedge (\neg y_2 \vee p_4 \vee y_3) \wedge \cdots \wedge (\neg y_{k-4} \vee p_{k-2} \vee y_{k-3}) \\
\wedge &(\neg y_{k-3} \vee p_{k-1} \vee p_k)
\end{aligned}
$$

όπου $y_1, \ldots, y_{k-3}$ νέα άτομα.
Εύκολα προκύπτει ότι υπάρχει εκτίμηση που ικανοποιεί την ϕ_i' αν και μόνο αν ο περιορισμός αυτής της εκτίμησης στα $p_1, \ldots, p_k$ ικανοποιεί την ϕ_i.

Από το SAT στο 3-SAT

Άσκηση

Να γραφεί η πρόταση

$$(p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee p_5) \wedge (p_1 \vee \neg p_2)$$

σε μορφή 3-CNF.

Από το SAT στο 3-SAT

Από τα προηγούμενα προκύπτει το συμπέρασμα:

Τα προβλήματα SAT και 3-SAT είναι ισοδύναμα από πλευράς δυσκολίας επίλυσης.

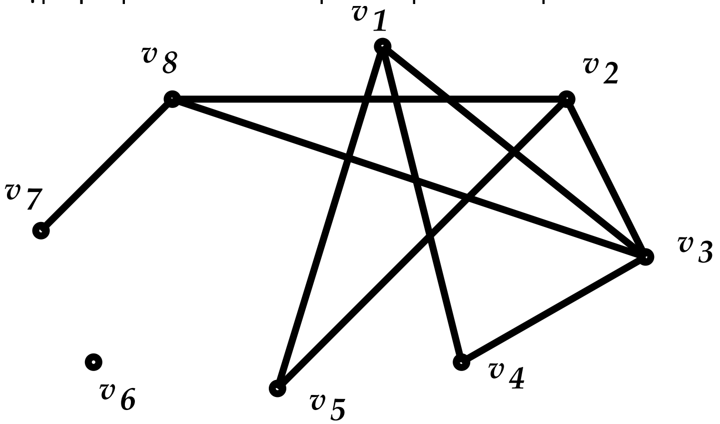
Δηλαδή, παρόλο, που μέχρι σήμερα δεν μπορούμε να τα λύσουμε ''αποδοτικά'', εν τούτοις γνωρίζουμε ότι είναι ισοδύναμα και επομένως αν υπάρξει ένας νέος αλγόριθμος που δίνει ''αποδοτική'' λύση στο πρόβλημα 3-SAT, αυτός θα δώσει ''αποδοτική'' λύση και στο γενικό πρόβλημα SAT.
Η σημασία του προβλήματος SAT **δεν περιορίζεται** στην Λογική και στα λογικά κυκλώματα, όπου προφανώς εμφανίζονται προβλήματα ικανοποιησιμότητας, αλλά αποτελεί την καρδιά του προβλήματος και σε άλλες εφαρμογές της Πληροφορικής.
Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε ορισμένες από αυτές.

Ένα **γράφημα δεσμών** G είναι ένα σύνολο V (τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται **κορυφές**) και ένα σύνολο $E \subseteq V \times V$ ζευγών κορυφών (τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται **δεσμοί** ή ακμές). Οι δεσμοί του E λέμε ότι **ενώνουν** τις κορυφές που περιέχουν.
Η συνηθισμένη αναπαράσταση για ένα γράφημα G είναι η γραφική απεικόνιση του. Κάθε **κορυφή** του V αναπαρίσταται ως ένα **σημείο στο επίπεδο** και κάθε **δεσμός** του G που ενώνει δύο κορυφές ως μια **γραμμή που ενώνει τα αντίστοιχα δύο σημεία** του επιπέδου.

Παράδειγμα Η δυάδα (V, E) όπου

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

και $E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_8\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_8\}, \{v_7, v_8\}\}$ είναι ένα γράφημα δεσμών G. Η γραφική του απεικόνιση είναι η ακόλουθη:

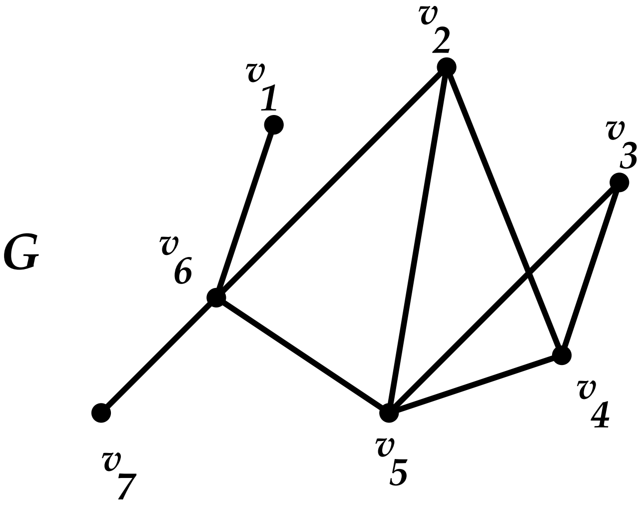


Ανεξάρτητο σύνολο γραφήματος

Συχνά, θα ταυτίζουμε ένα γράφημα με την γραφική του απεικόνιση και θα θεωρούμε τα v_i ως **ονόματα** ή **ετικέτες** των κορυφών του.
Τα γραφήματα αποτελούν την ``γλώσσα'' διατύπωσης πολλών αλγοριθμικών προβλημάτων.
Ένα σύνολο A κορυφών του G ονομάζεται **ανεξάρτητο** αν για κάθε ζεύγος κορυφών v, u που ανήκει στο A δεν υπάρχει υπάρχει δεσμός που τις ενώνει. Οι κορυφές του A ονομάζονται **ανεξάρτητες** και ο αριθμός των κορυφών που ανήκουν στο A ονομάζεται **μέγεθος** του A.

Ανεξάρτητο σύνολο γραφήματος

Παράδειγμα: Για το γράφημα G:



τα σύνολα κορυφών $\{v_1, v_5, v_7\}$ και $\{v_7, v_1, v_2, v_3\}$ είναι ανεξάρτητα με μεγέθη 3 και 4 αντίστοιχα.

Το πρόβλημα του ανεξάρτητου συνόλου

Ένα άλλο γνωστό ``δύσκολο πρόβλημα'' είναι το πρόβλημα του ανεξάρτητου συνόλου (IS: Independent Set), το οποίο έχει την εξής διατύπωση: Δοθέντος ενός γραφήματος $G = (V, E)$ και ενός θετικού ακεραίου k να βρεθεί αν υπάρχει ένα σύνολο k κορυφών $I \subseteq V$, που ανά δύο να μην συνδέονται μεταξύ τους με ακμή.

Η αναγωγή (από το 3-SAT στο IS) που ακολουθεί αποδεικνύει ότι αν μπορούμε να λύσουμε ``αποδοτικά'' το IS το μπορούμε να κάνουμε το ίδιο και για το 3-SAT.

Από το 3-SAT στο IS

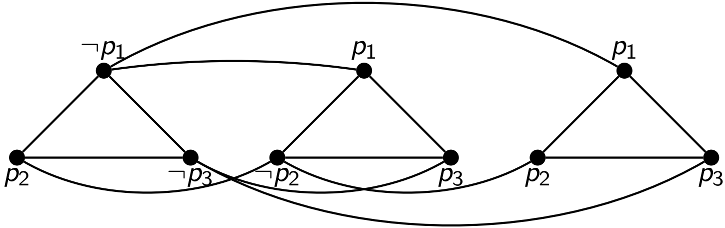
Δίνεται μια πρόταση ϕ σε μορφή 3-CNF $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_m$ και από αυτή θα κατασκευαστεί ένα γράφημα G τέτοιο ώστε κάθε ανεξάρτητο σύνολό του με m στοιχεία να αντιστοιχεί σε μια εκτίμηση που ικανοποιεί την ϕ. Αν δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο, τότε η ϕ δεν είναι ικανοποιήσιμη.

- Θεωρούμε ότι το G είναι αρχικά κενό.
- Για κάθε διαζευκτικό όρο ϕ_i της ϕ, εισάγουμε 3 νέες κορυφές στο γράφημα G με ετικέτες τα ονόματα των όρων της ϕ_i, τις οποίες ενώνουμε ανά δύο σχηματίζοντας ένα τρίγωνο.
  Αφού κάνουμε το ίδιο για κάθε ϕ_i της ϕ, το G είναι ένα γράφημα που αποτελείται από ξένα τρίγωνα.
- Τέλος, ενώνουμε κάθε κορυφή με ετικέτα p_j με κάθε άλλη με ετικέτα $\neg p_j$, και έτσι προκύπτει το τελικό γράφημα.

Για παράδειγμα, αν

$$\phi : (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3),$$

Τότε το γράφημα G που προκύπτει με την παραπάνω διαδικασία είναι το ακόλουθο:



Από το 3-SAT στο IS

- Ένα ανεξάρτητο σύνολο I μεγέθους m θα πρέπει να περιέχει ακριβώς έναν όρο από κάθε τρίγωνο.
- Αν περιέχει τη μεταβλητή p_i, δεν μπορεί να περιέχει την άρνησή της $\neg p_i$, και αντίστροφα. Στην πρώτη περίπτωση θέτουμε $v(p_i) = 1$, αλλιώς $v(p_i) = 0$.
- Σε κάθε μεταβλητή p_j που δεν εμφανίζεται η ίδια ούτε και η άρνησή της στο I μπορούμε να δώσουμε αυθαίρετη εκτίμηση $v(p_j)$.
- Έτσι, παίρνουμε την ζητούμενη εκτίμηση v που θα ικανοποιεί την ϕ. Αν η ϕ δεν ικανοποιείται, τότε δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο I.

Από το 3-SAT στο IS

Άσκηση

Για την πρόταση ϕ :

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

να κατασκευαστεί το αντίστοιχο γράφημα G και να βρεθεί μια εκτίμηση που την ικανοποιεί, αν υπάρχει.

Από το 3-SAT στο IS

Κατόπιν, αυτού προκύπτει ότι:

Το πρόβλημα του ανεξάρτητου συνόλου είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο το SAT και ένας γρήγορος αλγόριθμος που λύνει το πρώτο μπορεί να μετασχηματιστεί σε έναν γρήγορο αλγόριθμο για το δεύτερο.

Με τον ίδιο τρόπο, με κατάλληλες αναγωγές (μετασχηματισμούς), μπορεί να δειχθεί ότι μια μεγάλη γκάμα "δύσκολων" αλλά σημαντικών προβλημάτων είναι ισοδύναμα υπολογιστικά, και η "αποδοτική" λύση για κάποιο από αυτά θα οδηγούσε στην "αποδοτική" λύση όλων των υπολοίπων.

Ασκήσεις

1. Να μετασχηματισθούν σε μορφή 3-SAT οι τύποι:

   1. $\phi \to \psi$

      $\phi \to \psi \models\!\!\!\!= \neg\phi \lor \psi \models\!\!\!\!= (\neg\phi \lor \psi \lor y_1) \land (\neg\phi \lor \psi \lor \neg y_1)$

   2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$

      Από τον πίνακα αληθείας προκύπτει ότι $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi \models\!\!\!\!= \phi \to \psi$, οπότε η λύση είναι ίδια με την προηγούμενη.

   3. $(\neg\phi \lor (\phi \to \zeta)) \land (\neg\zeta \lor (\phi \to \psi))$

      $\models\!\!\!\!= (\neg\phi \lor \zeta \lor y) \land (\neg\phi \lor \zeta \lor \neg y) \land (\neg\zeta \lor \neg\phi \lor \psi)$

   4. $(\neg\phi) \lor (\phi \land \psi)$

      $\models\!\!\!\!= (\neg\phi \lor \phi) \land (\neg\phi \lor \psi) \models\!\!\!\!= \neg\phi \lor \psi \models\!\!\!\!= (\neg\phi \lor \psi \lor y_1) \land (\neg\phi \lor \psi \lor \neg y_1)$

   5. $(\neg\phi) \to (\psi \land (\zeta \lor \psi))$

      $\models\!\!\!\!= \phi \lor ((\psi \land \zeta) \lor \psi) \models\!\!\!\!= \phi \lor \psi \models\!\!\!\!= (\phi \lor \psi \lor y_1) \land (\phi \lor \psi \lor \neg y_1)$

Ασκήσεις

1. Να μετασχηματισθούν σε μορφή 3-SAT οι τύποι:

   1. $\phi \to \psi$
      $\phi \to \psi \models\!\!\!\!\!= \neg\phi \vee \psi \models\!\!\!\!\!= (\neg\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\neg\phi \vee \psi \vee \neg y_1)$
   2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$
      Από τον πίνακα αληθείας προκύπτει ότι
      $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi \models\!\!\!\!\!= \phi \to \psi$, οπότε η λύση είναι ίδια με την προηγούμενη.
   3. $(\neg\phi \vee (\phi \to \zeta)) \wedge (\neg\zeta \vee (\phi \to \psi))$
      $\models\!\!\!\!\!= (\neg\phi \vee \zeta \vee y) \wedge (\neg\phi \vee \zeta \vee \neg y) \wedge (\neg\zeta \vee \neg\phi \vee \psi)$
   4. $(\neg\phi) \vee (\phi \wedge \psi)$
      $\models\!\!\!\!\!= (\neg\phi \vee \phi) \wedge (\neg\phi \vee \psi) \models\!\!\!\!\!= \neg\phi \vee \psi \models\!\!\!\!\!= (\neg\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\neg\phi \vee \psi \vee \neg y_1)$
   5. $(\neg\phi) \to (\psi \wedge (\zeta \vee \psi))$
      $\models\!\!\!\!\!= \phi \vee ((\psi \wedge \zeta) \vee \psi) \models\!\!\!\!\!= \phi \vee \psi \models\!\!\!\!\!= (\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\phi \vee \psi \vee \neg y_1)$

1. Να μετασχηματισθούν σε μορφή 3-SAT οι τύποι:

   1. $\phi \to \psi$
   $\phi \to \psi \models\!\!\!\!| \neg\phi \vee \psi \models\!\!\!\!| (\neg\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\neg\phi \vee \psi \vee \neg y_1)$
   2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$
   Από τον πίνακα αληθείας προκύπτει ότι
   $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi \models\!\!\!\!| \phi \to \psi$, οπότε η λύση είναι ίδια με την προηγούμενη.
   3. $(\neg\phi \vee (\phi \to \zeta)) \wedge (\neg\zeta \vee (\phi \to \psi))$
   $\models\!\!\!\!| (\neg\phi \vee \zeta \vee y) \wedge (\neg\phi \vee \zeta \vee \neg y) \wedge (\neg\zeta \vee \neg\phi \vee \psi)$
   4. $(\neg\phi) \vee (\phi \wedge \psi)$
   $\models\!\!\!\!| (\neg\phi \vee \phi) \wedge (\neg\phi \vee \psi) \models\!\!\!\!| \neg\phi \vee \psi \models\!\!\!\!| (\neg\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\neg\phi \vee \psi \vee \neg y_1)$
   5. $(\neg\phi) \to (\psi \wedge (\zeta \vee \psi))$
   $\models\!\!\!\!| \phi \vee ((\psi \wedge \zeta) \vee \psi) \models\!\!\!\!| \phi \vee \psi \models\!\!\!\!| (\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\phi \vee \psi \vee \neg y_1)$

1. Να μετασχηματισθούν σε μορφή 3-SAT οι τύποι:
   1. $\phi \rightarrow \psi$
      $\phi \rightarrow \psi \models\!\!\!\!\Dashv \neg\phi \lor \psi \models\!\!\!\!\Dashv (\neg\phi \lor \psi \lor y_1) \land (\neg\phi \lor \psi \lor \neg y_1)$
   2. $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \psi$
      Από τον πίνακα αληθείας προκύπτει ότι $((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \psi \models\!\!\!\!\Dashv \phi \rightarrow \psi$, οπότε η λύση είναι ίδια με την προηγούμενη.
   3. $(\neg\phi \lor (\phi \rightarrow \zeta)) \land (\neg\zeta \lor (\phi \rightarrow \psi))$
      $\models\!\!\!\!\Dashv (\neg\phi \lor \zeta \lor y) \land (\neg\phi \lor \zeta \lor \neg y) \land (\neg\zeta \lor \neg\phi \lor \psi)$
   4. $(\neg\phi) \lor (\phi \land \psi)$
      $\models\!\!\!\!\Dashv (\neg\phi \lor \phi) \land (\neg\phi \lor \psi) \models\!\!\!\!\Dashv \neg\phi \lor \psi \models\!\!\!\!\Dashv (\neg\phi \lor \psi \lor y_1) \land (\neg\phi \lor \psi \lor \neg y_1)$
   5. $(\neg\phi) \rightarrow (\psi \land (\zeta \lor \psi))$
      $\models\!\!\!\!\Dashv \phi \lor ((\psi \land \zeta) \lor \psi) \models\!\!\!\!\Dashv \phi \lor \psi \models\!\!\!\!\Dashv (\phi \lor \psi \lor y_1) \land (\phi \lor \psi \lor \neg y_1)$

1. Να μετασχηματισθούν σε μορφή 3-SAT οι τύποι:

   1. $\phi \to \psi$
      $\phi \to \psi \models\!\mid \neg\phi \vee \psi \models\!\mid (\neg\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\neg\phi \vee \psi \vee \neg y_1)$
   2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$
      Από τον πίνακα αληθείας προκύπτει ότι
      $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi \models\!\mid \phi \to \psi$, οπότε η λύση είναι ίδια με την προηγούμενη.
   3. $(\neg\phi \vee (\phi \to \zeta)) \wedge (\neg\zeta \vee (\phi \to \psi))$
      $\models\!\mid (\neg\phi \vee \zeta \vee y) \wedge (\neg\phi \vee \zeta \vee \neg y) \wedge (\neg\zeta \vee \neg\phi \vee \psi)$
   4. $(\neg\phi) \vee (\phi \wedge \psi)$
      $\models\!\mid (\neg\phi\vee\phi)\wedge(\neg\phi\vee\psi) \models\!\mid \neg\phi\vee\psi \models\!\mid (\neg\phi\vee\psi\vee y_1)\wedge(\neg\phi\vee\psi\vee\neg y_1)$
   5. $(\neg\phi) \to (\psi \wedge (\zeta \vee \psi))$
      $\models\!\mid \phi \vee ((\psi \wedge \zeta) \vee \psi) \models\!\mid \phi \vee \psi \models\!\mid (\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\phi \vee \psi \vee \neg y_1)$

Ασκήσεις

1. Να μετασχηματισθούν σε μορφή 3-SAT οι τύποι:

1. $\phi \to \psi$
   $\phi \to \psi \models\!\!\!\mid \neg\phi \lor \psi \models\!\!\!\mid (\neg\phi \lor \psi \lor y_1) \land (\neg\phi \lor \psi \lor \neg y_1)$
2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$
   Από τον πίνακα αληθείας προκύπτει ότι
   $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi \models\!\!\!\mid \phi \to \psi$, οπότε η λύση είναι ίδια με την προηγούμενη.
3. $(\neg\phi \lor (\phi \to \zeta)) \land (\neg\zeta \lor (\phi \to \psi))$
   $\models\!\!\!\mid (\neg\phi \lor \zeta \lor y) \land (\neg\phi \lor \zeta \lor \neg y) \land (\neg\zeta \lor \neg\phi \lor \psi)$
4. $(\neg\phi) \lor (\phi \land \psi)$
   $\models\!\!\!\mid (\neg\phi\lor\phi)\land(\neg\phi\lor\psi) \models\!\!\!\mid \neg\phi\lor\psi \models\!\!\!\mid (\neg\phi\lor\psi\lor y_1)\land(\neg\phi\lor\psi\lor\neg y_1)$
5. $(\neg\phi) \to (\psi \land (\zeta \lor \psi))$
   $\models\!\!\!\mid \phi \lor ((\psi \land \zeta) \lor \psi) \models\!\!\!\mid \phi \lor \psi \models\!\!\!\mid (\phi \lor \psi \lor y_1) \land (\phi \lor \psi \lor \neg y_1)$

Ασκήσεις

1. Να μετασχηματισθούν σε μορφή 3-SAT οι τύποι:

   1. $\phi \to \psi$
      $\phi \to \psi \models\!\mid \neg\phi \vee \psi \models\!\mid (\neg\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\neg\phi \vee \psi \vee \neg y_1)$
   2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$
      Από τον πίνακα αληθείας προκύπτει ότι
      $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi \models\!\mid \phi \to \psi$, οπότε η λύση είναι ίδια με την προηγούμενη.
   3. $(\neg\phi \vee (\phi \to \zeta)) \wedge (\neg\zeta \vee (\phi \to \psi))$
      $\models\!\mid (\neg\phi \vee \zeta \vee y) \wedge (\neg\phi \vee \zeta \vee \neg y) \wedge (\neg\zeta \vee \neg\phi \vee \psi)$
   4. $(\neg\phi) \vee (\phi \wedge \psi)$
      $\models\!\mid (\neg\phi \vee \phi) \wedge (\neg\phi \vee \psi) \models\!\mid \neg\phi \vee \psi \models\!\mid (\neg\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\neg\phi \vee \psi \vee \neg y_1)$
   5. $(\neg\phi) \to (\psi \wedge (\zeta \vee \psi))$
      $\models\!\mid \phi \vee ((\psi \wedge \zeta) \vee \psi) \models\!\mid \phi \vee \psi \models\!\mid (\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\phi \vee \psi \vee \neg y_1)$

Ασκήσεις

1. Να μετασχηματισθούν σε μορφή 3-SAT οι τύποι:
   1. $\phi \to \psi$
      $\phi \to \psi \models\!\!\!\mid \neg\phi \lor \psi \models\!\!\!\mid (\neg\phi \lor \psi \lor y_1) \land (\neg\phi \lor \psi \lor \neg y_1)$
   2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$
      Από τον πίνακα αληθείας προκύπτει ότι
      $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi \models\!\!\!\mid \phi \to \psi$, οπότε η λύση είναι ίδια με την προηγούμενη.
   3. $(\neg\phi \lor (\phi \to \zeta)) \land (\neg\zeta \lor (\phi \to \psi))$
      $\models\!\!\!\mid (\neg\phi \lor \zeta \lor y) \land (\neg\phi \lor \zeta \lor \neg y) \land (\neg\zeta \lor \neg\phi \lor \psi)$
   4. $(\neg\phi) \lor (\phi \land \psi)$
      $\models\!\!\!\mid (\neg\phi \lor \phi) \land (\neg\phi \lor \psi) \models\!\!\!\mid \neg\phi \lor \psi \models\!\!\!\mid (\neg\phi \lor \psi \lor y_1) \land (\neg\phi \lor \psi \lor \neg y_1)$
   5. $(\neg\phi) \to (\psi \land (\zeta \lor \psi))$
      $\models\!\!\!\mid \phi \lor ((\psi \land \zeta) \lor \psi) \models\!\!\!\mid \phi \lor \psi \models\!\!\!\mid (\phi \lor \psi \lor y_1) \land (\phi \lor \psi \lor \neg y_1)$

1. Να μετασχηματισθούν σε μορφή 3-SAT οι τύποι:

   1. $\phi \to \psi$
      $\phi \to \psi \equiv \neg\phi \vee \psi \equiv (\neg\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\neg\phi \vee \psi \vee \neg y_1)$
   2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$
      Από τον πίνακα αληθείας προκύπτει ότι $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi \equiv \phi \to \psi$, οπότε η λύση είναι ίδια με την προηγούμενη.
   3. $(\neg\phi \vee (\phi \to \zeta)) \wedge (\neg\zeta \vee (\phi \to \psi))$
      $\equiv (\neg\phi \vee \zeta \vee y) \wedge (\neg\phi \vee \zeta \vee \neg y) \wedge (\neg\zeta \vee \neg\phi \vee \psi)$
   4. $(\neg\phi) \vee (\phi \wedge \psi)$
      $\equiv (\neg\phi \vee \phi) \wedge (\neg\phi \vee \psi) \equiv \neg\phi \vee \psi \equiv (\neg\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\neg\phi \vee \psi \vee \neg y_1)$
   5. $(\neg\phi) \to (\psi \wedge (\zeta \vee \psi))$
      $\equiv \phi \vee ((\psi \wedge \zeta) \vee \psi) \equiv \phi \vee \psi \equiv (\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\phi \vee \psi \vee \neg y_1)$

1. Να μετασχηματισθούν σε μορφή 3-SAT οι τύποι:
   1. $\phi \to \psi$
      $\phi \to \psi \models\!\!\!\!\!= \neg\phi \vee \psi \models\!\!\!\!\!= (\neg\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\neg\phi \vee \psi \vee \neg y_1)$
   2. $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi$
      Από τον πίνακα αληθείας προκύπτει ότι
      $((\phi \to \psi) \to \phi) \to \psi \models\!\!\!\!\!= \phi \to \psi$, οπότε η λύση είναι ίδια με την προηγούμενη.
   3. $(\neg\phi \vee (\phi \to \zeta)) \wedge (\neg\zeta \vee (\phi \to \psi))$
      $\models\!\!\!\!\!= (\neg\phi \vee \zeta \vee y) \wedge (\neg\phi \vee \zeta \vee \neg y) \wedge (\neg\zeta \vee \neg\phi \vee \psi)$
   4. $(\neg\phi) \vee (\phi \wedge \psi)$
      $\models\!\!\!\!\!= (\neg\phi\vee\phi)\wedge(\neg\phi\vee\psi) \models\!\!\!\!\!= \neg\phi\vee\psi \models\!\!\!\!\!= (\neg\phi\vee\psi\vee y_1)\wedge(\neg\phi\vee\psi\vee\neg y_1)$
   5. $(\neg\phi) \to (\psi \wedge (\zeta \vee \psi))$
      $\models\!\!\!\!\!= \phi \vee ((\psi \wedge \zeta) \vee \psi) \models\!\!\!\!\!= \phi \vee \psi \models\!\!\!\!\!= (\phi \vee \psi \vee y_1) \wedge (\phi \vee \psi \vee \neg y_1)$

Ασκήσεις

2. Να μετασχηματισθεί το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας του συνόλου:

$$\Sigma = \{\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, \neg p_2, p_2 \to p_1, (p_3 \wedge p_2) \to p_4, \\ \neg p_4 \vee \neg p_5, (p_4 \vee p_1) \to p_2\}$$

σε μορφή SAT, στη συνέχεια σε μορφή 3-SAT και τέλος στο πρόβλημα του ανεξάρτητου συνόλου.

$$\begin{aligned}
\Sigma \models\!\!\!\mid\; & (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_2) \wedge (\neg p_2 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_2 \vee p_4) \\
& \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_4 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \\
\models\!\!\!\mid\; & (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_2 \vee y_1 \vee y_2) \wedge (\neg p_2 \vee y_1 \vee \neg y_2) \\
& \wedge (\neg p_2 \vee \neg y_1 \vee y_2) \wedge (\neg p_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2) \\
& \wedge (\neg p_2 \vee p_1 \vee y_1) \wedge (\neg p_2 \vee p_1 \vee \neg y_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_2 \vee p_4) \\
& \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee y_1) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg y_1) \\
& \wedge (\neg p_4 \vee p_2 \vee y_1) \wedge (\neg p_4 \vee p_2 \vee \neg y_1) \\
& \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee y_1) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg y_1)
\end{aligned}$$

2. Να μετασχηματισθεί το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας του συνόλου:

$$\Sigma = \{\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5, \neg p_2, p_2 \rightarrow p_1, (p_3 \wedge p_2) \rightarrow p_4, \\ \neg p_4 \vee \neg p_5, (p_4 \vee p_1) \rightarrow p_2\}$$

σε μορφή SAT, στη συνέχεια σε μορφή 3-SAT και τέλος στο πρόβλημα του ανεξάρτητου συνόλου.

$$\begin{aligned}
\Sigma \models\!\!\mid\ & (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_2) \wedge (\neg p_2 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_2 \vee p_4) \\
& \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_4 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \\
\models\!\!\mid\ & (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_2 \vee y_1 \vee y_2) \wedge (\neg p_2 \vee y_1 \vee \neg y_2) \\
& \wedge (\neg p_2 \vee \neg y_1 \vee y_2) \wedge (\neg p_2 \vee \neg y_1 \vee \neg y_2) \\
& \wedge (\neg p_2 \vee p_1 \vee y_1) \wedge (\neg p_2 \vee p_1 \vee \neg y_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_2 \vee p_4) \\
& \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee y_1) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg y_1) \\
& \wedge (\neg p_4 \vee p_2 \vee y_1) \wedge (\neg p_4 \vee p_2 \vee \neg y_1) \\
& \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee y_1) \wedge (\neg p_1 \vee p_2 \vee \neg y_1)
\end{aligned}$$

3. Ένα σύνολο κορυφών A ενός γραφήματος ονομάζεται **κλίκα** αν για κάθε ζεύγος κορυφών που ανήκει στο A υπάρχει δεσμός που τις ενώνει.
Να δειχθεί ότι τα προβλήματα του ανεξάρτητου συνόλου και της εύρεσης μιας κλίκας είναι ισοδύναμα.
Λύση. Αν $G = (V, E)$ είναι ένα γράφημα δεσμών, το συμπληρωματικό του γράφημα $G' = (V, E')$ είναι το γράφημα με $\{v, w\} \in E' \Leftrightarrow \{v, w\} \notin E$, δηλαδή προκύπτει από το G διαγράφοντας κάθε δεσμό του G και προσθέτοντας κάθε δεσμό που δεν υπάρχει στο G.
Προφανώς, κάθε ανεξάρτητο σύνολο του G αντιστοιχεί σε μια ακριβώς κλίκα του G' και αντίστροφα. Επομένως η εύρεση ενός ανεξάρτητου συνόλου στο G ανάγεται στην εύρεση μιας κλίκας στο G'.

3. Ένα σύνολο κορυφών A ενός γραφήματος ονομάζεται **κλίκα** αν για κάθε ζεύγος κορυφών που ανήκει στο A υπάρχει δεσμός που τις ενώνει.
Να δειχθεί ότι τα προβλήματα του ανεξάρτητου συνόλου και της εύρεσης μιας κλίκας είναι ισοδύναμα.
Λύση. Αν $G = (V, E)$ είναι ένα γράφημα δεσμών, το συμπληρωματικό του γράφημα $G' = (V, E')$ είναι το γράφημα με $\{v, w\} \in E' \Leftrightarrow \{v, w\} \notin E$, δηλαδή προκύπτει από το G διαγράφοντας κάθε δεσμό του G και προσθέτοντας κάθε δεσμό που δεν υπάρχει στο G.
Προφανώς, κάθε ανεξάρτητο σύνολο του G αντιστοιχεί σε μια ακριβώς κλίκα του G' και αντίστροφα. Επομένως η εύρεση ενός ανεξάρτητου συνόλου στο G ανάγεται στην εύρεση μιας κλίκας στο G'.

4. Να διατυπωθεί αλγόριθμος, ο οποίος επιλύει το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας για κάθε πρόταση σε μορφή DNF.

Λύση. Μια πρόταση ϕ σε μορφή DNF είναι ικανοποιήσιμη ανν περιέχει μια ικανοποιήσιμη σύζευξη, ανν περιέχει μια σύζευξη χωρίς αντίθετους όρους.

Ο αλγόριθμος διαβάζει τη ϕ από αριστερά προς τα δεξιά μέχρι να εντοπίσει την πρώτη τέτοια σύζευξη ϕ_i. Αν δεν υπάρχει, τότε απαντά ότι η πρόταση δεν είναι ικανοποιήσιμη. Αλλιώς, θέτει αληθή κάθε όρο p_k της ϕ_i και ψευδή κάθε όρο $\neg p_k$ και αληθείς όλους τους υπόλοιπους.

4. Να διατυπωθεί αλγόριθμος, ο οποίος επιλύει το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας για κάθε πρόταση σε μορφή DNF.
Λύση. Μια πρόταση ϕ σε μορφή DNF είναι ικανοποιήσιμη ανν περιέχει μια ικανοποιήσιμη σύζευξη, ανν περιέχει μια σύζευξη χωρίς αντίθετους όρους.
Ο αλγόριθμος διαβάζει τη ϕ από αριστερά προς τα δεξιά μέχρι να εντοπίσει την πρώτη τέτοια σύζευξη ϕ_i. Αν δεν υπάρχει, τότε απαντά ότι η πρόταση δεν είναι ικανοποιήσιμη. Αλλιώς, θέτει αληθή κάθε όρο p_k της ϕ_i και ψευδή κάθε όρο $\neg p_k$ και αληθείς όλους τους υπόλοιπους.