ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Εισαγωγή στη Ασαφή Λογική

Πτυχιακή εργασία

Κωνσταντίνος Μαυρίκας – Π/08081

Υπό της επίβλεψη του Επίκουρου Καθηγητή
Δημητρίου Αποστόλου

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Δημήτριο Αποστόλου για την προθυμία που έδειξε από την πρώτη στιγμή που τον προσέγγισα, καθώς επίσης και για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε δίνοντας μου μια εργασία σε ένα δύσκολο, αλλά και πολύ ενδιαφέρον αντικείμενο. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, που με στήριξαν σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, παρά τις όποιες δυσκολίες. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω όλους όσους αφιέρωσαν το χρόνο τους, στο να διαβάσουν αυτή την εργασία, και να εκφράσουν τη γνώμη και τις παρατηρήσεις τους.

Σύνοψη

Η εργασία αυτή έχει σκοπό να παρουσιάσει τις βασικές αρχές και μεθόδους που υπάρχουν στην ασαφή λογική. Μετά την ανάγνωση αυτής, ο αναγνώστης θα πρέπει να είναι σε θέση να κατανοήσει τον τρόπο που λειτουργούν τα συστήματα ασαφούς λογικής, και να μπορεί να επιλύσει προβλήματα αυτής της φύσης.

Η εργασία παρουσιάζει τη μέθοδο της ασαφούς συλλογιστικής, αφού πρώτα προηγηθούν οι απαραίτητες γνώσεις, για την κατανόηση της. Υπάρχει εκτενής χρήση παραδειγμάτων, έτσι ώστε ο αναγνώστης να καταλάβει εύκολα της μεθόδους που παρουσιάζονται.

Κωνσταντίνος Μαυρίκας

Τμήμα Πληροφορικής

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

B.Sc. Thesis

Title: Introduction to fuzzy logic

Abstract

This thesis haw the objective of presenting the basic principles and methods that exist in fuzzy logic. After reading this thesis, the reader should be able to understand the way fuzzy logic systems function, and also solve problems of such nature

This thesis presents the method of fuzzy reasoning, providing first the required knowledge, for it to be understood. There is an extensive use of examples, so that the reader will be able to easily understand the methods presented.

Konstantinos Mavrikas

Department of Computer Science

University of Piraeus

Περιεχόμενα

1.Εισαγωγή

1.1.Η Ασαφής Λογική

Όλοι έχουμε δει ταινίες επιστημονικής φαντασίας, όπου μηχανές και ρομπότ σκέφτονται και εκφράζονται ως άνθρωποι. Όσοι όμως έχουν ενασχοληθεί με την επιστήμη της Πληροφορικής, γνωρίζουν πως οι υπολογιστές λειτουργούν απόλυτα, και σίγουρα όχι με τον γενικό τρόπο που λειτουργούν οι άνθρωποι.

Λιγότεροι όμως, είναι αυτοί που γνωρίζουν ότι στην καθημερινότητα μας υπάρχουν μηχανήματα που λαμβάνουν αποφάσεις όπως θα έκανε και ένας άνθρωπος. Αυτές οι μηχανές μπορεί να είναι από πλυντήρια στο σπίτι μας μέχρι και τους συρμούς του μετρό που χρησιμοποιούμε καθημερινά.

Ο τρόπος που καταφέρνουν να «σκεφτούν» έξυπνα, σαν άνθρωποι, είναι επειδή έχουν συστήματα ασαφούς λογικής.

Τα συστήματα αυτά αποτελούν κλάδο της Τεχνητής Νοημοσύνης και, παρότι αρκετά πρόσφατος, υπάρχει ένα καλό θεωρητικό υπόβαθρο να τον υποστηρίξει.

1.2.Σκοπός της Εργασίας

Η εργασία αυτή έχει σκοπό να παρουσιάσει τις βασικές αρχές και μεθόδους που υπάρχουν στην ασαφή λογική. Μετά την ανάγνωση αυτής, ο αναγνώστης θα πρέπει να είναι σε θέση να κατανοήσει τον τρόπο που λειτουργούν τα συστήματα ασαφούς λογικής, και να μπορεί να επιλύσει προβλήματα αυτής της φύσης.

Η εμβάθυνση σε μεθόδους αλλά και στον προγραμματισμό και το σχεδιασμό αυτών των συστημάτων, δεν αποτελεί σκοπό αυτής της εργασίας, καθώς ξεφεύγει από τα πλαίσια μιας εισαγωγής.

1.3.Δομή της εργασίας

Η συγκεκριμένη εργασία παρέχει το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο στον αναγνώστη, ώστε να μπορεί να κατανοήσει τα όσα παρουσιαστούν. Θεωρείται ότι ο αναγνώστης έχει βασικές γνώσεις στη θεωρία συνόλων, καθώς επίσης και μια σχετική εξοικείωση με την επιστήμη της πληροφορικής.

Η εργασία παρουσιάζει τη μέθοδο της ασαφούς συλλογιστικής, αφού πρώτα προηγηθούν οι απαραίτητες γνώσεις, για την κατανόηση της. Υπάρχει εκτενής χρήση παραδειγμάτων, έτσι ώστε ο αναγνώστης να καταλάβει εύκολα τις μεθόδους που παρουσιάζονται.

2.Θεωρητικό Υπόβαθρο

Στην Τεχνητή Νοημοσύνη και γενικότερα στην επιστήμη της Πληροφορικής, ο όρος Λογική έχει μια ιδιαίτερη σημασία, και παρουσιάζει με ξεκάθαρο και απόλυτο τρόπο αν ένα γεγονός είναι αληθές ή ψευδές. Για παράδειγμα, αν ένα άτομο είναι άνδρας μπορεί να προσδιοριστεί από μια μεταβλητή που θα παίρνει τη τιμή ΑΛΗΘΕΣ (TRUE) και αν είναι γυναίκα τη τιμή ΨΕΥΔΕΣ (FALSE).

Αλλά, στον κόσμο μας οι περιπτώσεις που μπορούμε να έχουμε τέτοιους σαφείς προσδιορισμούς είναι μάλλον περιορισμένες. Συνήθως, για να κατηγοριοποιήσουμε τον κόσμο γύρω μας και τα διάφορα γεγονότα που συμβαίνουν σε αυτόν, κάνουμε σχετικά αυθαίρετες μετρήσεις και βγάζουμε αποτελέσματα «στο περίπου». Για παράδειγμα, όταν βλέπουμε έναν άνθρωπο μπορούμε ότι είναι ψηλός, κανονικός ή κοντός χωρίς να χρειαστεί να έχουμε ακριβή γνώση του ύψους του. Όμως ένας υπολογιστής δεν μπορεί να βγάλει ένα αποτέλεσμα αν δεν έχει σαφή δεδομένα. Έτσι, βάσει της παραδοσιακής λογικής, ο υπολογιστής θα κατέληγε σε μια κατηγοριοποίηση ως εξής: κάτω από 1.65 → κοντός, από 1.66 έως 1.84 → κανονικός, από 1.85 και πάνω → ψηλός.

Όμως για έναν άνθρωπο αυτά τα όρια δεν είναι απόλυτα, και είναι προφανές πως ένα άτομο με ύψος 1.84 θεωρείται επίσης ψηλό. Εδώ λοιπόν έχουμε ένα απλό παράδειγμα, για τη διαφορά στην ανθρώπινη αντίληψη του κόσμου με αυτή του υπολογιστή, με την τελευταία να είναι πολύ πιο περιορισμένη.

Τη λύση σε αυτό το πρόβλημα παρουσίασε το 1965 ο Zadeh, με τη μορφή των Ασαφών Συνόλων. Βάσει αυτής της θεωρίας ένα γεγονός ή μια μέτρηση, δεν ανήκει σε ένα μόνο σύνολο, αλλά σε πολλά, με διαφορετικό βαθμό συμμετοχής στο κάθε ένα από αυτά.

Οπότε, βάσει της παραπάνω θεωρίας, ένα άτομο με ύψος 1.85 ανήκει στο σύνολο των ψηλών ανθρώπων με βαθμό συμμετοχής 1, ένα άτομο με ύψος 1.63 με βαθμό συμμετοχής 0, και ένα άτομο με ύψος 1.84 με βαθμό συμμετοχής 0.9. Ταυτόχρονα το άτομο με το ύψος 1.84 έχει βαθμό συμμετοχής 0.8 στο σύνολο κανονικός και 0 στο σύνολο κοντός.

Η παραπάνω διαδικασία επέτρεψε σε ένα νέο είδος Λογικής να δημιουργηθεί στην Τεχνητή Νοημοσύνη, αυτό της Ασαφούς Λογικής, και επέτρεψε στους υπολογιστές να «αντιληφθούν» τον κόσμο, όπως και οι άνθρωποι.

3.Ασαφή Σύνολα

3.1.Θεωρία Ασαφών Συνόλων

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, η βασική ιδέα που διέπει την Ασαφή Λογική, είναι αυτή των Ασαφών Συνόλων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε λίγο καλύτερα τι είναι τα ασαφή σύνολα, τι ιδιότητες έχουν και ποιες είναι οι διαφορές και οι ομοιότητες τους με τα σύνολα που ξέρουμε από την Άλγεβρα.

Ένα σύνολο ορίζεται από τις κοινές ιδιότητες των μελών του. Για παράδειγμα, το σύνολο των κόκκινων φρούτων ορίζεται από το χρώμα ενός αντικειμένου, καθώς επίσης και από το αν είναι φρούτο. Οπότε, εξετάζοντας μονάχα αυτά τα δύο χαρακτηριστικά ενός αντικειμένου, μπορούμε να δούμε εάν ανήκει σε αυτό το σύνολο.

Τα σύνολα αυτά, μας επιτρέπουν να κάνουμε σαφείς διαχωρισμούς των αντικειμένων που εξετάζουμε και να βγάλουμε ξεκάθαρα αποτελέσματα. Συχνά όμως, η φύση των αντικειμένων προς εξέταση ή οι συνθήκες που επικρατούν, μπορούν να εμποδίσουν την εξαγωγή ακριβών συμπερασμάτων. Κάτι τέτοιο, για παράδειγμα, μπορεί να συμβεί όταν υπάρχει κάποια μικρή βλάβη στον εξοπλισμό μας, ή όταν το εξεταζόμενο αντικείμενο έχει αλλοιωθεί ή βρίσκεται πολύ μακριά. Τέτοια παραδείγματα μπορούμε να βρούμε σε επιστήμες όπως η παλαιοντολογία, για την αναγνώριση ενός απολιθώματος, ή η αστρονομία, για την αναγνώριση της φύσεως ενός αστρικού σώματος.

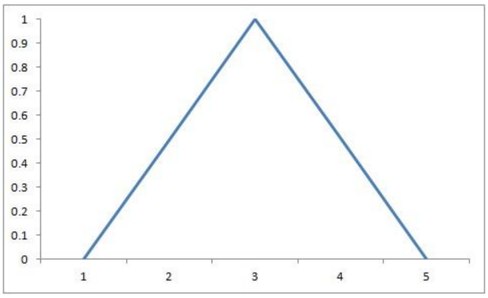
Ταυτόχρονα, υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες, τα ξεκάθαρα όρια που παρέχουν τα κλασσικά σύνολα, είναι υπερβολικά απόλυτα. Ένα τέτοιο παράδειγμα εξετάστηκε στην εισαγωγή, με το κριτήριο του αν κάποιος είναι ψηλός, κανονικός ή κοντός.

Η εξάλειψη των προβλημάτων που αναφέρθηκαν, ανεξάρτητα από το ποια είναι η αιτία τους, είναι δυνατή χάρη στα Ασαφή Σύνολα.

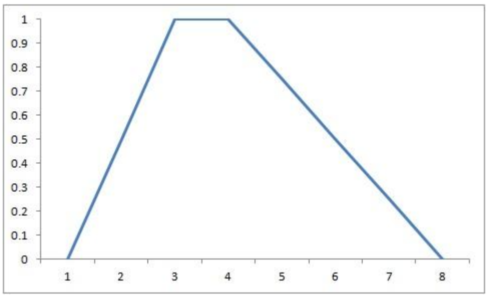
Ένα ασαφές σύνολο δεν έχει τα απόλυτα όρια που συναντάμε στα κλασσικά σύνολα. Αντίθετα θεωρούμε πως όλα τα προς εξέταση αντικείμενα ανήκουν σε ένα σύνολο, με διαφορετικό βαθμό συμμετοχής. Ο βαθμός συμμετοχής, ή και βαθμός αληθείας (degree of truth), δίνεται από την συνάρτηση συμμετοχής (membership function).

Η συνάρτηση συμμετοχής συμβολίζεται με το $\mu_A(x)$ και οι τιμές που παίρνει ανήκουν στο διάστημα [0,1]. Η συνάρτηση συμμετοχής, μπορεί να προέρχεται από διάφορες πηγές, όπως επιστημονικές παρατηρήσεις, διαδικασίες μάθησης (νευρωνικά δίκτυα), κατανομές πιθανοτήτων κ.α.

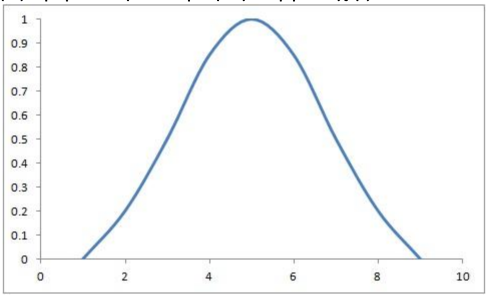
Υπάρχουν κάποιες μορφές της συνάρτησης αυτής, οι οποίες είναι οι πιο συνηθισμένες. Αυτές είναι η τριγωνική (triangle), η τραπεζοειδής (trapezoid), η Γκαουσιανή (Gaussian) και η μοναδιαία (singleton). (Σχήμα 3.1 –(α),(β),(γ),(δ))



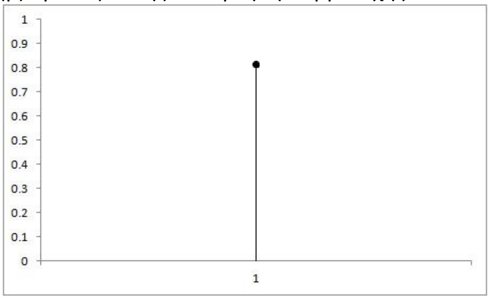
(α) Τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής



(β) Τραπεζοειδής συνάρτηση συμμετοχής



(γ) Γκαουσιανή συνάρτηση συμμετοχής

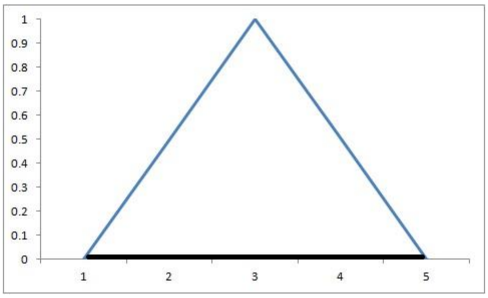


(δ) Μοναδιαία συνάρτηση συμμετοχής

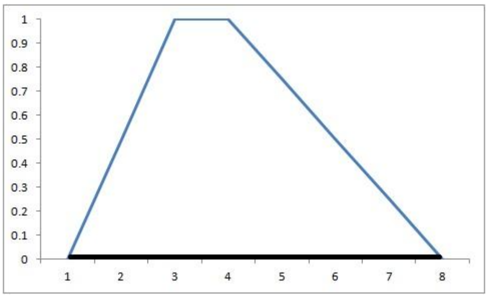
Σχήμα 3.1 – Συναρτήσεις συμμετοχής

Υπάρχουν τέσσερεις παράμετροι τις οποίες μπορούμε να εξετάσουμε για τις συναρτήσεις συμμετοχής. Εφαρμόζονται σε όλα τα είδη και είναι οι εξής:

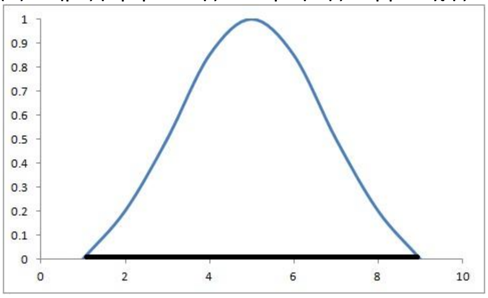
- Στήριξη (support): Η περιοχή στην οποία η συνάρτηση συμμετοχής είναι μεγαλύτερη του μηδενός ($s_A=\{x: \mu_A(x)>0\}$). (Σχήμα 3.2)
- Πυρήνας (core): Η περιοχή στην οποία η συνάρτηση συμμετοχής έχει τη μέγιστη τιμή για το ασαφές σύνολο A ($c_A=\{x:\mu_A(x)=1\}$). (Σχήμα 3.3)
- Α-τομή (α-cut): Μια τομή της συνάρτησης συμμετοχής για την τιμή α ($\alpha_A=\{x:\mu_A(x)=\alpha\}$). (Σχήμα 3.4)
- Ύψος (height): Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης συμμετοχής του A ($h_A=\max_x\{\mu_A(x)\}$). (Σχήμα 3.5)



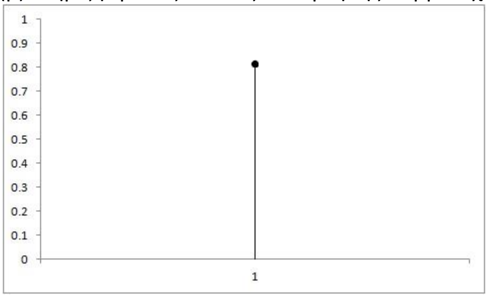
(α) Στήριξη τριγωνικής συνάρτησης συμμετοχής



(β) Στήριξη τραπεζοειδούς συνάρτησης συμμετοχής

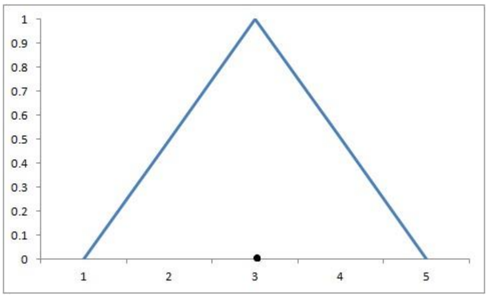


(γ) Στήριξη Γκαουσιανής συνάρτησης συμμετοχής

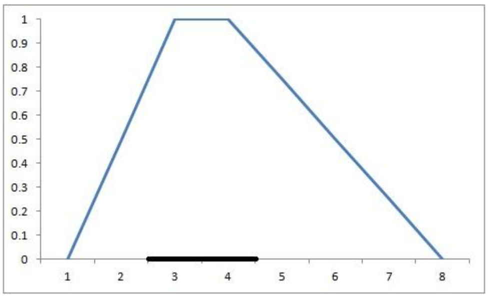


(δ) Στήριξη μοναδιαίας συνάρτησης συμμετοχής

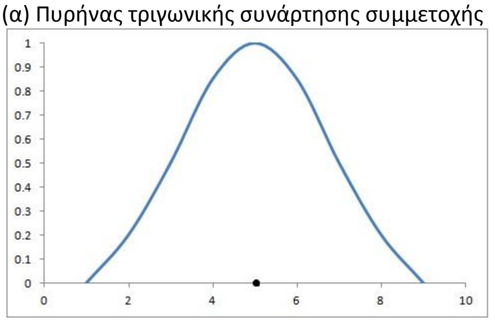
Σχήμα 3.2 – Στήριξη συναρτήσεων συμμετοχής



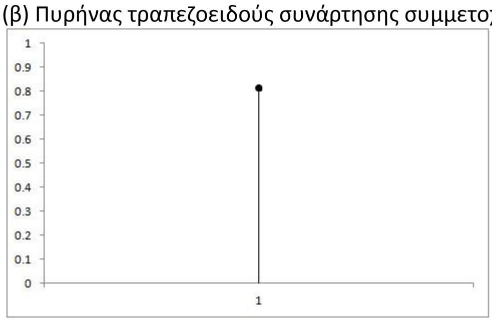
(α) Πυρήνας τριγωνικής συνάρτησης συμμετοχής



(β) Πυρήνας τραπεζοειδούς συνάρτησης συμμετοχής

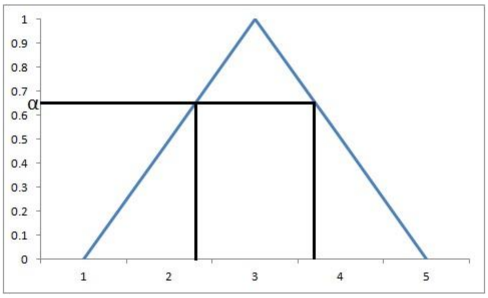


(γ) Πυρήνας Γκαουσιανής συνάρτησης συμμετοχής

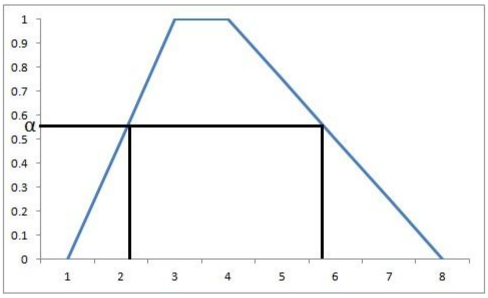


(δ) Πυρήνας μοναδιαίας συνάρτησης συμμετοχής

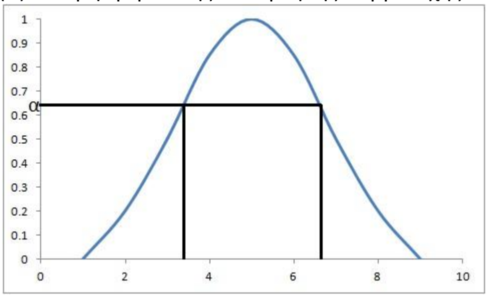
Σχήμα 3.3 – Πυρήνας συναρτήσεων συμμετοχής



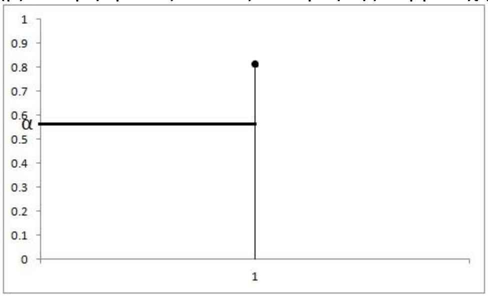
(α) Α-τομή τριγωνικής συνάρτησης συμμετοχής



(β) Α-τομή τραπεζοειδούς συνάρτησης συμμετοχής

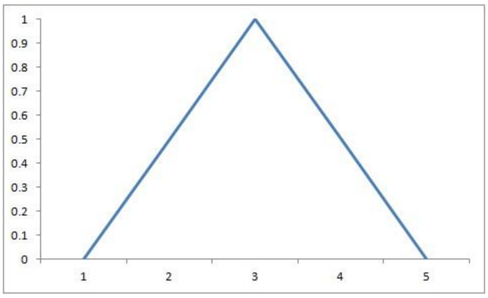


(γ) Α-τομή Γκαουσιανής συνάρτησης συμμετοχής

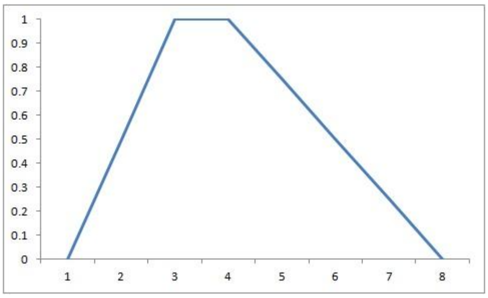


(δ) Α-τομή μοναδιαίας συνάρτησης συμμετοχής

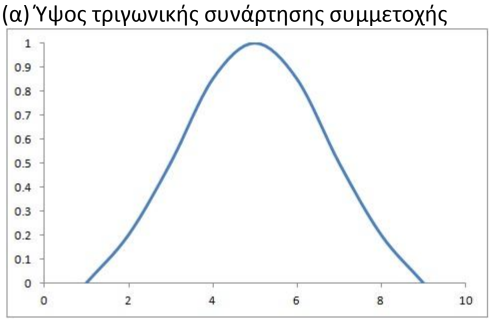
Σχήμα 3.4 – Α-τομή συναρτήσεων συμμετοχής



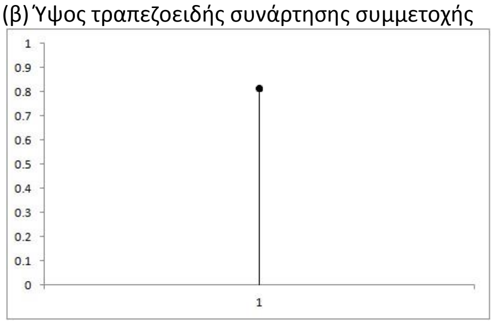
(α) Ύψος τριγωνικής συνάρτησης συμμετοχής



(β) Ύψος τραπεζοειδής συνάρτησης συμμετοχής



(γ) Ύψος Γκαουσιανής συνάρτησης συμμετοχής



(δ) Ύψος μοναδιαίας συνάρτησης συμμετοχής

Σχήμα 3.5 – Ύψος συναρτήσεων συμμετοχής

Το βαθμό συμμετοχής μιας τιμής x, τον παρουσιάζουμε με τη μορφή $(x,\mu_A(x))$. Για παράδειγμα, ο βαθμός συμμετοχής της τιμής 1.84, στο παράδειγμα με το ύψος, συμβολίζεται ως εξής : (1.84 , 0.9).

Ένας ακόμα συνηθισμένος τρόπος συμβολισμού που συναντάται στην βιβλιογραφία είναι της μορφής $\mu_A(x)/x$. Για παράδειγμα, 0.9/1.84.

3.2.Ιδιότητες Ασαφών Συνόλων

Τα ασαφή σύνολα έχουν ιδιότητες ίδιες ή παρόμοιες με αυτές των κλασσικών συνόλων, αλλά υπάρχουν κάποιες ιδιότητες των κλασσικών συνόλων, οι οποίες δεν ισχύουν για τα ασαφή.

Κοινές ιδιότητες είναι οι εξής:

- Ο Νόμος της διπλής άρνησης: $(A')' = A$
- Η Ταυτοδυναμία: $A \cup A = A$ και $A \cap A = A$
- Η αντιμεταθετική ιδιότητα: $A \cap B = B \cap A$ και $A \cup B = B \cup A$
- Η προσεταιριστική ιδιότητα: $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ και $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$
- Η επιμεριστική ιδιότητα: $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$ και $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$
- Η απορροφητική ιδιότητα: $A \cap (A \cup B) = A$ και $A \cup (A \cap B) = A$
- Ο Νόμος του De Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ και $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Είναι καλό να αναφερθεί ότι στα ασαφή σύνολα, η ένωση και η τομή μεταξύ δύο συνόλων ορίζονται μέσω των τελεστών min και max, που συμβολίζονται με τα σύμβολα «$\wedge$» και «$\vee$».

Πέρα από αυτές τις ιδιότητες τα ασαφή σύνολα έχουν και τις παρακάτω ιδιότητες:

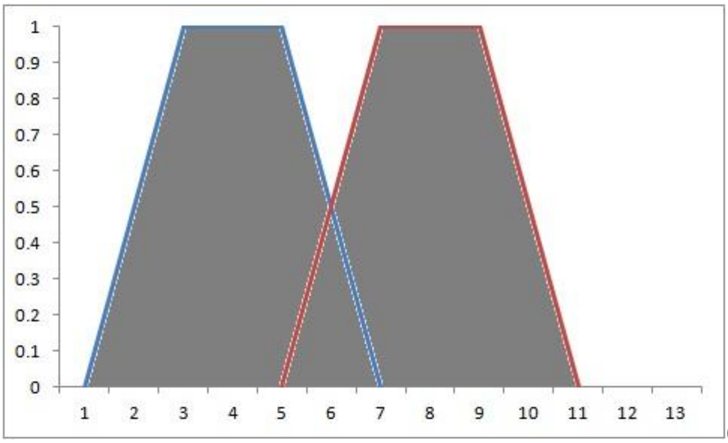
1) Ένα ασαφές σύνολο ονομάζεται κανονικό (normal) αν υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού του για το οποίο $\mu(x_0)=1$.
2) Δύο ασαφή σύνολα A και B ορισμένα στο ευρύτερο σύνολο αναφοράς S (universe of discourse) είναι ίσα αν οι συναρτήσεις συγγένειάς τους είναι ίσες σε όλο το πεδίο ορισμού τους. Δηλαδή: $A=B$, αν $\mu_A(x)=\mu_B(x)\ \forall\ x \in S$.
3) Το συμπληρωματικό (complement) ενός ασαφούς συνόλου A είναι το A' με: $\mu_{A'}(x)=1-\mu_A(x)$.
4) Για δύο ασαφή σύνολα A και B ορισμένα στο S, το A είναι υποσύνολο του B ($A \subseteq B$)αν $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)\ \forall\ x \in S$.
5) Η ένωση δύο ασαφών συνόλων A και B ορισμένων στο ίδιο σύνολο S είναι ένα νέο ασαφές σύνολο $A \cup B$ ορισμένο επίσης στο S, για το οποίο ισχύει: $A \cup B$: $\mu_{A \cup B}(x)=\vee(\mu_A(x),\mu_B(x))= \max(\mu_A(x),\mu_B(x))\ \forall\ x \in S$.
6) Η τομή δύο ασαφών συνόλων A και B ορισμένων στο ίδιο σύνολο S είναι ένα νέο ασαφές σύνολο $A \cap B$ ορισμένο επίσης στο S, για το οποίο ισχύει: $A \cap B$: $\mu_{A \cap B}(x)=\wedge(\mu_A(x),\mu_B(x))= \min(\mu_A(x),\mu_B(x))\ \forall\ x \in S$.

Σημείωση: Η ένωση και η τομή δύο ασαφών συνόλων και το συμπληρωματικό ενός, σχετίζονται με τη διάζευξη (OR), τη σύζευξη (AND) και την άρνηση (NOT) στην ασαφή λογική, αντίστοιχα. (Σχήμα 3.6 –(α),(β),(γ))

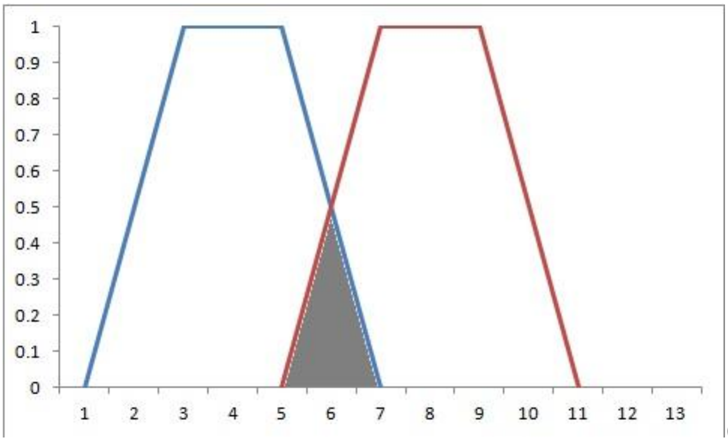
7) Κενό ασαφές σύνολο A ορισμένο στο S, ονομάζεται το ασαφές σύνολο A για το οποίο ισχύει : $\mu_A(x)=0\ \forall\ x \in S$, και συμβολίζεται με το $\emptyset$.
8) Το ευρύτερο σύνολο αναφοράς (universe of discourse) θεωρείται ότι έχει συνάρτηση συγγένειας με τιμή 1 σε όλο το πεδίο ορισμού του.
9) Το γινόμενο δύο ασαφών συνόλων A και B ορισμένων στο S, είναι ένα νέο ασαφές σύνολο του οποίου η συνάρτηση συγγένειας ισούται με το αλγεβρικό γινόμενο των αντίστοιχων συναρτήσεων των A και B. Δηλαδή: $\mu_{A \cdot B}(x)= \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)\ \forall\ x \in S$.

10) Το γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού n με ένα ασαφές σύνολο A, δίνει ένα νέο ασαφές σύνολο n·A για το οποίο ισχύει: $\mu_{n \cdot A}(x)=n \cdot \mu_A(x) \forall x \in S$.
11) Ένα ασαφές σύνολο μπορεί να υψωθεί στη δύναμη α (όπου α∈R, α>0), υψώνοντας τη συνάρτηση συγγένειάς του στο α. Προκύπτει έτσι ένα νέο ασαφές σύνολο με συνάρτηση συγγένειας: $\mu_A{}^{\alpha}(x)=[\mu(x)]^{\alpha} \forall x \in S$.

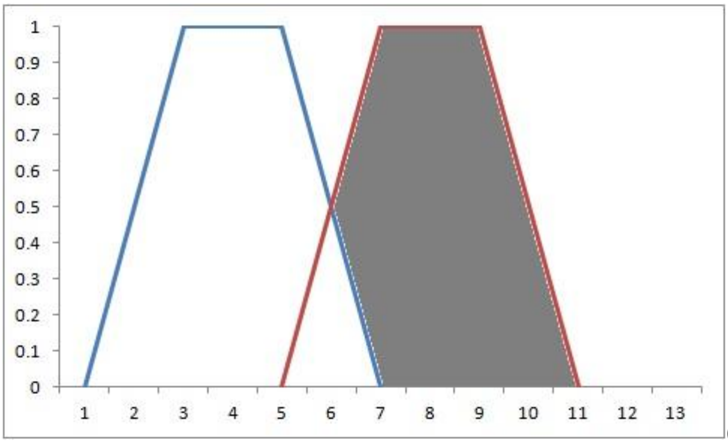
Σημείωση: Όπως αναφέρθηκε, με την ασαφή λογική μπορούμε να κάνουμε τον υπολογιστή να «σκεφτεί» περισσότερο σαν άνθρωπος. Ένα παράδειγμα που προκύπτει από την ιδιότητα 11, είναι το εξής: ένα ασαφές σύνολο υψωμένο στο τετράγωνο, δηλαδή α=2, λαμβάνεται ως μεταβολή της λεκτικής τιμής που αντιστοιχεί στο ασαφές σύνολο με τον όρο «πολύ». Για παράδειγμα, αν έχουμε το σύνολο A={ψηλός}, τότε το A^2={πολύ ψηλός}. Οπότε αν A={(1.7 , 0), (1.8 , 0.5) ,(1.85, 0.7) , (1.9 , 1)} τότε το A2={(1.7 , 0), (1.8 , 0.25), (1.85 , 0.49) , (1.9 , 1)}. Αντίστοιχα, αν α=0,5 η λεκτική τιμή του συνόλου μπορεί να εκληφθεί ως «περίπου» ή «λίγο».



(α) Ένωση



(β) Τομή



(γ) Συμπληρωματικό

Σχήμα 3.6 – Ένωση, τομή και συμπληρωματικό ασαφών συνόλων

Παραδείγματα

1) Το ασαφές σύνολο Α={(α , 0), (β , 0.3), (γ , 1)} είναι κανονικό ενώ τα σύνολα Β={(α , 0), (β , 0) , (γ , 0)} και Γ={(α , 0.3), (β , 0.5), (γ , 0.9)} δεν είναι.
2) Τα σύνολα Α={(α , 0.3) , (β , 0.6)} και Β={(α , 0.3) , (β , 0.6)} είναι ίσα.
3) Το συμπληρωματικό ασαφές σύνολο του Α={(α , 0.3) , (β , 0.6)} είναι το Α'={(α , 0.7), (β , 0.4)}.
4) Το σύνολο Α={(α , 0.3) , (β , 0.6)} είναι υποσύνολο του Β={(α , 0.4) , (β , 0.6)}.

Πέρα από αυτές τις ιδιότητες που αναγράφονται πιο πάνω, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι υπάρχουν ιδιότητες των κλασσικών συνόλων που δεν κληρονομούνται από τα ασαφή σύνολα. Συγκεκριμένα, οι ιδιότητες αυτές, είναι οι ιδιότητες που για να ισχύουν πρέπει να υπάρχουν σαφώς καθορισμένα όρια μεταξύ των συνόλων, στο ευρύτερο σύνολο αναφοράς. Οι ιδιότητες που δεν μπορούν να οριστούν στα ασαφή σύνολα είναι οι εξής:

- Ο νόμος της αντίφασης: $A \cap A' = \emptyset$
- Ο νόμος του αποκλειόμενου μέσου: $A \cup A' = S$

Για παράδειγμα, αν έχουμε το σύνολο «Άντρες», το οποίο ανήκει στο ευρύτερο σύνολο αναφοράς «Άνθρωποι», τότε η τομή αυτού με το (Άντρες)' μας δίνει το κενό σύνολο. Αλλά αν έχουμε το σύνολο «Ψηλός», όπως εξετάσαμε σε προηγούμενα παραδείγματα, έχουμε κοινές τιμές με το (Ψηλός)', αλλά με άλλο βαθμό συμμετοχής. Οπότε στα ασαφή σύνολα ισχύει : $A \cap A' \neq \emptyset$. Αντίστοιχα, μπορούμε να δούμε πως η ένωση δυο ασαφών, συμπληρωματικών συνόλων, δεν ισούται με το σύνολο αναφοράς. Δηλαδή, $A \cup A' \neq S$.

4.Ασαφείς Σχέσεις

Μια ιδιαίτερα σημαντική κατηγορία ασαφών συνόλων, είναι αυτή των οποίων το πεδίο ορισμού τους είναι ανώτερης τάξης από αυτή της ενός. Δηλαδή είναι σύνολα της μορφής, δεδομένων των πεδίων ορισμού X,Y και Z, XxX, XxYxZκτλ. Αυτά τα σύνολα τα ονομάζουμε ασαφείς σχέσεις.

Οι ασαφείς σχέσεις συνδέουν τα στοιχεία μεταξύ δυο (ή και παραπάνω) συνόλων, παρέχοντας μιας μορφής σύγκριση μεταξύ τους. Αξιοποιώντας το παράδειγμα με το ύψος, μπορούμε να έχουμε για την ασαφή σχέση R, και τα σύνολα «Ψηλός» και «Κοντός»:

R= «ο x είναι ψηλότερος από τον y», x∈ «Ψηλός», y∈ «Κοντός», R∈ «Ψηλός» x «Κοντός»

Οι τιμές της σχέσης αυτής έχουν μια μορφή σαν και αυτή: $((x,y), \mu_R(x,y))$. Μια άλλη μορφή αναπαράστασης, ιδιαίτερα χρήσιμη σε υπολογισμούς, είναι σε μορφή πίνακα.

Σημαντικό κομμάτι της Ασαφούς Λογικής, είναι οι κανόνες της μορφής if-then. Οι κανόνες αυτοί είναι αντίστοιχοι με τις ασαφείς σχέσεις, και η επίλυση προβλημάτων με αυτούς χρειάζεται μια διαδικασία η οποία προέρχεται από τα μαθηματικά. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται σύνθεση (composition).

Η σύνθεση αποτελεί τη διαδικασία με την οποία οι ασαφείς σχέσεις μπορούν να συνδυαστούν μεταξύ τους. Ένα παράδειγμα αυτής της διαδικασίας, είναι η σύνθεση των ασαφών σχέσεων $R_1(x,y)$ με πεδίο ορισμού το XxY, και $R_2(y,z)$ με πεδίο ορισμού το YxZ, η οποία είναι η ασαφής σχέση R(x,z) με πεδίο ορισμού το XxZ. Να σημειωθεί ότι η R αποτελεί άμεση συσχέτιση των στοιχείων των συνόλων X και Z. Απαραίτητο είναι να προσδιοριστεί η συνάρτηση συμμετοχής $\mu_R(x,z)$, βάσει των $\mu_{R1}(x,y)$ και $\mu_{R2}(y,z)$.

Στην Ασαφή Λογική υπάρχουν διάφορες μέθοδοι σύνθεσης ασαφών σχέσεων, όπως η σύνθεση max-min και η σύνθεση max-product. Εξετάζοντας το προηγούμενο παράδειγμα με τις δυο αυτές μεθόδους, μπορούμε να εξάγουμε τη συνάρτηση συμμετοχής $\mu_R(x,z)$ ως εξής:

- Min-max : $\mu_R(x,z)=\vee[\mu_{R1}(x,y)\wedge \mu_{R2}(y,z)]$
- Max-product: $\mu_R(x,z)=\vee[\mu_{R1}(x,y)\cdot \mu_{R2}(y,z)]$

όπου το $\vee$ είναι ορισμένο ως προς το y. Αυτό κάνει τους υπολογισμούς να μοιάζουν με τον πολλαπλασιασμό πινάκων, στη γραμμική άλγεβρα.

5.Ασαφείς Μεταβλητές και Αριθμοί

Όπως στη κλασσική θεωρία συνόλων, μπορούμε να ορίσουμε μεταβλητές των οποίων οι τιμές προέρχονται από τα στοιχεία των συνόλων, έτσι και στα ασαφή σύνολα μπορούμε να ορίσουμε μεταβλητές, των οποίων οι τιμές θα ορίζονται από αυτά. Αυτές τις μεταβλητές τις ονομάζουμε «ασαφείς μεταβλητές» (fuzzy variables).

Ένα παράδειγμα ασαφούς μεταβλητής, θα μπορούσε να είναι η μεταβλητή «Ύψος», της οποίας το πεδίο τιμών προέρχεται από τα σύνολα «Ψηλός» και «Κοντός» που έχουμε ήδη δει. Η μεταβλητή «Ύψος» χαρακτηρίζεται ως λεκτική μεταβλητή (linguistic variable), ενώ τα ψηλός και κοντός ως πρωταρχικές λεκτικές τιμές.

Αξιοποιώντας τις ιδιότητες που είδαμε για τα ασαφή σύνολα, μπορεί να προκύψει ένας αρκετά μεγάλος αριθμός σύνθετων λεκτικών τιμών, ανεξάρτητα από το πλήθος των πρωταρχικών. Για να γίνει αυτό, γίνεται χρήση λεκτικών τελεστών όπως τα AND, OR, NOT κτλ. Ουσιαστικά, όπως και με τα ασαφή σύνολα, αυτό που επηρεάζουμε είναι οι συναρτήσεις συμμετοχής των τιμών, έτσι ώστε να δημιουργηθούν οι τύποι που θέλουμε.

Παρακάτω ακολουθεί ένας πίνακας με σχετικά παραδείγματα.

Λεκτικοί Τελεστές	Επίδραση στη συνάρτηση συμμετοχής
VERY A	$\mu_{VERY(A)}(x)= [\mu_A(x)]^2$
A AND B	$\mu_{A\_AND\_B}(x) = [\mu_A(x)\wedge \mu_B(x)]$
A OR B	$\mu_{A\_OR\_B}(x) = [\mu_A(x)\vee \mu_B(x)]$
NOT A	$\mu_{NOT\_A}(x) = [1-\mu_A(x)]$
PLUS A	$\mu_{PLUS(A)}(x) = [\mu_A(x)]^{1.25}$
MINUS A	$\mu_{MINUS(A)}(x) = [\mu_A(x)]^{0.75}$
MORE OR LESS A	$\mu_{MORE\_OR\_LESS(A)}(x) = [\mu_A(x)]^{0.5}$

Πίνακας 4.1 – Λεκτικοί τελεστές στις συναρτήσεις συμμετοχής

Το πλήθος των λεκτικών τιμών των ασαφών μεταβλητών, και η σχέση που έχουν με τα ασαφή σύνολα τις καθιστά κατάλληλες για χρήση στην ασαφή συλλογιστική (fuzzy reasoning) και στους ασαφείς κανόνες (fuzzy rules), τα οποία θα εξετάσουμε παρακάτω.

Με τη χρήση των ασαφών μεταβλητών μπορούμε να ορίσουμε ασαφείς προτάσεις. Για παράδειγμα, μια πρόταση της μορφής «Το ύψος του Γιάννη είναι υψηλό.» είναι μια ασαφής πρόταση, με την ασαφή μεταβλητή «Ύψος» και το «Υψηλό» ως ασαφές σύνολο που αποτελεί την τιμή της μεταβλητής.

Υπάρχουν προτάσεις που χρησιμοποιούμε που είναι της μορφής «Το ύψος του Γιάννη είναι περίπου δυο μέτρα.».Σε αυτή την περίπτωση, κάνουμε χρήση ενός αριθμού, για τον οποίο δεν έχουμε μια συγκεκριμένη τιμή (crisp value). Τέτοιοι αριθμοί, αποκαλούνται ασαφείς αριθμοί (fuzzy numbers) και αποτελούν ασαφή υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Οι ασαφείς αριθμοί έχουν συναρτήσεις συμμετοχής όπως αυτές που έχουμε δει έως τώρα. Παρακάτω, θα εξετάσουμε την Αρχή της Επέκτασης, όπου και θα δούμε την πρόσθεση ασαφών αριθμών, βάσει αυτής.

Κάποια βασικά χαρακτηριστικά των ασαφών αριθμών, όταν τους εξετάζουμε ως ασαφή σύνολα, είναι τα παρακάτω:

1) Οι συναρτήσεις συμμετοχής των ασαφών αριθμών έχουν πάντοτε ένα και μοναδικό στοιχείο με απόλυτη συμμετοχή, δηλαδή $\mu(x_0)=1$.
2) Η συνάρτηση συμμετοχής είναι γνησίως αύξουσα αριστερά του σημείου x_0, και γνησίως φθίνουσα δεξιά αυτού.

Βάσει των παραπάνω μπορούμε να καταλάβουμε ότι οι ασαφείς αριθμοί αντιστοιχούν απόλυτα μονάχα σε έναν συγκεκριμένο (crisp) αριθμό.

6.Ασαφείς Προτάσεις και Κανόνες

Με τη χρήση των ασαφών μεταβλητών μπορούμε να ορίσουμε ασαφείς προτάσεις. Για παράδειγμα, μια παραλλαγή της πρότασης του προηγούμενου παραδείγματος, «Το ύψος του Γιάννη είναι υψηλό.» είναι μια ασαφής πρόταση, με την ασαφή μεταβλητή «Ύψος» και το «Υψηλό» ως ασαφές σύνολο που αποτελεί την τιμή της μεταβλητής.

Οι ασαφείς προτάσεις σχετίζονται μεταξύ τους μέσω συνθηκών που ονομάζουμε ασαφής κανόνες (fuzzy rules). Οι ασαφείς κανόνες είναι συνήθως συνθήκες της μορφής:

if x is A then y is B

Για παράδειγμα, ο κανόνας «Αν το ύψος του Γιάννη είναι υψηλό, τότε θα φοράει μεγάλα ρούχα.» έχει ως ασαφείς μεταβλητές το «Ύψος» και το «Μέγεθος» και οι τιμές τους είναι το ασαφές σύνολο «Υψηλό» και το ασαφές σύνολο «Μεγάλα», αντίστοιχα. Μετατρέποντάς το σε μορφή if-then έχουμε:

if (Ύψος) is (Υψηλό) then (Μέγεθος) is (Μεγάλο)

Σημείωση: εδώ πέρα έχουμε αλλάξει ελαφρώς τα ονόματα των τιμών των μεταβλητών ώστε να είναι πιο ευανάγνωστες οι εκφράσεις. Στην πράξη κάτι τέτοιο θα δημιουργούσε προφανή προβλήματα.

Μια γενικότερη μορφή των κανόνων if-then είναι η εξής:

if x_1 is A_1 AND x_2 is A_2 AND x_3 is A_3 AND … AND x_k is $A_{k,}$ then y is B

Σε αυτή τη μορφή τα x_1,x_2,… ,x_k,y είναι ασαφής μεταβλητές και τα A_1, A_2, …, A_k, B είναι οι τιμές στα σύνολα αναφοράς S_1, S_2, …, S_k αντίστοιχα.

Ένα σύνολο κανόνων έχει την παρακάτω μορφή:

Κανόνας 1: if x_1 is $A_{1,1}$ AND x_2 is $A_{2,1}$ AND x_3 is $A_{3,1}$ AND … AND x_k is $A_{k,1}$, then y is B_1, else

Κανόνας 2: if x_1 is $A_{1,2}$ AND x_2 is $A_{2,2}$ AND x_3 is $A_{3,2}$ AND … AND x_k is $A_{k,2}$, then y is B_2, else

…

Κανόνας n: if x_1 is $A_{1,n}$ AND x_2 is $A_{2,n}$ AND x_3 is $A_{3,n}$ AND … AND x_k is $A_{k,n}$, then y is B_n

Υπάρχουν διάφορα είδη κανόνων που έχουν προταθεί ανά περιόδους. Ένα από τα πιο συνηθισμένα, με το οποίο θα εργαστούμε ως επί το πλείστον, είναι οι κανόνες Zadeh – Mamdani. Οι κανόνες αυτοί έχουν τη μορφή που έχουμε περιγράψει μέχρι τώρα, με βασικό χαρακτηριστικό ότι έχουμε ασαφείς μεταβλητές (x και y)που αντιστοιχούν σε ασαφή σύνολα (A και B).

Μια άλλη, πιο ειδική μορφή κανόνων Zadeh – Mamdani, είναι οι ασαφείς κανόνες με συντελεστή βεβαιότητας (Certainty Factor –CF). Αυτοί οι κανόνες έχουν τη μορφή

if x is A then y is B (CF=n)

Τέτοιου είδους κανόνες, έχουν ειδικό τρόπο αντιμετώπισης, ο οποίος δεν θα εξεταστεί σε αυτή την εργασία. Απλά αναφέρουμε πως η επίλυση προβλημάτων με τέτοιους κανόνες απαιτεί επίλυση ξεχωριστά για τα ασαφή σύνολα και τους συντελεστές βεβαιότητας.

Μια επίσης γνωστή μορφή κανόνων, είναι αυτή των Takagi –Sugeno που προτάθηκε το 1985. Οι κανόνες αυτοί είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στην προσέγγιση δύσκολων συναρτήσεων. Η μορφή αυτών των κανόνων είναι η εξής

if x is A AND y is B then z is $f_i(x,y)$

Δηλαδή, αυτοί οι κανόνες συνδέονται με μια συνάρτηση η οποία, στη γενική περίπτωση, μπορεί να έχει πολλές μεταβλητές.

Ένα πολύ ενδιαφέρον είδος ασαφών κανόνων, του τύπου Zadeh- Mamdani, είναι οι Βαθμιαίοι Ασαφής Κανόνες (Gradual Fuzzy Rules). Οι συγκεκριμένοι κανόνες επιτρέπουν την χρήση λίγων, έως και ελάχιστων, κανόνων για την απεικόνιση ολόκληρου του συνόλου αναφοράς. Οι κανόνες αυτοί έχουν τη μορφή

if x is A then «το ύψος του κρατικού χρέους είναι χαμηλό»

Δύο ακόμα σημαντικές μορφές ασαφών κανόνων, προτάθηκαν το 1993 από τους Kasabov και Shishkov και το 1994 από τον Kasabov, και αφορούσαν κανόνες με βαθμούς σημαντικότητας (Degree of Importance – DI), ανοχή θορύβου (Noise Tolerance – NT) και συντελεστές ευαισθησίας (Sensitivity Factor – SF). Αυτού του είδους οι κανόνες, μαζί με τη χρήση συντελεστών βεβαιότητας, επιτρέπουν την εξαγωγή συμπερασμάτων με μεγαλύτερη ακρίβεια και συνέπεια. Για παράδειγμα, αν ένας κανόνας εξετάζει δυο μετρήσεις για να παράγει ένα αποτέλεσμα, μπορεί η μια από της δυο μετρήσεις να έχει πολύ μεγαλύτερο αντίκτυπο στο τελικό αποτέλεσμα, άρα και υψηλότερο DI.

Η μορφή αυτών των κανόνων είναι ως εξής:

if x is A(DI1) AND y is B(DI2) then z is C (NT,SF,CF)

Η μορφή που προτάθηκε από τον Kasabov το 1994 αφορά αντίστοιχους κανόνες με τη διαφορά ότι αντί για μια ασαφή τιμή, μπορούμε να έχουμε μια ασαφή μεταβλητή. Αυτή η μορφή είναι πιο γενική και επιτρέπει μεγαλύτερη ευελιξία σε πρακτικές εφαρμογές.

Με τη χρήση των κανόνων if-then μπορούμε να ορίσουμε μια ασαφή σχέση R(x,y) που ονομάζεται σχέση συνεπαγωγής (implication relation) και πρακτικά, αποτελεί έναν συνδυασμό των συναρτήσεων συμμετοχής των συνόλων A και B. Η γενική της μορφή ορίζεται ως εξής:

$$R(x, y) = \phi(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

Η συνάρτηση φ ονομάζεται τελεστής συνεπαγωγής (implication operator) και υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να συνδυαστούν οι συναρτήσεις συμμετοχής του if-then κανόνα. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις σημαντικότερες εκφράσεις που έχουν προταθεί για τον τελεστή συνεπαγωγής.

Όνομα Τελεστή	Αναλυτική Έκφραση του $\phi(\mu_A(x), \mu_B(y))$
ϕ_m: Zadeh Max-Min	$(\mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \vee (1-\mu_A(x))$
ϕ_c : Mamdani Min	$\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)$
ϕ_p : Larsen Product	$\mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$
ϕ_a : Arithmetic	$1 \wedge (1-\mu_A(x) + \mu_B(y))$
ϕ_b : Boolean	$(1-\mu_A(x)) \vee \mu_B(y)$

Πίνακας 6.1 – Τελεστές συνεπαγωγής

Οι σχέσεις συνεπαγωγής χρησιμοποιούνται σε προβλήματα που προκύπτουν κατά τη συλλογιστική με ασαφείς κανόνες. Τα προβλήματα αυτά είναι δυο ειδών και επιλύονται με δύο τρόπους, ανάλογα με το είδος.

Ο πρώτος τρόπος ονομάζεται Generalized Modus Ponens – GMP (Γενικευμένος Τρόπος του Θέτειν) και χρησιμοποιείται σε προβλήματα κατά τα οποία γνωρίζουμε δυο τιμές μιας ασαφούς μεταβλητής, μια τιμή μιας άλλης και θέλουμε να υπολογίζουμε μια δεύτερη τιμή για αυτή. Σε μορφή κανόνων είναι ως εξής:

if x is A then y is B

x is A′   y is B′ (?)

Ο GMP ορίζει ότι: $B' = A' \circ R(x,y)$.

Ο δεύτερος τρόπος ονομάζεται Generalized Modus Tollens – GMT (Γενικευμένος Τρόπος του Αναιρείν) και αφορά προβλήματα στα οποία αναζητούμε μια δεύτερη τιμή για το x. Δηλαδή:

if x is A then y is B

x is A′ (?)   y is B′

Ο GMT ορίζει ότι: $A' = R(x,y) \circ B'$

Ως $\circ$ ορίζουμε την πράξη της σύνθεσης.

Και στις δυο περιπτώσεις η σχέση συνεπαγωγής R(x,y), πρέπει να συνδυαστεί με την γνωστή παράμετρο ώστε να υπολογιστεί η άγνωστη. Δυο από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους σύνθεσης, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο, είναι η max-min και η max-product.

<u>Παράδειγμα</u>

if (Υψος) is (Υψηλό) then (Μέγεθος) is (Μεγάλο)

(Υψος) is (x_0)   (Μέγεθος) is (y_0) (?)

Κάνοντας χρήση του GMP έχουμε ότι:

$(y_0) = (x_0) \circ R(\text{Υψος, Μέγεθος})$

Με χρήση του Mamdani Min και της μεθόδου max-min, έχουμε:

$\phi_c(\mu_{\text{Υψηλό}}(\text{Υψος}), \mu_{\text{Μεγάλο}}(\text{Μέγεθος})) = \mu_{\text{Υψηλό}}(\text{Υψος}) \wedge \mu_{\text{Μεγάλο}}(\text{Μέγεθος})$

$(y_0) = \vee[\mu_{\text{Χαμηλό}}(\text{Υψος}) \wedge \phi_c(\mu_{\text{Υψηλό}}(\text{Υψος}), \mu_{\text{Μεγάλο}}(\text{Μέγεθος}))]$

Η περιγραφή ενός προβλήματος με ασαφείς μεταβλητές, ασαφείς τιμές και ασαφείς κανόνες ονομάζεται ασαφής λεκτική περιγραφή (fuzzy linguistic description) του προβλήματος.

7.Αρχή της Επέκτασης

Η αρχή της επέκτασης (extension principle) αποτελεί μια χρήσιμη μαθηματική μέθοδο, με την οποία μπορούμε να επεκτείνουμε μια συγκεκριμένη τιμή ή σύνολο, ακόμα και συνάρτηση, με μια ασαφή συνάρτηση συμμετοχής, σε μια αντίστοιχη ασαφή μορφή. Για παράδειγμα, ο αριθμός 3 μπορεί να γίνει ασαφές 3.

Αυτό επιτρέπει σε αλγορίθμους που έχουν οριστεί για σαφή δεδομένα, να χρησιμοποιηθούν στην περίπτωση που τα δεδομένα είναι ασαφή.

Για να εκφράσουμε με πιο μαθηματικό τρόπο τα παραπάνω, ορίζουμε τα (σαφή) σύνολα X και Y, μια συνάρτηση f: X→ Y, το ασαφές σύνολο A, με A⊆X, με γνωστή τη συνάρτηση συμμετοχής μ_A. Μπορούμε πλέον να ορίσουμε μια ασαφή αναπαράσταση της f(A) στο Y, με τον τύπο:

$$\mu_{f(A)}(f(x))=\mu_A(x)$$

Ουσιαστικά αυτό μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε ένα ασαφές σύνολο B⊆Y, με $\mu_B(y)$,η οποία προκύπτει από τη $\mu_A(x)$, όπου το x αντικαθίσταται με την έκφραση που προκύπτει από την της f ως προς x. Αυτό σημαίνει πως ο παραπάνω τύπος μπορεί να γίνει:

$$\mu_B(y)=\mu_A(x)$$

Σημείωση: Υπάρχουν δυο ειδικές περιπτώσεις στην αρχή της επέκτασης. Η μια είναι να υπάρχουν περισσότερα του ενός x που να αντιστοιχούν στο ίδιο y μέσω της συνάρτησης f. Αν ορίσουμε τα x_1 και x_2 στο A και το y_0 στο B, τότε η τιμή της συνάρτησης συμμετοχής του y_0 δίνεται από τον τύπο:

$$\mu_B(y_0)=\mu_A(x_1)\vee \mu_A(x_2)$$

Αυτός ο τύπος μπορεί να γενικευτεί σε περισσότερες διαστάσεις με τη μορφή:

$$\mu_B(y)=\vee_{UxVx\ldots xW} [\mu_{A1}(u)\wedge \mu_{A2}(v)\wedge\ldots\wedge \mu_{Am}(w)]/f(u,v,\ldots,w)$$

όπου οι μεταβλητές u,v,…,w είναι ορισμένες στα σύνολα U,V,..,W αντίστοιχα, και τα ασαφή σύνολα A1,A2,…,Am ορισμένα στο UxVx…xW, τέτοια ώστε y= f(u,v,…,w).

Σε περίπτωση που δεν υπάρχει κάποιο x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0)=y_0$, τότε η τιμή συμμετοχής του B στο y_0 είναι μηδέν.

Παράδειγμα

Ως παράδειγμα θα εξετάσουμε την πρόσθεση δυο ασαφών αριθμών. Έστω οι αριθμοί A: «ασαφές 3» και B: «ασαφές 7», με συναρτήσεις συμμετοχής:

A ={ (1 , 0), (2 , 0.5), (3 , 1), (4 , 0.5), (5 , 0)}

B ={ (5 , 0), (6 , 0.5), (7 , 1), (8 , 0.5), (9 , 0)}

Οι τιμές που μας ενδιαφέρουν είναι αυτές που δεν έχουν μηδενική συνάρτηση συμμετοχής. Το αποτέλεσμα θα είναι ένα νέο σύνολο C το οποίο θα έχει ως άκρα, το άθροισμα των δύο ακρότατων, μη μηδενικών τιμών. Στην περίπτωση μας αυτά είναι το 2+6=8 και το 4+8=12. Οπότε το C θα είναι της μορφής:

C = {(8 , $\mu_C(8)$), (9 , $\mu_C(9)$), (10 , $\mu_C(10)$), (11 , $\mu_C(11)$), (12 , $\mu_C(12)$)}

Αυτό που μένει τώρα είναι να βρούμε τις τιμές των $\mu_C(z)$.

Σύμφωνα με την αρχή της επέκτασης θα είναι :

$\mu_C(z)= \vee_{z=x+y}[\mu_A(x)\wedge \mu_B(y)]/(x+y)$

Ουσιαστικά, για την κάθε τιμή θα πάρουμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς που δεν έχουν μηδενική συνάρτηση συμμετοχής, και για τον καθένα θα πάρουμε το μέγιστο από τις ελάχιστες τιμές των όρων.

Οπότε έχουμε:

$\mu_C(8)= \mu_A(2)\wedge \mu_B(6)= 0.5 \wedge 0.5 =0.5$

$\mu_C(9)= \vee[(\mu_A(2)\wedge \mu_B(7)), (\mu_A(3)\wedge \mu_B(6))]= \vee [(0.5 \wedge 1), (1 \wedge 0.5)] =0.5$

$\mu_C(10)= \vee[(\mu_A(4)\wedge \mu_B(6)), (\mu_A(3)\wedge \mu_B(7)), (\mu_A(2)\wedge \mu_B(8))]= \vee [(0.5 \wedge 0.5), (1 \wedge 1), (0.5 \wedge 0.5)] =1$

$\mu_C(11)= \vee[(\mu_A(3)\wedge \mu_B(8)), (\mu_A(4)\wedge \mu_B(7))]= \vee [(1 \wedge 0.5), (0.5 \wedge 1)] =0.5$

$\mu_C(12)= \mu_A(4)\wedge \mu_B(8)= 0.5 \wedge 0.5 =0.5$

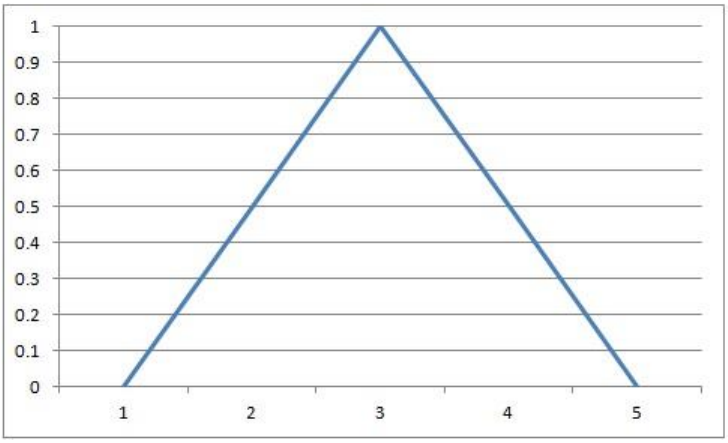
Οπότε:

C = {(8 , 0.5), (9 , 0.5), (10 , 1), (11 , 0.5), (12 , 0.5)}

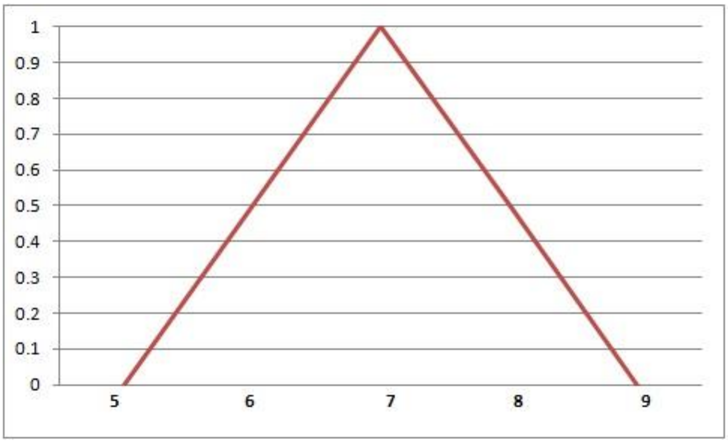
Δουλεύοντας με αντίστοιχο τρόπο, μπορούμε να δούμε ότι οποιαδήποτε τιμή εκτός του [8,12] έχει βαθμό συμμετοχής μηδέν.

Παρακάτω (Σχήμα 7.1 – (α), (β), (γ)) φαίνονται οι συναρτήσεις συμμετοχής των δυο αριθμών και του τελικού αθροίσματος.

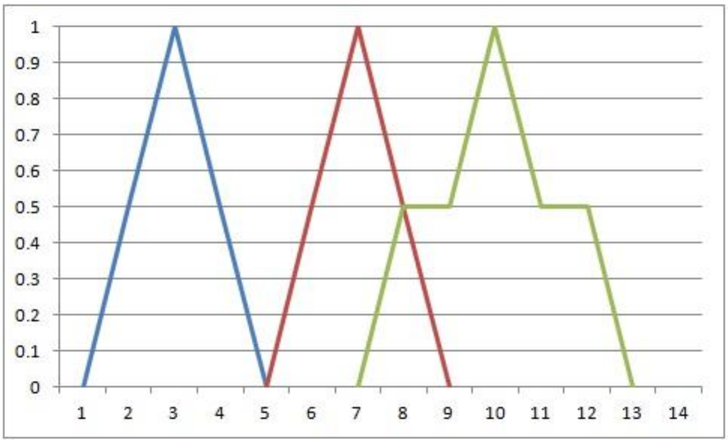
Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να υπολογίζουμε και την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, καθώς και πιο σύνθετες συναρτήσεις.



(α) Ασαφές 3



(β) Ασαφές 7



(γ) Τελικό άθροισμα

Σχήμα 7.1 – Ασαφές άθροισμα

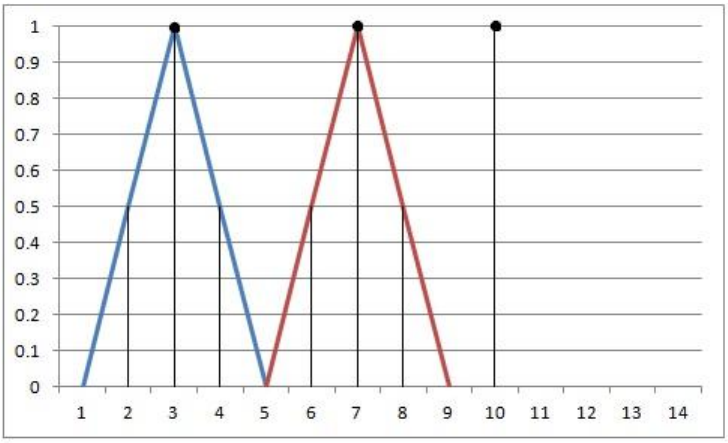
Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του παραπάνω αθροίσματος, όπως και οποιουδήποτε άλλου αθροίσματος, είναι αυτός της διαγραμματικής επίλυσης. Σε επόμενο κεφάλαιο θα αναλυθεί εκτενέστερα αυτή η μέθοδος και για πιο σύνθετα προβλήματα. Εδώ απλά θα αναφέρουμε ότι αυτή η μέθοδος επιτρέπει πιο γρήγορους υπολογισμούς, με κόστος στην ακρίβεια του αποτελέσματος. Τα διαγράμματα που θα παρουσιαστούν παρακάτω, διαφέρουν με τα προηγούμενα, όμως αυτό είναι αναμενόμενο.

Σημαντικό είναι να αναφερθούν κάποια χαρακτηριστικά της παρακάτω μεθόδου. Ο πυρήνας (core) της συνάρτησης συμμετοχής του αθροίσματος θα παραμείνει ο ίδιος με αυτών των δύο αρχικών συναρτήσεων (μ_c=1). Επίσης, το τελικό σχήμα θα είναι όμοιο των αρχικών, αλλά μετατοπισμένο. Εδώ να σημειωθεί πως οποιεσδήποτε αποκλείσεις από την παραδοσιακή μορφή της τριγωνικής συνάρτησης συμμετοχής, θα αποτυπώνονταν στο τελικό αποτέλεσμα, ακόμα και αν αφορούσαν μονάχα έναν όρο.

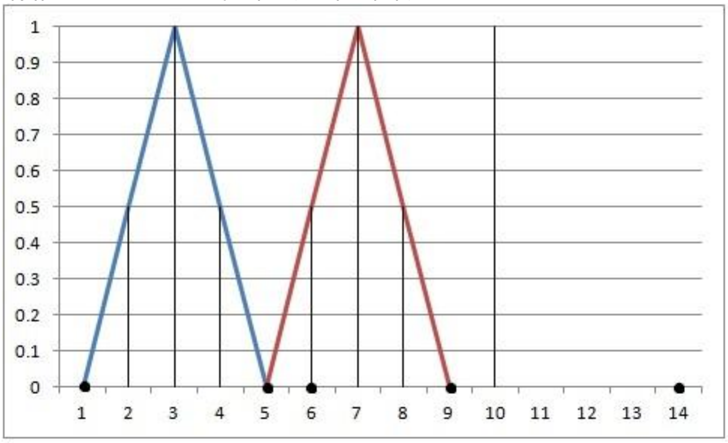
Τα βήματα που θα ακολουθηθούν για αυτή την μέθοδο είναι τα εξής:

1) Αθροίζουμε τις τιμές του πυρήνα των δύο όρων του αθροίσματος και σημειώνουμε το αντίστοιχο σημείο.
2) Επαναλαμβάνουμε το βήμα 1 για τα άκρα των δύο συναρτήσεων ανά δύο. Δηλαδή, τα δύο αριστερά μεταξύ τους και τα δύο δεξιά μεταξύ τους.
3) Επαναλαμβάνουμε το βήμα 1 για οποιαδήποτε σημεία με αλλαγή της κλίσης των συναρτήσεων.

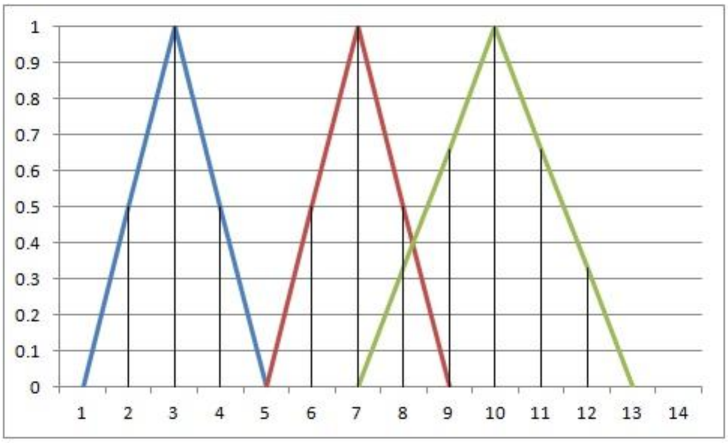
Ακολουθούν τα σχήματα με τα βήματα (Σχήματα 7.2, 7.3, 7.4). Έχουν τονιστεί τα σημεία τα οποία εξετάζουμε. Επειδή δεν έχουμε αλλαγές στην κλίση των συναρτήσεων συμμετοχής δεν εκτελούμε το βήμα 3.



Σχήμα 7.2 – Υπολογισμός κορυφής



Σχήμα 7.3 – Υπολογισμός άκρων



Σχήμα 7.4 – Το τελικό άθροισμα

8.Ασαφής Συλλογιστική

Η ασαφής συλλογιστική (fuzzy reasoning) αποτελεί τη διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων με τη χρήση ασαφών κανόνων. Η διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων μπορεί να χωριστεί σε τέσσερα στάδια, τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω, και απαιτεί την ύπαρξη μιας ασαφούς λεκτικής περιγραφής του προβλήματος.

Τα τέσσερα στάδια της ασαφούς συλλογιστικής είναι:

1) Υπολογισμό σχέσεων συνεπαγωγής, R, για τους κανόνες του προβλήματος.
2) Παραγωγή αποτελεσμάτων μέσω συλλογικών διαδικασιών (π.χ. GMP, GMT).
3) Παραγωγή τελικού ασαφούς αποτελέσματος.
4) Αποσαφήνιση.

Πρακτικά, στα δύο πρώτα στάδια χρησιμοποιούμε τις μεθόδους που είδαμε στις προηγούμενες ενότητες για την εξαγωγή αποτελεσμάτων, βάσει του προβλήματος που έχουμε. Στο τρίτο στάδιο, εξετάζουμε αν τα αποτελέσματα που έχουμε, μπορούν να συνδυαστούν σε ένα τελικό αποτέλεσμα, και τέλος, στο τελευταίο στάδιο, αποσαφηνίζουμε το αποτέλεσμα, ώστε να μπορέσουμε να το αξιοποιήσουμε σε εφαρμογές με σαφή δεδομένα. Οι μέθοδοι των δύο τελευταίων σταδίων θα παρουσιαστούν παρακάτω, καθώς επίσης και ένα παράδειγμα που θα μας παρουσιάσει όλη τη διαδικασία της ασαφούς συλλογιστικής.

<u>Παράδειγμα</u>

Θα χρησιμοποιήσουμε μια αναβαθμισμένη έκδοση του παραδείγματος που έχουμε χρησιμοποιήσει μέχρι τώρα.

Το πρόβλημά μας αφορά ένα σύστημα ασαφούς συλλογιστικής που κατηγοριοποιεί το μέγεθος (S) της στολής στρατιωτών βάσει του ύψους (H) και του βάρους (W) τους. Για συντομία, θα θεωρήσουμε ότι το ύψος μπορεί να πάρει τις τιμές «TALL» και «SHORT» και το βάρος τις τιμές «HEAVY» και «LIGHT». Αντίστοιχα το μέγεθος θα πάρει τις τιμές «SMALL» και «LARGE». Για συντομία όλες οι συναρτήσεις συμμετοχής έχουν απλή μορφή.

Οι κανόνες (Ri) είναι οι παρακάτω:

R1: if H is TALL then S is LARGE

R2: if H is SHORT AND W is HEAVY then S is LARGE

R3: if H is SHORT AND W is LIGHT then S is SMALL

Τα ασαφή σύνολα TALL,SHORT,HEAVY, LIGHT, LARGE και SMALL είναι ως εξής:

TALL= {(1.6 , 0), (1.7 , 0.5) ,(1.8 , 0.7) , (1.9 , 1)}

SHORT= {(1.6 , 1), (1.7 , 0.7) ,(1.8 , 0.3) , (1.9 , 0)}

HEAVY= {(70 , 0), (80 , 0.4) ,(90 , 0.8) , (100 , 1)}

LIGHT= {(70 , 1), (80 , 0.8) ,(90 , 0.2) , (100 , 0)}

LARGE= {(37 , 0), (39 , 0.5) ,(41 , 1)}

SMALL= {(37 , 1), (39 , 0.5) ,(41 , 0)}

Αν το ύψος είναι H=1.7m. και το βάρος W=80kg. τότε να υπολογιστεί η τιμή του S με τη μέθοδο GMP.

Στις παρακάτω ενότητες θα εξετάσουμε τα βήματα επίλυσης αυτού του προβλήματος. Θα παρουσιαστούν διάφορες μέθοδοι επίλυσης, ώστε ο αναγνώστης να σχηματίσει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα των διαφόρων μεθόδων.

8.1.Υπολογισμός Σχέσης Συνεπαγωγής

Ο υπολογισμός της σχέσης συνεπαγωγής για τον κάθε κανόνα θα γίνει με χρήση των μεθόδων Mamdani min και Larsen Product που παρουσιάστηκαν στη σχετική ενότητα. Οποιαδήποτε από τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί, και οι συγκεκριμένες δύο επιλέχτηκαν χάριν απλότητας.

Μέθοδος Mamdani min

Αρχικά, θα υπολογίζουμε τον κανόνα R1, με τη χρήση του παρακάτω πίνακα. Στον πίνακα αυτό, θα βάλουμε τις τιμές της συνάρτησης συμμετοχής της τιμής TALL στις δύο πρώτες στήλες και αντίστοιχα στις δύο πρώτες γραμμές για τις τιμές της συνάρτησης συμμετοχής της τιμής LARGE. Θα συμπληρώσουμε τα υπόλοιπα κελιά του πίνακα, βάσει του τύπου $\mu_{TALL}(x) \wedge \mu_{LARGE}(y)$.

R_{R1}(TALL,LARGE)	LARGE	37	39	41
TALL		0	0.5	1
1.6	0	0	0	0
1.7	0.5	0	0.5	0.5
1.8	0.7	0	0.5	0.7
1.9	1	0	0.5	1

Πίνακας 8.1 – Σχέση συνεπαγωγής κανόνα R1

Για τον υπολογισμό των κανόνων R2 και R3 θα πρέπει να προσέξουμε ότι υπάρχουν συνδέσεις με το λογικό AND στους κανόνες. Όπως έχουμε δει σε προηγούμενη ενότητα, το λογικό AND είναι ισοδύναμο με την πράξη min. Σε τέτοιου είδους κανόνες οι πίνακες που σχηματίζονται είναι παραπάνω διαστάσεων. Συγκεκριμένα, αν έχουμε n ασαφείς προτάσεις στο if μέρος του κανόνα, οι διαστάσεις του πίνακα θα είναι n+1. Άρα σε αυτή την περίπτωση μπορούμε είτε να σχεδιάσουμε έναν πίνακα τριών διαστάσεων, ή έναν δύο διαστάσεων ενώνοντας τις τιμές που συνδέονται με το λογικό AND. Ο πίνακας για τον κανόνα R2 θα είναι τρισδιάστατος, στον οποίο θα εκφράσουμε δύο διαστάσεις σε μία, και ο πίνακας για τον R3 θα είναι δισδιάστατος.

R_{R2}(SHORT,HEAVY,LARGE)	LARGE	37	39	41
(SHORT, HEAVY)		0	0.5	1
(1.6, 70)	(1, 0)	0	0	0
(1.7, 70)	(0.7, 0)	0	0	0
(1.8, 70)	(0.3, 0)	0	0	0
(1.9, 70)	(0, 0)	0	0	0
(1.6, 80)	(1, 0.4)	0	0.4	0.4
(1.7, 80)	(0.7, 0.4)	0	0.4	0.4
(1.8, 80)	(0.3, 0.4)	0	0.3	0.3
(1.9, 80)	(0, 0.4)	0	0	0
(1.6, 90)	(1, 0.8)	0	0.5	0.8
(1.7, 90)	(0.7, 0.8)	0	0.5	0.7
(1.8, 90)	(0.3, 0.8)	0	0.3	0.3
(1.9, 90)	(0, 0.8)	0	0	0
(1.6, 100)	(1, 1)	0	0.5	1
(1.7, 100)	(0.7, 1)	0	0.5	0.7
(1.8, 100)	(0.3, 1)	0	0.3	0.3
(1.9, 100)	(0, 1)	0	0	0

Πίνακας 8.2 – Σχέση συνεπαγωγής κανόνα R2

R_{R3}(SHORT,LIGHT,SMALL)	SMALL	37	39	41
(SHORT ∧ HEAVY)		1	0.5	0
(1.6 ∧ 70)	(1 ∧ 1)	1	0.5	0
(1.7 ∧ 70)	(0.7 ∧ 1)	0.7	0.5	0
(1.8 ∧ 70)	(0.3 ∧ 1)	0.3	0.3	0
(1.9 ∧ 70)	(0 ∧ 1)	0	0	0
(1.6 ∧ 80)	(1 ∧ 0.8)	0.8	0.5	0
(1.7 ∧ 80)	(0.7 ∧ 0.8)	0.7	0.5	0
(1.8 ∧ 80)	(0.3 ∧ 0.8)	0.3	0.3	0
(1.9 ∧ 80)	(0 ∧ 0.8)	0	0	0
(1.6 ∧ 90)	(1 ∧ 0.2)	0.2	0.2	0
(1.7 ∧ 90)	(0.7 ∧ 0.2)	0.2	0.2	0
(1.8 ∧ 90)	(0.3 ∧ 0.2)	0.2	0.2	0
(1.9 ∧ 90)	(0 ∧ 0.2)	0	0	0
(1.6 ∧ 100)	(1 ∧ 0)	0	0	0
(1.7 ∧ 100)	(0.7 ∧ 0)	0	0	0
(1.8 ∧ 100)	(0.3 ∧ 0)	0	0	0
(1.9 ∧ 100)	(0 ∧ 0)	0	0	0

Πίνακας 8.3 – Σχέση συνεπαγωγής κανόνα R3

Μέθοδος Larsen product

Θα εργαστούμε όπως και με την μέθοδο Mamdani min, μόνο που αντί για χρήση του $\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)$ θα κάνουμε χρήση του $\mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$. Οπότε, για τον κανόνα R1 έχουμε:

R_{R1}(TALL,LARGE)	LARGE	37	39	41
TALL		0	0.5	1
1.6	0	0	0	0
1.7	0.5	0	0.25	0.5
1.8	0.7	0	0.35	0.7
1.9	1	0	0.5	1

Πίνακας 8.4 – Σχέση συνεπαγωγής κανόνα R1

Για τους κανόνες R2 και R3 θα εργαστούμε αντίστοιχα. Για άλλη μια φορά θα δείξουμε και τους δύο τρόπους δημιουργίας των πινάκων.

R_{R2}(SHORT,HEAVY,LARGE)	LARGE	37	39	41
(SHORT, HEAVY)		0	0.5	1
(1.6, 70)	(1, 0)	0	0	0
(1.7, 70)	(0.7, 0)	0	0	0
(1.8, 70)	(0.3, 0)	0	0	0
(1.9, 70)	(0, 0)	0	0	0
(1.6, 80)	(1, 0.4)	0	0.2	0.4
(1.7, 80)	(0.7, 0.4)	0	0.14	0.28
(1.8, 80)	(0.3, 0.4)	0	0.6	0.12
(1.9, 80)	(0, 0.4)	0	0	0
(1.6, 90)	(1, 0.8)	0	0.4	0.8
(1.7, 90)	(0.7, 0.8)	0	0.28	0.56
(1.8, 90)	(0.3, 0.8)	0	0.12	0.24
(1.9, 90)	(0, 0.8)	0	0	0
(1.6, 100)	(1, 1)	0	0.5	1
(1.7, 100)	(0.7, 1)	0	0.35	0.7
(1.8, 100)	(0.3, 1)	0	0.15	0.3
(1.9, 100)	(0, 1)	0	0	0

Πίνακας 8.5 – Σχέση συνεπαγωγής κανόνα R2

R_{R3}(SHORT,LIGHT,SMALL)	SMALL	37	39	41
(SHORT ∧ HEAVY)		1	0.5	0
(1.6 ∧ 70)	(1 ∧ 1)	1	0.5	0
(1.7 ∧ 70)	(0.7 ∧ 1)	0.7	0.35	0
(1.8 ∧ 70)	(0.3 ∧ 1)	0.3	0.15	0
(1.9 ∧ 70)	(0 ∧ 1)	0	0	0
(1.6 ∧ 80)	(1 ∧ 0.8)	0.8	0.4	0
(1.7 ∧ 80)	(0.7 ∧ 0.8)	0.7	0.35	0
(1.8 ∧ 80)	(0.3 ∧ 0.8)	0.3	0.15	0
(1.9 ∧ 80)	(0 ∧ 0.8)	0	0	0
(1.6 ∧ 90)	(1 ∧ 0.2)	0.2	0.1	0
(1.7 ∧ 90)	(0.7 ∧ 0.2)	0.2	0.1	0

(1.8 ∧ 90)	(0.3 ∧ 0.2)	0.2	0.1	0
(1.9 ∧ 90)	(0 ∧ 0.2)	0	0	0
(1.6 ∧ 100)	(1 ∧ 0)	0	0	0
(1.7 ∧ 100)	(0.7 ∧ 0)	0	0	0
(1.8 ∧ 100)	(0.3 ∧ 0)	0	0	0
(1.9 ∧ 100)	(0 ∧ 0)	0	0	0

Πίνακας 8.6 – Σχέση συνεπαγωγής κανόνα R3

8.2.Παραγωγή αποτελεσμάτων μέσω συλλογικών διαδικασιών

Στο στάδιο αυτό θα εφαρμόσουμε τη συλλογιστική διαδικασία GMP, την οποία έχουμε αναφέρει σε προηγούμενη ενότητα. Ο λόγος που επιλέχθηκε η συγκεκριμένη διαδικασία, δίνεται από τη φύση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, αν αλλάξουμε την εκφώνηση σε μορφή κανόνα θα έχουμε τους εξής κανόνες:

if H is TALL then S is LARGE

H is 1.7 S is S_{R1} (?)

if H is SHORT AND W is HEAVY then S is LARGE

H is 1.7 AND W is 80 S is S_{R2} (?)

if H is SHORT AND W is LIGHT the S is SMALL

H is 1.7 AND W is 80 S is S_{R3} (?)

Δεδομένης αυτής της μορφής οι απαντήσεις που θέλουμε θα δοθούν αντίστοιχα από τους τύπους:

S_{R1}=H∘R_{R1} (TALL, LARGE)

S_{R2}=(H∧W)∘R_{R2} (SHORT, HEAVY, LARGE)= H∘W∘R_{R2} (SHORT, HEAVY, LARGE)

S_{R3}=(H∧W)∘R_{R3} (SHORT, LIGHT, SMALL)= H∘W∘R_{R3} (SHORT, LIGHT, SMALL)

Θυμίζουμε πως την ύπαρξη του λογικού AND την ερμηνεύουμε ως την πράξη της τομής, για τα ασαφή σύνολα. Επίσης, θα πρέπει να τονιστεί ότι τα H και W σε αυτό το στάδιο αφορούν μια συγκεκριμένη τιμή της εκάστοτε μεταβλητής και όχι την ίδια τη μεταβλητή, με όλες τις πιθανές τιμές της. Για να μπορέσουμε να συνεχίσουμε την εργασία μας, θα πρέπει να εκφράσουμε τις τιμές αυτές με τη μορφή ασαφούς συνόλου. Οπότε έχουμε:

H= {(1.6 , 0), (1.7 , 1), (1.8 , 0), (1.9 , 0)}

W= {(70 , 0), (80 , 1), (90 , 0), (100 , 0)}

Τους υπολογισμούς μας θα τους κάνουμε πρώτα για τα δεδομένα από τη μέθοδο Mamdani min και μετά με τα δεδομένα από τη μέθοδο Larsen product.

Mamdani min

Η πράξη της σύνθεσης θα οριστεί ως μια πράξη max-min μεταξύ των στοιχείων της ασαφούς τιμής που έχουμε και του πίνακα που φτιάξαμε στο προηγούμενο βήμα. Συγκεκριμένα για το κάθε στοιχείο θα γίνει το εξής:

1) Για κάθε στήλη του κάθε πίνακα, θα εξετάζουμε το κάθε στοιχείο με το αντίστοιχο της ασαφούς τιμής που έχουμε, και θα διαλέγουμε το μικρότερο.
2) Από όλα τα στοιχεία που θα έχουμε συλλέξει, θα διαλέξουμε το μεγαλύτερο.
3) Η τιμή που θα έχουμε αποτελεί τη τιμή της συνάρτησης συμμετοχής για την αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής.
4) Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για όλες τις στήλες.

Συγκεκριμένα, για την S_{R1} έχουμε:

- Για την στήλη της τιμής 37 = max (min(μ_H(1.6) , 0) , min(μ_H(1.7) , 0) , min(μ_H(1.8) , 0) , min(μ_H(1.9) , 0)) = max (min(0 , 0) , min(1 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0))= max (0 , 0 , 0 , 0) = 0
- Για την στήλη της τιμής 39 = max (min(μ_H(1.6) , 0) , min(μ_H(1.7) , 0.5) , min(μ_H(1.8) , 0.5) , min(μ_H(1.9) , 0.5)) = max (min(0 , 0.5) , min(1 , 0.5) , min(0 , 0.5) , min(0 , 0.5))= max (0 , 0.5 , 0 , 0) = 0.5
- Για την στήλη της τιμής 41 = max (min(μ_H(1.6) , 0) , min(μ_H(1.7) , 0.5) , min(μ_H(1.8) , 0.7) , min(μ_H(1.9) , 1)) = max (min(0 , 0) , min(1 , 0.5) , min(0 , 0.7) , min(0 , 1)) = max (0 , 0.5 , 0 , 0) = 0.5

Άρα η S_{R1} = {(37 , 0), (39 , 0.5), (41 , 0.5)}. (Σχήμα 8.1 – (α))

Για την S_{R2} έχουμε:

- Για την στήλη της τιμής 37 = max (min(μ_H(1.6) , μ_w(70) , 0) , min(μ_H(1.6) , μ_w(80) , 0) , min(μ_H(1.6) , μ_w(90) , 0) , min(μ_H(1.6) , μ_w(100) , 0) , min(μ_H(1.7) , μ_w(70) , 0) , min(μ_H(1.7) , μ_w(80) , 0) , min(μ_H(1.7) , μ_w(90) , 0) , min(μ_H(1.7) , μ_w(100) , 0) , min(μ_H(1.8) , μ_w(70) , 0) , min(μ_H(1.8) , μ_w(80) , 0) , min(μ_H(1.8) , μ_w(90) , 0) , min(μ_H(1.8) , μ_w(100) , 0) , min(μ_H(1.9) , μ_w(70) , 0) , min(μ_H(1.9) , μ_w(80) , 0) , min(μ_H(1.9) , μ_w(90) , 0) , min(μ_H(1.9) , μ_w(100) , 0) ,) = max (min(0 , 0 , 0) , min(0 , 1 , 0) , min(0 , 0 , 0) , min(0 , 0 , 0) , min(1 , 0 , 0) , min(1 , 1 , 0) , min(1 , 0 , 0) , min(1 , 0 , 0) , min(0 , 0 , 0) , min(0 , 1 , 0) , min(0 , 0 , 0) , min(0 , 0 , 0) , min(0 , 0 , 0) , min(0 , 1 , 0) , min(0 , 0 , 0) , min(0 , 0 , 0))= max (0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0) = 0
- Για την στήλη της τιμής 39 = max (min(0 , 0 , 0) , min(0 , 1 , 0) , min(0 , 0 , 0) , min(0 , 0 , 0) , min(1 , 0 , 0.4) , min(1 , 1 , 0.4) , min(1 , 0 , 0.3) , min(1 , 0 , 0) , min(0 , 0 , 0.5) , min(0 , 1 , 0.5) , min(0 , 0 , 0.3) , min(0 , 0 , 0) , min(0 , 0 , 0.5) , min(0 , 1 , 0.5) , min(0 , 0 , 0.3) , min(0 , 0 , 0))= max (0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0.4 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0) = 0.4
- Για την στήλη της τιμής 41 = max (min(0 , 0 , 0) , min(0 , 1 , 0) , min(0 , 0 , 0) , min(0 , 0 , 0) , min(1 , 0 , 0.4) , min(1 , 1 , 0.4) , min(1 , 0 , 0.3) , min(1 , 0 , 0) , min(0 , 0 , 0.8) , min(0 , 1 , 0.7) , min(0 , 0 , 0.3) , min(0 , 0 , 0) , min(0 , 0 , 1) , min(0 , 1 , 0.7) ,

min(0 , 0 , 0.3) , min(0 , 0 , 0))= max (0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0.4 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0) = 0.4

Άρα η S_{R2} = {(37 , 0), (39 , 0.4), (41 , 0.4)}. (Σχήμα 8.1 – (β))

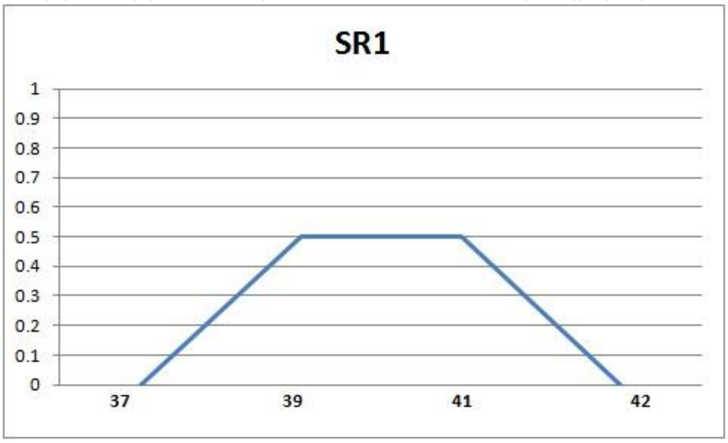
Για την S_{R3} έχουμε υπολογίσει την τομή των H και W, οπότε θα εργαστούμε όπως και στην S_{R1}. Η συνάρτηση συμμετοχής της H∧W είναι $\mu_{H\wedge W}(x,y)$={(0 , 1.6∧70) , (0 , 1.6∧80) , (0 , 1.6∧90) , (0 , 1.6∧100) , (0 , 1.7∧70) , (1 , 1.7∧80) , (0 , 1.7∧90) , (0 , 1.7∧100) , (0 , 1.8∧70) , (0 , 1.8∧80) , (0 , 1.8∧90) , (0 , 1.8∧100) , (0 , 1.9∧70) , (0 , 1.9∧80) , (0 , 1.9∧90) , (0 , 1.9∧100)}.

Οπότε έχουμε:

- Για την στήλη της τιμής 37 = max (min(0 , 1) , min(0 , 0.7) , min(0 , 0.3) , min(0 , 0) , min(0 , 0.8) , min(1 , 0.7) , min(0 , 0.3) , min(0 , 0) , min(0 , 0.2) , min(0 , 0.2) , min(0 , 0.2) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0))= max (0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0.7 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0) = 0.7
- Για την στήλη της τιμής 39 = max (min(0 , 0.5) , min(0 , 0.5) , min(0 , 0.5) , min(0 , 0) , min(0 , 0.5) , min(1 , 0.5) , min(0 , 0.3) , min(0 , 0) , min(0 , 0.2) , min(0 , 0.2) , min(0 , 0.2) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0))= max (0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0.5 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0) = 0.5
- Για την στήλη της τιμής 41 = max (min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(1 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0) , min(0 , 0))= max (0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0, 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0) = 0

Άρα η S_{R3} = {(37 , 0.7), (39 , 0.5), (41 , 0)}. (Σχήμα 8.1 – (γ))

Συναρτήσεις συμμετοχής των σχέσεων R_1, R_2 και R_3 με χρήση του Mamdani min



Σχήμα 8.1 – (α)

Σχήμα 8.1 – (β)

Σχήμα 8.1- (γ)

Larsen product

Με αυτή τη μέθοδο θα εργαστούμε όπως και πριν, μόνο που τώρα τα δεδομένα μας θα προέρχονται από τους πίνακες της μεθόδου Larsen product.

Κάνοντας τις πράξεις έχουμε ότι:

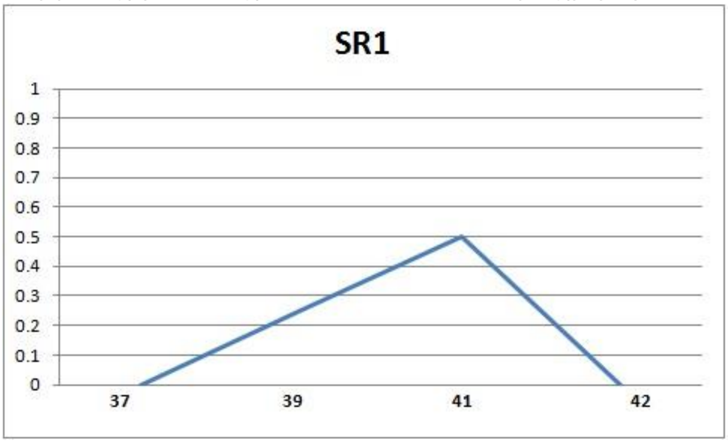
S_{R1}={(37 , 0), (39 , 0.25), (41 , 0.5)} (Σχήμα 8.2 – (α))

S_{R2}={(37 , 0), (39 , 0.14), (41 , 0.28)} (Σχήμα 8.2 – (β))

S_{R3}={(37 , 0.7), (39 , 0.35), (41 , 0)} (Σχήμα 8.2 – (γ))

Σημείωση: Στα διαγράμματα των συναρτήσεων συμμετοχής και των δύο μεθόδων έχουν σημειωθεί και οι τιμές 42, για τις S_{R1} και S_{R2}, και 35 για την S_{R3}. Αυτό γίνεται ώστε να φανούν πιο ολοκληρωμένες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων.

Συναρτήσεις συμμετοχής των σχέσεων R_1, R_2 και R_3 με χρήση του Larsen product



Σχήμα 8.2 – (α)

Σχήμα 8.2 – (β)

Σχήμα 8.2 – (γ)

8.3.Παραγωγή τελικού ασαφούς αποτελέσματος

Μέχρι στιγμής έχουμε εξάγει κάποια ασαφή αποτελέσματα από τα προηγούμενα στάδια. Το γεγονός ότι υπάρχουν πολλά και διαφορετικά αποτελέσματα, αποτελεί συχνό και αναμενόμενο φαινόμενο στην ασαφή συλλογιστική. Αυτό συμβαίνει, επειδή οι τιμές που εξετάζουμε, συνήθως ανήκουν σε πολλαπλά σύνολα, με κάποιο βαθμό συμμετοχής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ενεργοποίηση περισσότερων του ενός κανόνων, και υπάρχουν και περιπτώσεις όπου όλοι οι κανόνες μπορεί να ενεργοποιηθούν.

Σημείωση: Αυτό το φαινόμενο το παρατηρούμε σε όλα τα είδη ασαφών κανόνων, αν και Βαθμιαίοι Ασαφείς Κανόνες και κανόνες με βαθμούς σημαντικότητας, ανοχή θορύβου και συντελεστές ευαισθησίας, μπορεί να το παρουσιάσουν σε μικρότερο βαθμό ή σε μια πιο εύκολα αντιμετωπίσιμη μορφή.

Για να μπορέσουμε να αντιμετωπίσουμε αυτό το φαινόμενο, και εν τέλει να εξάγουμε ένα μοναδικό αποτέλεσμα, εφαρμόζουμε την πράξη της συνάθροισης (aggregation/composition). Με αυτή την πράξη μπορούμε να συνδυάσουμε τα αποτελέσματα που έχουμε εξάγει σε ένα, ούτος ώστε να προχωρήσουμε στο επόμενο στάδιο, την αποσαφήνιση. Δεν πρέπει να ξεχνάμε πως το αποτέλεσμα που θα παραχθεί από αυτή την πράξη παραμένει σε ασαφή μορφή, και οι περισσότερες εφαρμογές απαιτούν σαφή αποτελέσματα.

Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι για την συνάθροιση των αποτελεσμάτων, με πιο διαδεδομένη τη μέθοδο Max. Με αυτή τη μέθοδο επιλέγουμε για κάθε στοιχείο του συνόλου, τη μεγαλύτερη τιμή, ώστε να εξασφαλίσουμε τη μέγιστη συμμετοχή στο τελικό σύνολο. Επίσης διαδεδομένη μέθοδος αποτελεί αυτή της συνάθροισης Sum, αν και τη συναντάμε συνήθως σε εφαρμογές με αξιοποίηση γινομένου.

Στο παράδειγμά μας θα εφαρμόσουμε και τις δύο μεθόδους, τη μέθοδο Max για τα αποτελέσματα της μεθόδου Mamdani min και τη μέθοδο Sum για τα αποτελέσματα της Larsen product.

Μέθοδος συνάθροισης Max

Με αυτή τη μέθοδο, θα εξετάσουμε τα αποτελέσματα των κανόνων και θα τα συγκρίνουμε σημείο προς σημείο, και θα επιλέξουμε το μεγαλύτερο (pointwise maximum – $max_{p/w}$).

Συγκεκριμένα έχουμε:

S={(37 , max(0 , 0 , 0.7)), (39 , max(0.5 , 0.4 , 0.5)), (41 , max(0.5 , 0.4 , 0))} = {(37 , 0.7) , (39 , 0.5) , (41 , 0.5)}

Μέθοδος συνάθροισης Sum

Με αυτή τη μέθοδο, θα εξετάσουμε τα αποτελέσματα των κανόνων και θα τα αθροίσουμε σημείο προς σημείο (pointwise sum – $sum_{p/w}$).

Οπότε έχουμε:

S={(37 , 0+0+0.7) , (39 , 0.25+0.14+0.35) , (41 , 0.5+0.28+0)} = {(37 , 0.7) , (39 , 0.74) , (41 , 0.78)}

Σημείωση: Είναι πιθανό κατά τη χρήση αυτής της μεθόδου να υπάρξουν τιμές συμμετοχής μεγαλύτερες της μονάδας. Σε αυτές τις περιπτώσεις κανονικοποιούμε το αποτέλεσμα.

8.4.Αποσαφήνιση

Στο συγκεκριμένο στάδιο, αυτό της αποσαφήνισης (defuzzification), μετατρέπουμε το αποτέλεσμα του σταδίου της συνάθροισης σε μια σαφή τιμή (crisp value). Είναι πολλές οι εφαρμογές που απαιτούν ασαφή συλλογιστική, που χρειάζονται σαφείς τιμές ώστε να εξάγουν αποτελέσματα ή να εφαρμόσουν αλγορίθμους, οπότε και αυτό το στάδιο είναι απαραίτητο.

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι αποσαφήνισης, από τις οποίες θα εξετάσουμε δύο, τη μέθοδο Maximum και τη μέθοδο Centroid (ή συχνά Center of gravity). Ενδεικτικά αναφέρουμε τις μεθόδους First/Last of Maxima, Center of Sums, Mean-max, Weighted Average και Center of Largest Area.

Μέθοδος Maximum

Η λογική πίσω από αυτή τη μέθοδο είναι αρκετά απλή, και θα μπορούσε να τη χαρακτηρίσει κανείς ως την πιο διαισθητική μέθοδο. Πρακτικά, η σαφής τιμή που θα παρουσιαστεί και ως τελικό αποτέλεσμα είναι το στοιχείο με τη μεγαλύτερη τιμή στη συνάρτηση συμμετοχής.

Έτσι εξετάζοντας το αποτέλεσμα της μεθόδου Mamdani min μπορούμε να δούμε ότι η τιμή εξόδου θα είναι 37, και στη προκειμένη περίπτωση SMALL.

Σε περίπτωση που είχαμε παραπάνω από μια τιμές, τότε θα παίρναμε το μέσο όρο (average of maxima). Καθαρά για την εξέταση αυτής της περίπτωσης, θα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση συμμετοχής S είναι ως εξής:

S= {(37 , 0) , (39 , 0.5) , (41 , 0.5)} (Σχήμα 8.3)

Τότε η τελική απάντηση θα ήταν η εξής:

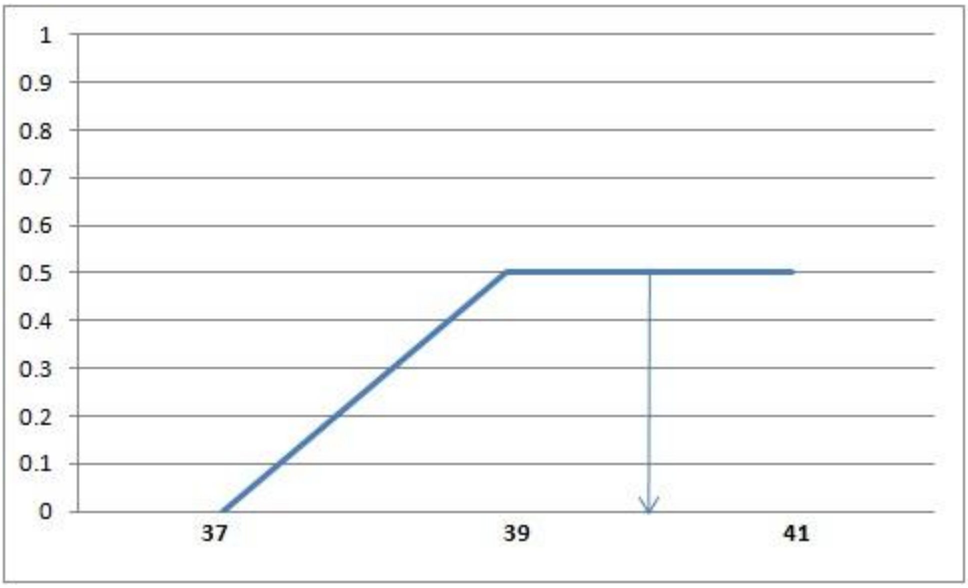
t_S= (39+41)/2=40.

Ένα από τα βασικότερα προτερήματα αυτής της μεθόδου, πέραν της απλότητας των υπολογισμών, αποτελεί το γεγονός ότι δεν μεροληπτεί υπέρ μιας συγκεκριμένης περιοχής τιμών. Αυτό μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε με το να αλλάξουμε για άλλη μια φορά την S με τον εξής τρόπο:

S= {(37 , 0.7) , (39 , 0.5) , (41 , 0.7)}

t_S=(37+41)/2=39

Να τονίσουμε, ότι το συγκεκριμένο αποτέλεσμα μπορεί να δείχνει παράλογο, όμως υπενθυμίζουμε πως είναι αποτέλεσμα αυθαίρετης αλλαγής, και όχι κάποιας διαδικασίας υπολογισμού.



Σχήμα 8.3 - Γραφική παράσταση της συνάρτησης συμμετοχής που προκύπτει από τη μέθοδο συνάθροισης Average-of-maxima. Παρουσιάζεται μέρος της γραφικής παράστασης. Το βέλος υποδεικνύει την τελική τιμή 40.

Μέθοδος Centroid

Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, που είναι γνωστή και ως Center of Gravity (COG), η τελική σαφής τιμή του αποτελέσματος, εξάγεται από το κέντρο βάρους της τελικής συνάρτησης συμμετοχής. Αυτό μπορεί να γίνει πιο εύκολα αντιληπτό στον αναγνώστη, αν θεωρήσουμε ότι η μέθοδος αυτή, ουσιαστικά εξετάζει τη τιμή προς την οποία τείνουν οι τιμές της συνάρτησης συμμετοχής, και την εξάγει ως αποτέλεσμα.

Ένα μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι το γεγονός ότι μεροληπτεί υπέρ των κεντρικών τιμών, έναντι των ακραίων. Επίσης, ένα ακόμα μειονέκτημα της μεθόδου αυτής, είναι το γεγονός ότι οι αλληλεπικαλυπτόμενες περιοχές, που συναντώνται αρκετά συχνά στην ασαφή συλλογιστική, υπολογίζονται μονάχα μια φορά. Θα εξετάσουμε αργότερα, μια παραλλαγή αυτής της μεθόδου ώστε να υπολογιστούν και οι αλληλεπικαλυπτόμενες περιοχές.

Το κέντρο βάρους μιας περιοχής που οριοθετείται από μια συνάρτηση f(t) ορισμένη μεταξύ των τιμών t_1 και t_2 στον οριζόντιο καρτεσιανό άξονα, ορίζεται από τη σχέση:

$$t=\frac{\int_{t1}^{t2} tf(t)dt}{\int_{t1}^{t2} f(t)dt}$$

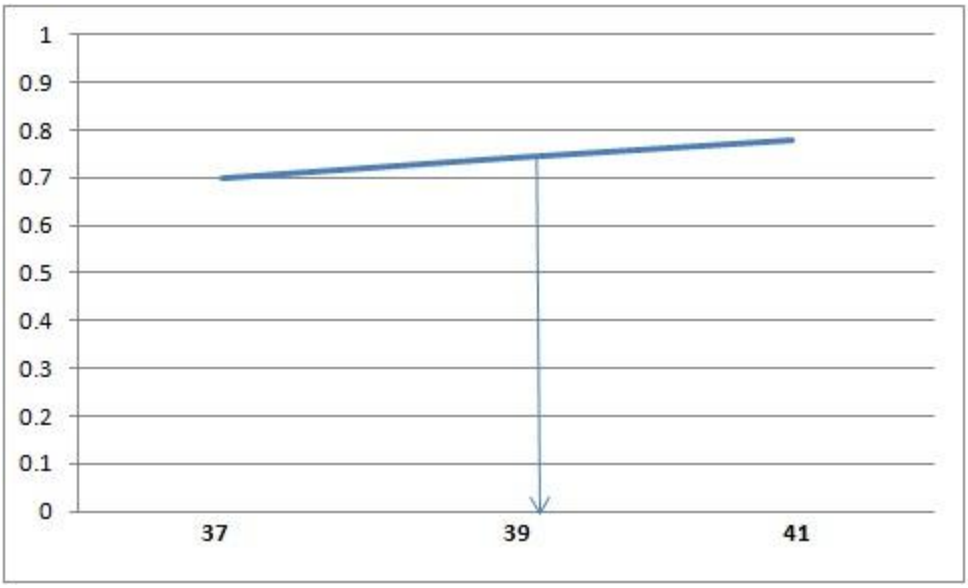
Στην περίπτωση διακριτού συνόλου αναφοράς, το ολοκλήρωμα αντικαθίσταται με διακριτό άθροισμα και γίνεται δειγματοληψία N σημείων, ως εξής:

$$t=\frac{\sum_{i=1}^{N} ti\cdot\mu S(ti)}{\sum_{i=1}^{N}\mu S(ti)}$$

Βάσει αυτής της μεθόδου, και με τα αποτελέσματα της συνάθροισης sum και για N=3, έχουμε:

$$s=\frac{\sum_{i=1}^{3} ti\cdot\mu S(ti)}{\sum_{i=1}^{3}\mu S(ti)}=\frac{0.7\cdot 37+0.74\cdot 39+0.78\cdot 41}{0.7+0.74+0.78}=\frac{86.74}{2.22}\cong 39.1$$

Οπότε βλέπουμε πως η τελική τιμή είναι το S=39.1 (Σχήμα 8.4), γεγονός που μας επιτρέπει να επιλέξουμε εμείς μεταξύ του LARGE και του SMALL, εφόσον το 39 συμμετέχει εξίσου και στα δύο σύνολα.



Σχήμα 8.4 - Γραφική παράσταση της συνάρτησης συμμετοχής που προκύπτει από τη μέθοδο συνάθροισης Centroid. Παρουσιάζεται μέρος της γραφικής παράστασης. Το βέλος υποδεικνύει την τελική τιμή 39.1.

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, μια παραλλαγή αυτής της μεθόδου, είναι η μέθοδος center of sums (COS) η οποία έχει απλούστερους υπολογισμούς και επιτρέπει τον υπολογισμό αλληλεπικαλυπτόμενων περιοχών. Ο τύπος της είναι:

$$t_{COS}=\frac{\sum_{i=1}^{N} ti\sum_{k=1}^{m}\mu Rk(ti)}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{m}\mu Rk(ti)}$$

9.Διαγραμματική επίλυση

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πως μπορούμε να εξάγουμε αποτελέσματα από ένα ασαφές σύστημα. Οι μέθοδοι που παρουσιάστηκαν όμως, απαιτούν πολλούς και αρκετές φορές, πολύπλοκους υπολογισμούς, κυρίως σε προβλήματα με πολλούς και σύνθετους κανόνες.

Ένας εναλλακτικός τρόπος επίλυσης αυτών των προβλημάτων, που απαιτεί λιγότερους υπολογισμούς είναι αυτός της διαγραμματικής επίλυσης. Παρότι τα αποτελέσματα αυτής της μεθόδου είναι λιγότερο ακριβή, υπάρχουν προβλήματα που η ταχύτητα των υπολογισμών αποτελεί σημαντικότερο παράγοντα από την ακρίβεια.

Η διαγραμματική επίλυση μπορεί να εφαρμοστεί σε προβλήματα που έχουν συνεχείς συναρτήσεις συμμετοχής. Παρακάτω θα εξετάσουμε αυτή την προσέγγιση για το πρόβλημα που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η ανάγκη για συνεχείς συναρτήσεις συμμετοχής μπορεί να καλυφθεί κάνοντας χρήση της γραμμικής παρεμβολής.

Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 9.1, με την εισαγωγή των δεδομένων που αναφέραμε προηγουμένως, ακολουθούμε την παρακάτω μέθοδο:

- Εντοπίζουμε τα σημεία τομής της κάθετης από την εξεταζόμενη τιμή, με τις συναρτήσεις συμμετοχής.
- Φέρουμε ευθείες από αυτό το διάγραμμα σε αυτό του αποτελέσματος.
- Βάσει των κανόνων μαρκάρουμε τις περιοχές.

Μετά από αυτά τα βήματα, μπορούμε να εντοπίσουμε την απάντηση.

Συγκεκριμένα, για τον κάθε κανόνα χρωματίζουμε την ελάχιστη περιοχή για την οποία ισχύει. Για παράδειγμα, ο βαθμός συμμετοχής του LIGHT είναι ο μικρότερος, ο τρίτος κανόνας θα αντιστοιχεί στην περιοχή που ορίζει αυτό μαζί με το SMALL (πράσινη περιοχή).

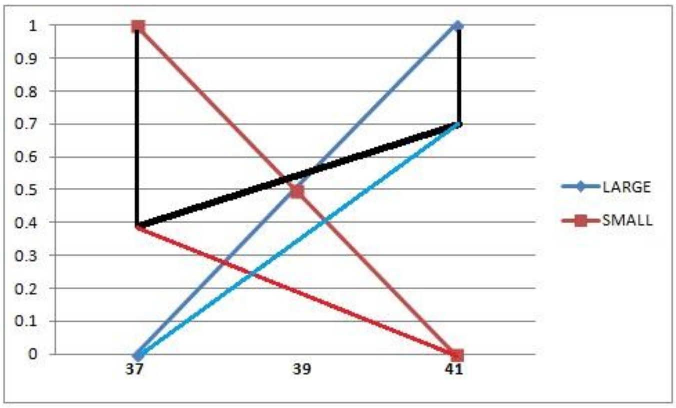
Η πορτοκαλί περιοχή, ανήκει στον πρώτο κανόνα, και έχει κοινή την περιοχή με τον τρίτο κανόνα, δεξιά της συνάρτησης LARGE.

Αντίστοιχα ο δεύτερος κανόνας αντιπροσωπεύεται από την μωβ περιοχή.

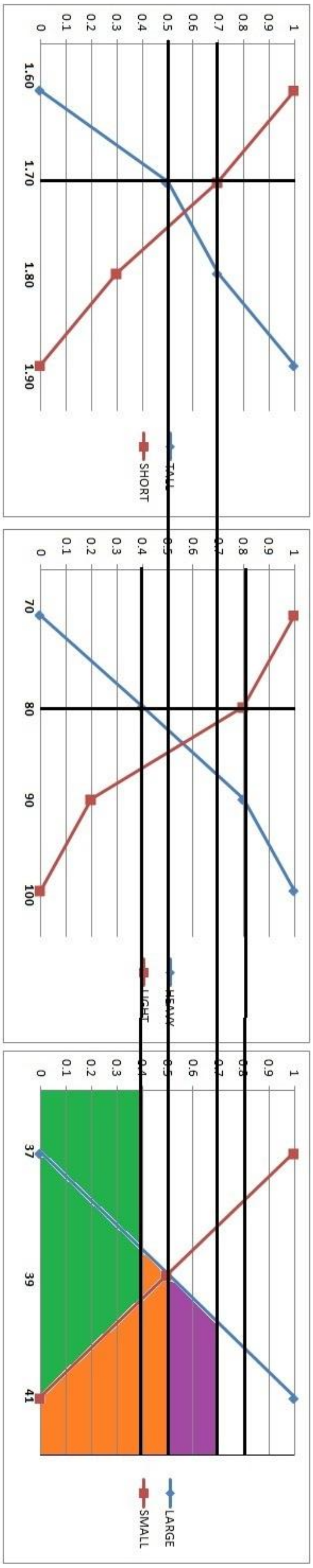
Η συνολική περιοχή μας δίνει την απάντηση, την οποία πρέπει να αποσαφηνίσουμε με μεθόδους όπως η Centroid.

Για την μέθοδο product, η προσέγγιση είναι διαφορετική. Αφού εκτελέσουμε τα δυο πρώτα βήματα, έχουμε αλλαγή της συνάρτησης συμμετοχής των LARGE και SMALL. Αυτό που γίνεται είναι ότι τα άνω άκρα των συναρτήσεων αυτών θα ελαχιστοποιηθούν στα ελάχιστα σημεία που ισχύουν οι κανόνες, δηλαδή στο παράδειγμα μας στα 0.4 η SMALL και στο 0.7 η LARGE.

Η ευθεία μεταξύ αυτών των δύο σημείων μας δίνει την τελική λύση που πρέπει να αποσαφηνιστεί όπως έγινε και στην αναλυτική επίλυση. (Σχήμα 9.2)



Σχήμα 9.2 - Larsen Product



Σχήμα 9.2 – Mamdani min

10.Παράδειγμα ασαφούς συλλογιστικής

Παρακάτω θα παρουσιαστεί ένα ακόμα παράδειγμα ασαφούς συλλογιστικής. Σκοπός αυτού του παραδείγματος είναι η περαιτέρω εξοικείωση με την διαδικασία, αλλά και με τη χρήση σύνθετων κανόνων.

Έστω ένα σύστημα ασαφούς συλλογιστικής, το οποίο υπολογίζει την καταλληλότητα των καιρικών συνθηκών για οδήγηση στους δρόμους. Συγκεκριμένα το σύστημα θα εξετάζει την βροχόπτωση (RAIN –R) και την ομίχλη (FOG –F) και θα αποφασίζει αν οι συνθήκες είναι ασφαλείς (SAFE –S).

Οι κανόνες του συστήματος (Ri) είναι:

R1: if R is HEAVY OR F is THICK then S is LOW

R2: if R is LIGHT AND F is THIN then S is HIGH

Τα σύνολα HEAVY, LIGHT, THICK, THIN, LOW και HIGH είναι ως εξής:

HEAVY={(0 , 0) , (20 , 0) , (40 , 0.3) , (60 , 0.7) , (80 , 0.9) , (100 , 1)}

LIGHT={(0 , 1) , (20 , 0.8) , (40 , 0.5) , (60 , 0.2) , (80 , 0) , (100 , 0)}

THICK={(0 , 0) , (20 , 0.2) , (40 , 0.4) , (60 , 0.7) , (80 , 0.9) , (100 , 1)}

THIN={(0 , 1) , (20 , 1) , (40 , 0.8) , (60 , 0.3) , (80 , 0) , (100 , 0)}

LOW={(30 , 1) , (55 , 0.5) , (80 , 0)}

HIGH={(30 , 0) , (55 , 0.5) , (80 , 1)}

Όλες οι τιμές των συναρτήσεων συμμετοχής εκφράζουν ποσοστά επί τοις εκατό.

Αν η βροχόπτωση είναι 40% και η ομίχλη έχει πυκνότητα 60%, τότε είναι ασφαλές το να οδηγήσουμε στο δρόμο;

Για την επίλυση θα γίνει χρήση των μεθόδων Mamdani min, GMP και Max.

10.1.Υπολογισμός Σχέσης Συνεπαγωγής

R_{R1}(HEAVY,THICK,LOW)	LOW	30	55	80
(HEAVY∨THICK)		1	0.5	0
(0∨0)	(0∨0)	0	0	0
(0∨20)	(0∨0.2)	0.2	0.2	0
(0∨40)	(0∨0.4)	0.4	0.4	0
(0∨60)	(0∨0.7)	0.7	0.5	0
(0∨80)	(0∨0.9)	0.9	0.5	0
(0∨100)	(0∨1)	1	0.5	0
(20∨0)	(0∨0)	0	0	0
(20∨20)	(0∨0.2)	0.2	0.2	0
(20∨40)	(0∨0.4)	0.4	0.4	0

(20∨60)	(0∨0.7)	0.7	0.5	0
(20∨80)	(0∨0.9)	0.9	0.5	0
(20∨100)	(0∨1)	1	0.5	0
(40∨0)	(0.3∨0)	0.3	0.3	0
(40∨20)	(0.3∨0.2)	0.3	0.3	0
(40∨40)	(0.3∨0.4)	0.4	0.4	0
(40∨60)	(0.3∨0.7)	0.7	0.5	0
(40∨80)	(0.3∨0.9)	0.9	0.5	0
(40∨100)	(0.3∨1)	1	0.5	0
(60∨0)	(0.7∨0)	0.7	0.5	0
(60∨20)	(0.7∨0.2)	0.7	0.5	0
(60∨40)	(0.7∨0.4)	0.7	0.5	0
(60∨60)	(0.7∨0.7)	0.7	0.5	0
(60∨80)	(0.7∨0.9)	0.9	0.5	0
(60∨100)	(0.7∨1)	1	0.5	0
(80∨0)	(0.9∨0)	0.9	0.5	0
(80∨20)	(0.9∨0.2)	0.9	0.5	0
(80∨40)	(0.9∨0.4)	0.9	0.5	0
(80∨60)	(0.9∨0.7)	0.9	0.5	0
(80∨80)	(0.9∨0.9)	0.9	0.5	0
(80∨100)	(0.9∨1)	1	0.5	0
(100∨0)	(1∨0)	1	0.5	0
(100∨20)	(1∨0.2)	1	0.5	0
(100∨40)	(1∨0.4)	1	0.5	0
(100∨60)	(1∨0.7)	1	0.5	0
(100∨80)	(1∨0.9)	1	0.5	0
(100∨100)	(1∨1)	1	0.5	0

Πίνακας 10.1 – Σχέση συνεπαγωγής κανόνα R1

R_{R2}(LIGHT,THIN,HIGH)	HIGH	30	55	80
(LIGHT∧THIN)		0	0.5	1
(0∧0)	(1∧1)	0	0.5	1
(0∧20)	(1∧1)	0	0.5	1
(0∧40)	(1∧0.8)	0	0.5	0.8
(0∧60)	(1∧0.3)	0	0.3	0.3
(0∧80)	(1∧0)	0	0	0
(0∧100)	(1∧0)	0	0	0
(20∧0)	(0.8∧1)	0	0.5	0.8
(20∧20)	(0.8∧1)	0	0.5	0.8
(20∧40)	(0.8∧0.3)	0	0.3	0.3
(20∧60)	(0.8∧0.8)	0	0.5	0.8
(20∧80)	(0.8∧0)	0	0	0
(20∧100)	(0.8∧0)	0	0	0
(40∧0)	(0.5∧1)	0	0.5	0.5
(40∧20)	(0.5∧1)	0	0.5	0.5
(40∧40)	(0.5∧0.8)	0	0.5	0.5
(40∧60)	(0.5∧0.3)	0	0.3	0.3
(40∧80)	(0.5∧0)	0	0	0
(40∧100)	(0.5∧0)	0	0	0

(60∧0)	(0.2∧1)	0	0.2	0.2
(60∧20)	(0.2∧1)	0	0.2	0.2
(60∧40)	(0.2∧0.8)	0	0.2	0.2
(60∧60)	(0.2∧0.3)	0	0.2	0.2
(60∧80)	(0.2∧0)	0	0	0
(60∧100)	(0.2∧0)	0	0	0
(80∧0)	(0∧1)	0	0	0
(80∧20)	(0∧1)	0	0	0
(80∧40)	(0∧0.8)	0	0	0
(80∧60)	(0∧0.3)	0	0	0
(80∧80)	(0∧0)	0	0	0
(80∧100)	(0∧0)	0	0	0
(100∧0)	(0∧1)	0	0	0
(100∧20)	(0∧1)	0	0	0
(100∧40)	(0∧0.8)	0	0	0
(100∧60)	(0∧0.3)	0	0	0
(100∧80)	(0∧0)	0	0	0
(100∧100)	(0∧0)	0	0	0

Πίνακας 10.2 – Σχέση συνεπαγωγής κανόνα R2

10.2.Παραγωγή αποτελεσμάτων μέσω συλλογικών διαδικασιών

Κάνοντας χρήση του GMP έχουμε:

if R is HEAVY OR F is THICK then S is LOW

R is 40 OR F is 60 S is S_{R1}(?)

if R is LIGHT AND F is THIN then S is HIGH

R is 40 AND F is 60 S is S_{R2}(?)

Δεδομένης αυτής της μορφής οι απαντήσεις που θέλουμε θα δοθούν αντίστοιχα από τους τύπους:

S_{R1}=(R∨F)∘R_{R1} (HEAVY, THICK, LOW)= R∘F∘R_{R1} (HEAVY, THICK, LOW)

S_{R2}=(R∧F)∘R_{R2} (LIGHT, THIN, HIGH)= R∘F∘R_{R2} (LIGHT, THIN, HIGH)

Με χρήση της μεθόδου Mamdani min για τη σύνθεση, και δεδομένου ότι:

R=={(0 , 0) , (20 , 0) , (40 , 1) , (60 , 0) , (80 , 0) , (100 , 0)}

F={(0 , 0) , (20 , 0) , (40 , 0) , (60 , 1) , (80 , 0) , (100 , 0)}

Για την S_{R1} έχουμε:

- Για τη στήλη 30=max(min(max(0∨0),1) , min(max(0∨0.2),1) , min(max(0∨0.4),1) , min(max(0∨0.7),1) , min(max(0∨0.9),1) , min(max(0∨1),1) , min(max(0∨0),1) , min(max(0∨0.2),1) , min(max(0∨0.4),1) , min(max(0∨0.7),1) , min(max(0∨0.9),1) , min(max(0∨1),1) , min(max(0.3∨0),1) , min(max(0.3∨0.2),1) , min(max(0.3∨0.4),1) , min(max(0.3∨0.7),1) , min(max(0.3∨0.9),1) , min(max(0.3∨1),1) , min(max(0.7∨0),1), min(max(0.7∨0.2),1), min(max(0.7∨0.4),1), min(max(0.7∨0.7),1), min(max(0.7∨0.9),1) , min(max(0.7∨1),1) , min(max(0.9∨0),1) , min(max(0.9∨0.2),1), min(max(0.9∨0.4),1), min(max(0.9∨0.7),1), min(max(0.9∨0.9),1), min(max(0.9∨1),1), min(max(1∨0),1) , min(max(1∨0.2),1) , min(max(1∨0.4),1) , min(max(1∨0.7),1) , min(max(1∨0.9),1) , min(max(1∨1),1))=max(0 , 0.2 , 0.4 , 0.7 , 0.9 , 1 , 0 , 0.2 , 0.4 , 0.7 , 0.9 , 1 , 0.3 , 0.3 , 0.4 , 0.7 , 0.9 , 1 , 0.7 , 0.7 , 0.7 , 0.7 , 0.9 , 1 , 0.9 , 0.9 , 0.9 , 0.9, 0.9 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1)=1

- Για τη στήλη 55= 0.5
- Για τη στήλη 80=0

Σημείωση: η διαδικασία που θα ακολουθηθεί για όλες τις στήλες είναι παρόμοια, και δεν έχει συμπληρωθεί χάριν συντομίας.

Άρα η S_{R1}={(30 , 1) , (55 , 0.5) , (80 , 0)}.

Εργαζόμαστε αντίστοιχα για την S_{R2} με τη διαφορά ότι τώρα θα βρίσκουμε το μέγιστο των ελαχίστων όπως κάναμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Οπότε η S_{R2}={(30 , 0) , (55 , 0.5) , (80 , 1)}.

10.3.Παραγωγή τελικού ασαφούς αποτελέσματος

Σε αυτό το στάδιο θα συναθροίσουμε τις S_{R1} και S_{R2} με τη μέθοδο Max.

S={(30 , max(1 , 0)) , (55 , max(0.5 , 0.5)), (80 , max(0 , 1))}={(30 , 1) , (55 , 0.5) , (80 , 1)}

10.4.Αποσαφήνιση

Θα αποσαφηνίσουμε το αποτέλεσμα με τη μέθοδο Maximum. Συγκεκριμένα, επειδή έχουμε δύο μέγιστες τιμές, η αποσαφήνιση θα γίνει με τη μέθοδο average of maxima.

Όποτε έχουμε:

t=(30+80)/2=55

Άρα βλέπουμε πως οι συνθήκες οδήγησης είναι ασφαλής κατά 55%.

Βιβλιογραφία

[1] Ι. Βλαχάβας, Π. Κεφαλάς, Ν. Βασιλειάδης, Φ, Κόκκορας, Η. Σακελλαρίου
Τεχνητή Νοημοσύνη, Γ’ έκδοση, ISBN:960-387-431-0

[2] Nikola K. Kasabov
Foundations of Neural Networks, Fuzzy Systems, and Knowledge Engineering, ISBN: 0-262-11212-4

[3] Christian Jacob
04 Fuzzy 6up – Course Slides
University of Calgary

[4] K.M. Motahar Hossain, Zahir Raihan, M.M.A. Hashem
On Appropriate Selection of Fuzzy Aggregation Operators in
Medical Decision Support System
Department of Computer Science and Engineering,
Khulna University of Engineering & Technology (KUET), Khulna-920300, Bangladesh.

[5] D.T. Pham, M. Castellani
Action aggregation and defuzzification in Mamdani-type fuzzy systems
Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science 2002 216:747

[6] Defuzzification – PowerPoint Presentation with methods from:
Bart Kosko, Fuzzy Engineering
Timothy J. Ross, Fuzzy Logic with Engineering Applications

[7] Aleksander Ohrn
Rough Logic Control: A new approach to automatic control?
Norwegian Institute of Technology, University of Trondheim

[8] Andriano Cruz
Extension Principle – Power Point Presentation

[9] Adnan Yazici
Fuzzy Implication Rules – Power Point Presentation
Middle East Technical University, Turkey

[10] Nata.a Sladoje
Fuzzy Sets and Fuzzy Techniques
Centre for Image Analysis
Uppsala University

[11] Robert Full´er
Fuzzy Reasoning and Fuzzy Optimization
Turku Centre for Computer Science

[12] SDA 3: An introduction to fuzzy sets
and systems

[13] Καράμπελα Αικατερίνη
Ασαφής Λογική (Fuzzy Logic) και εφαρμογές στην ασφάλιση
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Links

[14] Fuzzy Logic
http://videolectures.net/acai05_berthold_fl/

[15] Fuzzy Logic Operator
http://www.cimms.ou.edu/~lakshman/Papers/annie2/node6.html