ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΜΣ "ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ -
ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΧΝΗΤΗΣ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗΣ"

Σημειώσεις του μαθήματος

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Κ. Μανές - Ι. Τασούλας

Σημειώσεις διαλέξεων 2

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2023

Οι παρούσες σημειώσεις βασίζονται σε προηγούμενες σημειώσεις του μαθήματος που έχουν συγγράψει ο Καθηγητής κ. Αριστείδης Σαπουνάκης και ο Καθηγητής κ. Παναγιώτης-Γεώργιος Τσικούρας.

2. ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

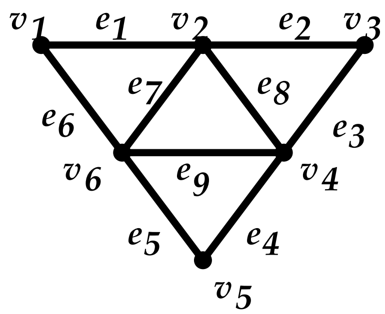
Διαδρομή (walk) που ενώνει τους κόμβους v_i, v_j ενός γράφηματος G (ή $v_i - v_j$ **διαδρομή**) είναι μια ακολουθία της μορφής $(v_i, e_{ik}, v_k, e_{kl}, v_l, \ldots, v_r, e_{rj}, v_j)$, όπου e_{st} είναι ο δεσμός του γραφήματος που ενώνει τους κόμβους v_s και v_t. (Συνήθως περιγράφουμε μια διαδρομή μόνο με τους διαδοχικούς κόμβους της: $(v_i, v_k, v_l, \ldots, v_r, v_j)$).

Μήκος (length) μιας διαδρομής ονομάζεται το πλήθος των δεσμών της.

Αν σε μια $v_i - v_j$ διαδρομή του G κάθε δεσμός εμφανίζεται μια μόνο φορά, η διαδρομή λέγεται $v_i - v_j$ **δρόμος** (trail) του G. Αν επιπλέον, σε ένα $v_i - v_j$ δρόμο του G κάθε κόμβος εμφανίζεται μια μόνο φορά, ο δρόμος λέγεται $v_i - v_j$ **μονοπάτι** (path) του G.

Μια $v_i - v_j$ διαδρομή ή ένας $v_i - v_j$ δρόμος του G, με $v_i = v_j$ λέγεται **κλειστή διαδρομή** του G ή **κλειστός δρόμος** του G. Τέλος, ένας κλειστός δρόμος του G μήκους n, με n κορυφές λέγεται **κύκλος** (cycle) του G.

Παράδειγμα: Για το γράφημα G έχουμε:



$v_1 - v_5$ διαδρομή του G: $(v_1, e_1, v_2, e_7, v_6, e_9, v_4, e_8, v_2, e_7, v_6, e_5, v_5)$, ή συντομότερα $(v_1, v_2, v_6, v_4, v_2, v_6, v_5)$.

$v_1 - v_5$ δρόμος του G: $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_6, v_5)$.

$v_1 - v_5$ μονοπάτι του G: $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_5)$.

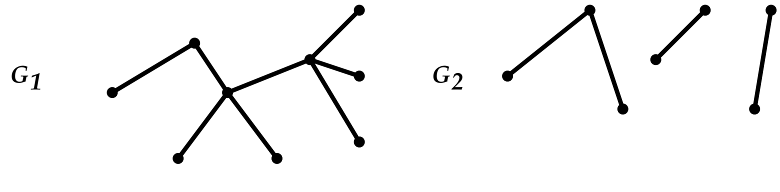
Κλειστή διαδρομή του G: $(v_1, v_2, v_6, v_4, v_3, v_2, v_6, v_1)$.

Κλειστός δρόμος του G: $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_6, v_1)$.

Κύκλος του G: $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_1)$.

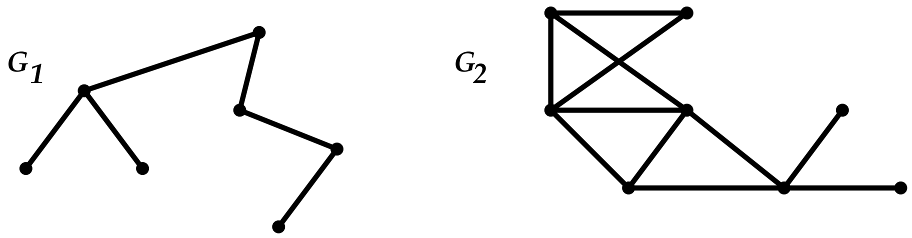
Άκυκλο λέγεται ένα γράφημα που δεν έχει κύκλους.

Παραδείγματα:

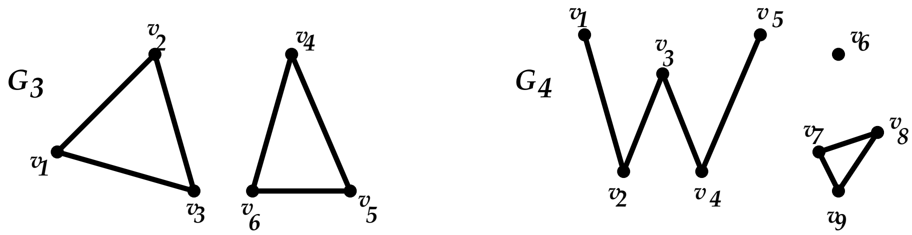


Ένα γράφημα λέγεται **συνεκτικό** αν για οποιουσδήποτε δύο κόμβους του, υπάρχει μονοπάτι που τους ενώνει.

Παραδείγματα:



Συνεκτικά γραφήματα



Μη συνεκτικά γραφήματα

Συνιστώσα (connected component) ενός γραφήματος G ονομάζεται κάθε μεγιστικό (maximal) συνεκτικό υπογράφημά του (δηλαδή κάθε συνεκτικό υπογράφημά του που δεν είναι υπογράφημα κάποιου άλλου συνεκτικού υπογραφήματος του G).

Προφανώς τα συνεκτικά γραφήματα αποτελούνται από μια μόνο συνιστώσα: τον εαυτό τους.

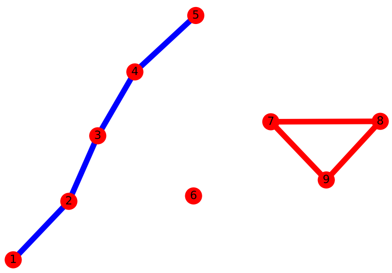
Παραδείγματα: Στο προηγούμενο σχήμα οι συνιστώσες του G_3 είναι τα δύο τρίγωνα $G_{3,1}$, $G_{3,2}$ με $V(G_{3,1}) = \{v_1, v_2, v_3\}$ και $V(G_{3,2}) = \{v_4, v_5, v_6\}$ αντίστοιχα, ενώ το G_4 έχει προφανώς τρεις συνιστώσες.

Μπορούμε να βρούμε τις συνεκτικές συνιστώσες ενός γραφήματος με την βοήθεια της μεθόδου `connected_components(G)`. Στο επόμενο πρόγραμμα σχεδιάζουμε με χρώματα τους δεσμούς τους ανάλογα με το μέγεθος κάθε συνιστώσας.

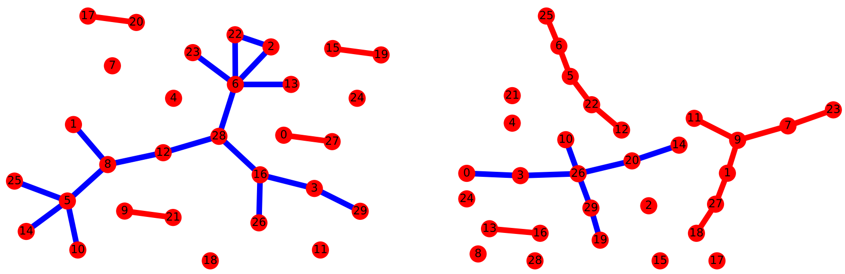
```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G = nx.Graph()
V = [v for v in range(1,10)]
E = [[1,2],[2,3],[3,4],[4,5],[7,8],[7,9],[8,9]]
G.add_nodes_from(V)
G.add_edges_from(E)

#draw the graph using graphviz layout positioning algorithm
#keep the positions of nodes in order to redraw
pos = nx.drawing.nx_agraph.graphviz_layout(G)
nx.draw(G,pos,with_labels=True)

#find the connected components of G
#sort the list from the largest to smaller
```

```python
Gcc = sorted(nx.connected_components(G), key=len, reverse=True)

#G0 the largest connected components
G0 = G.subgraph(Gcc[0])
#Draw the edges of the largest component
nx.draw_networkx_edges(G0,pos,edge_color='b',width=6.0)

#for every connected components of size > 1 draw its edges
for cc in Gcc[1:]:
    if len(cc) > 1:
        G1 = G.subgraph(cc)
        nx.draw_networkx_edges(G1,pos,edge_color='r', width=6.0)

plt.savefig("lect02a.eps")
plt.show()
```

Output:

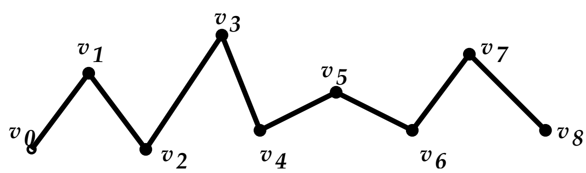


Δύο επιπλέον παραδείγματα όπου το γράφημα G έχει κατασκευασθεί με την μέθοδο `nx.gnp_random_graph(30,0.054)`



Ένα συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ με $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ λέγεται $v_0 - v_n$ **μονοπάτι** (ή απλά **μονοπάτι**) μήκους n, αν $d(v_0) = d(v_n) = 1$ και $d(v_i) = 2$, για κάθε $i \neq 0, n$.

Παράδειγμα:

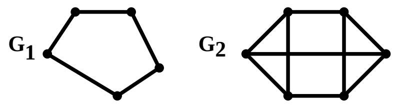


Μονοπάτι μήκους 8

Ένα συνεκτικό 2-κανονικό γράφημα λέγεται **κύκλος**, ενώ ένα 3-κανονικό γράφημα λέγεται **κυβικό γράφημα**.

Ο κύκλος με n κορυφές συμβολίζεται με C_n.

Παραδείγματα:



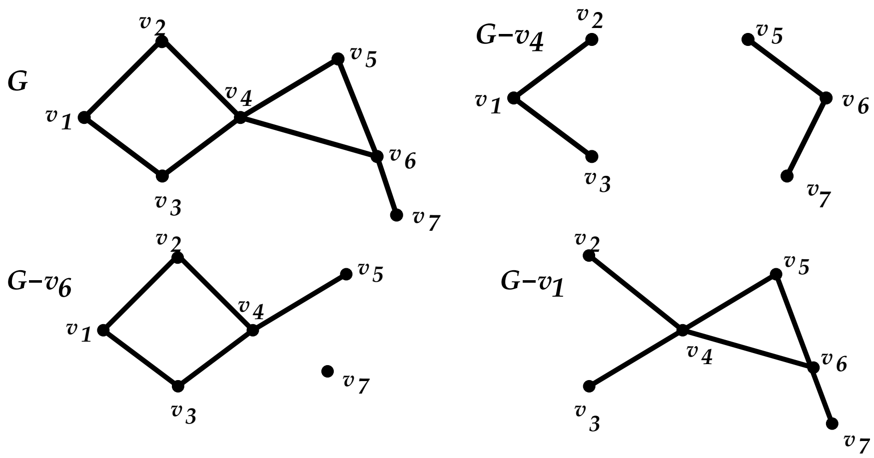
Τα γραφήματα G_1, G_2 είναι ο κύκλος C_5 και ένα κυβικό γράφημα αντίστοιχα.

Παρατήρηση: Παρατηρήστε τη διαφορά ανάμεσα στους ορισμούς «μονοπάτι γραφήματος» και «κύκλος γραφήματος» που δόθηκαν νωρίτερα και στους ορισμούς των γραφημάτων «μονοπάτι» και «κύκλος» που δίνονται εδώ.

2.1. Κλειδώσεις και γέφυρες.

Κλείδωση (articulation point), ή **σημείο κοπής** (cut point) ενός συνεκτικού γραφήματος G λέγεται κάθε $v \in V$ τέτοιο ώστε $G - v$: μη συνεκτικό.

Παραδείγματα: Οι κόμβοι v_4, v_6 του παρακάτω γραφήματος G είναι κλειδώσεις, ενώ ο v_1 δεν είναι.

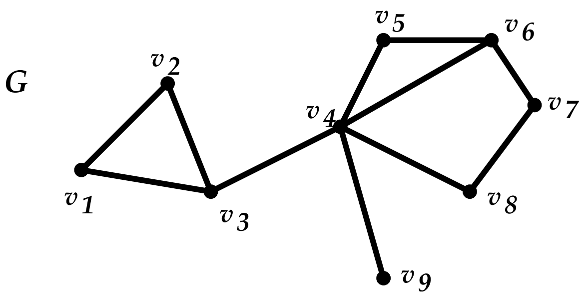


Προφανώς, κλειδώσεις ενός μη συνεκτικού γραφήματος G ονομάζονται οι κλειδώσεις των συνιστωσών του G.

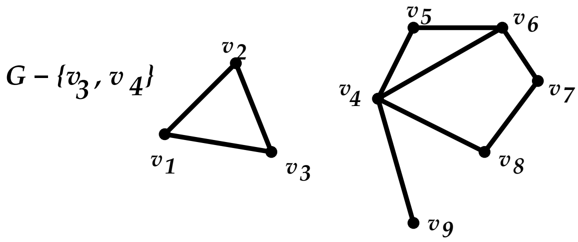
Γέφυρα (bridge) ή **ισθμός** ενός συνεκτικού γραφήματος G λέγεται κάθε $e \in E$ τέτοιος ώστε $G - e$: μη συνεκτικό.

Παράδειγμα:

Για το γράφημα



ο $\{v_3, v_4\}$ είναι γέφυρα, αφού το γράφημα



είναι μη συνεκτικό.

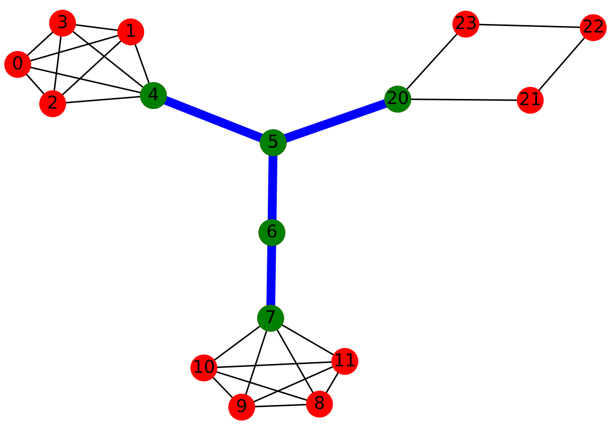
Προφανώς, γέφυρες ενός μη συνεκτικού γραφήματος G ονομάζονται οι γέφυρες των συνιστωσών του G.

Μπορούμε να εντοπίσουμε τις γέφυρες και τις κλειδώσεις ενός γραφήματος χρησιμοποιώντας τις μεθόδους `bridges(G)` και `articulation_points(G)`.

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G = nx.barbell_graph(5,2)
G.add_edges_from([[5,20],[20,21],[21,22],[22,23],[23,20]])

pos = nx.drawing.nx_agraph.graphviz_layout(G)
nx.draw(G,pos,with_labels=True)
#nx.draw_networkx(G)
B = list(nx.bridges(G))
print("Bridges of G:",B)
for e in B:
    G1 = G.subgraph(e)
    nx.draw_networkx_edges(G1,pos,edge_color='blue',width=6.0)
C = list(nx.articulation_points(G))
print("Cut points of G:",C)
for v in C:
    G1 = G.subgraph(v)
    nx.draw_networkx_nodes(G1,pos,node_color='green',width=6.0)
plt.savefig("barbell52.eps")
plt.show()
```

Output:

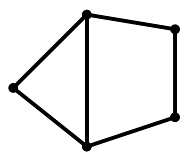
```
Bridges of G: [(4, 5), (5, 6), (5, 20), (6, 7)]
Cut points of G: [7, 6, 5, 20, 4]
```



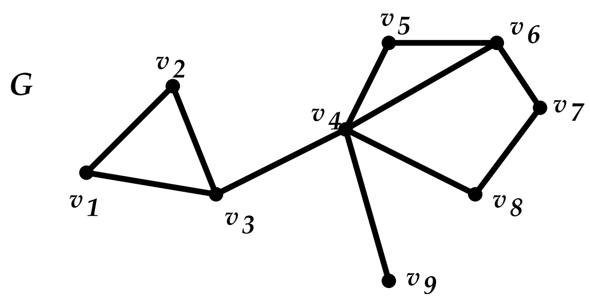
Πρόταση 2. *Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα και $v \in V$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*
i) Ο κόμβος v είναι κλείδωση του G.
ii) Υπάρχει μια διαμέριση του $V \setminus \{v\}$ σε υποσύνολα U, W τέτοια ώστε, για κάθε $u \in U$ και για κάθε $w \in W$ ο κόμβος v ανήκει σε κάθε $u - w$ μονοπάτι.
iii) Υπάρχουν κόμβοι u, w διάφοροι του v τέτοιοι ώστε ο v ανήκει σε κάθε $u - w$ μονοπάτι.

Πρόταση 3. *Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα και $e \in E$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*
i) Ο δεσμός e είναι ισθμός.
ii) Ο δεσμός e δεν ανήκει σε κανένα κύκλο του G.
iii) Υπάρχει διαμέριση του V σε U, W τέτοια ώστε για κάθε $u \in U$, $w \in W$ ο δεσμός e ανήκει σε κάθε $u - w$ μονοπάτι.
iv) Υπάρχουν $u, w \in V$ τέτοιοι ώστε ο δεσμός e ανήκει σε κάθε $u - w$ μονοπάτι.

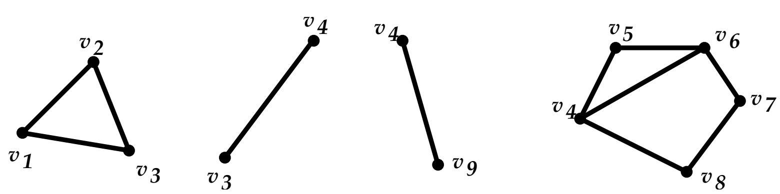
Ένα μη τετριμμένο, συνεκτικό γράφημα χωρίς κλειδώσεις λέγεται **μη διαχωρίσιμο** (ή **συμπαγές**, ή **δισυνεκτικό**).
Παράδειγμα: Το παρακάτω γράφημα είναι μη διαχωρίσιμο:



Αν το H είναι ένα μεγιστικό μη διαχωρίσιμο υπογράφημα του G (δηλαδή το H δεν είναι υπογράφημα κάποιου άλλου μη διαχωρίσιμου υπογραφήματος του G) τότε λέγεται **μπλοκ** (ή **δισυνεκτική συνιστώσα**) του G.
Παράδειγμα: Τα μπλοκ του γραφήματος



είναι τα

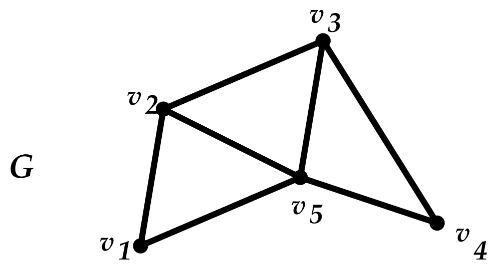


2.2. Διαμερίσεις γραφημάτων. Ένα σημαντικό πρόβλημα στις εφαρμογές των γραφημάτων είναι η ανίχνευση κοινοτήτων μέσα σε ένα γράφημα. Η έννοια της "κοινότητας" εξαρτάται κάθε φορά από το πλαίσιο στο οποίο ορίζεται το πρόβλημα. Συνήθως το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση μιας διαμέρισης των κορυφών ενός γραφήματος έτσι ώστε οι κορυφές που περιέχονται σε διαφορετικά σύνολα της διαμέρισης να έχουν όσο το δυνατόν λιγότερες συνδέσεις (δεσμούς), σε αντίθεση με τις κορυφές που ανήκουν στην ίδια κλάση.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση όπου ένα γράφημα αποτελείται από 3 συνεκτικές συνιστώσες μια τέτοια ιδανική διαμέριση με 3 κλάσεις είναι η διαμέριση των κορυφών σύμφωνα με την συνεκτική συνιστώσα που ανήκουν.

Στην περίπτωση όπου το γράφημα είναι συνεκτικό ή όπου θέλουμε να βρούμε περισσότερες κλάσεις από ότι οι συνεκτικές συνιστώσες προσπαθούμε να βρούμε μια διαμέριση που ελαχιστοποιεί τον συνολικό αριθμό των δεσμών που έχουν άκρα σε διαφορετικά σύνολα της διαμέρισης, δηλαδή "τέμνουν" τα δύο σύνολα. Συγκεκριμένα, έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών και S, T δύο ξένα υποσύνολα κορυφών του V. η **τομή** (cut) των S, T ορίζεται ως ο αριθμός των δεσμών των οποίων το ένα άκρο ανήκει στο S και το άλλο άκρο στο T και συμβολίζεται με $\text{cut}(S, T)$.

Για παράδειγμα, έστω $S = \{v_1, v_2\}$ και $T = \{v_3, v_5, v_4\}$ μια διαμέριση των κορυφών του παρακάτω γραφήματος σε δύο σύνολα.



Τότε η τομή των S, T έχει μέγεθος $\text{cut}(S, T) = 3$.

Ένας κλασικός αλγόριθμος που επιλύει το πρόβλημα της διαμέρισης σε δύο κλάσεις με περίπου ίσο αριθμό στοιχείων είναι **ο αλγόριθμος των Kerningham - Lin** ο οποίος περιγράφεται συνοπτικά με τα επόμενα βήματα:

(1) Αρχικά επιλέγεται μια τυχαία διαμέριση του γραφήματος σε δύο σύνολα S, T με ίσο αριθμό κορυφών.
(2) Επαναληπτικά ανταλλάσουμε ζευγη κορυφών των δύο συνόλων, έτσι ώστε να πετύχουμε την μεγαλύτερη δυνατή μείωση στον αριθμό των δεσμών που έχουν άκρα στα δύο σύνολα της διαμέρισης, δηλαδή της τομής $\text{cut}(S, T)$, έως ότου δεν μειώνεται ο αριθμός αυτών των δεσμών.

Πιο αναλυτικά, ο αλγόριθμος των Kernigham - Lin είναι ο ακόλουθος:
Είσοδος: Ένα γράφημα δεσμών $G = (V, E)$
Έξοδος: Μια διαμέριση των κορυφών S, T με "μικρή" τομή $\text{cut}(S, T)$.

(1) Αρχικά επιλέγεται μια διαμέριση των κορυφών του V σε δύο σύνολα S, T με ίσο αριθμό κορυφών, τοποθετώντας τυχαία τις μισές κορυφές του G στο S και τις υπόλοιπες στο T.

(2) Για κάθε ζεύγος κορυφών v, u με $v \in S$ και $u \in T$ υπολογίζουμε την διαφορά στο μέγεθος της τομής $\text{cut}(S,T)$ που θα προκύψει αν ανταλλάξουμε τις v, u.
(3) Το ζεύγος v^*, u^* το οποίο δίνει την μεγαλύτερη μείωση επιλέγεται και ανταλλάσονται οι δύο κορυφές. Το ζεύγος αυτό *κλειδώνεται* και οι κορυφές του δεν χρησιμοποιούνται ξανά σε αυτή την επανάληψη.
(4) Επαναλαμβάνονται τα βήματα 2 και 3 μέχρις ότου οι κορυφές που δεν είναι κλειδωμένες δεν μπορούν να μειώσουν την τομή $\text{cut}(S,T)$ με αμοιβαίες αλλαγές. Η διαμέριση S', T' που προκύπτει χρησιμοποιείται ως αρχική διαμέριση για την επόμενη επανάληψη.
(5) Ο αλγόριθμος τελειώνει όταν η τομή της διαμέρισης δεν μπορεί να μειωθεί.

Παρατήρησεις:

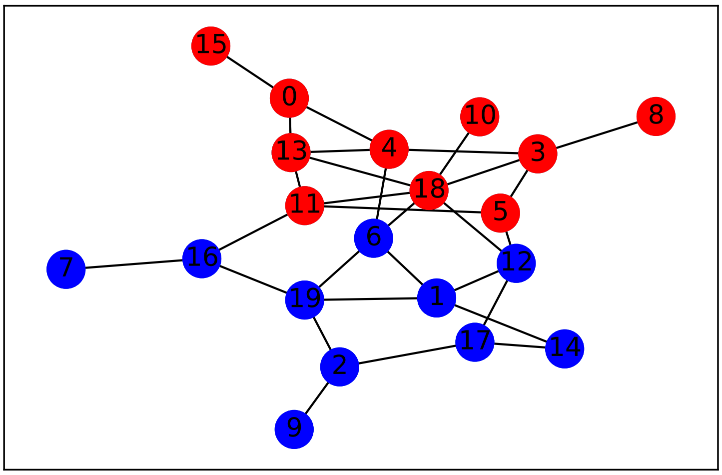
- Οι διαμερίσεις που υπολογίζει ο αλγόριθμος των Kerningham - Lin εξαρτώνται από την επιλογή της αρχικής διαμέρισης. Οσο χειρότερη είναι η αρχική διαμέριση τόσο χειρότερη είναι η τελική λύση και τόσο μεγαλύτερος ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτούνται για την σύγκλιση.
- Ο αλγόριθμος των Kerningham - Lin είναι άπληστος αλγόριθμος οπότε μπορεί να μην δώσει πάντα την βέλτιστη λύση αλλά να παγιδευτεί σε ένα τοπικό ελάχιστο.

Η βιβλιοθήκη `networkx` διαθέτει μια υλοποίηση του αλγοριθμου των Kerningham - Lin στην μέθοδο `nx.community.kerningham_lin_bisection()`:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

#create a random graph with n nodes and m edges
n,m = 20,30
G = nx.gnm_random_graph(n,m, seed=1001)
pos = nx.nx_agraph.graphviz_layout(G)
nx.draw_networkx(G,pos)

#get the bisection partition S, T of V using Kerningham - Lin algorithm
S, T = nx.community.kernighan_lin_bisection(G)
#get the size of the cut(S, T)
cutsize = nx.cut_size(G, S, T)
nx.draw_networkx_nodes(S,pos,node_color='red')
nx.draw_networkx_nodes(T,pos,node_color='blue')
print("The computed bisection of G is: \nS =", S,
      "\nT =", T,
      "\nwith cutsize cut(S,T) =", cutsize)

plt.savefig("images/bisection01.eps")
plt.show()
```

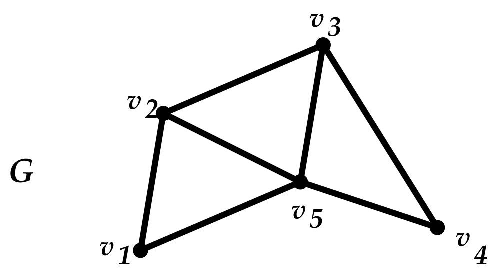
Output:

```
The computed bisection of G is:
S = {0, 3, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 15, 18}
T = {1, 2, 6, 7, 9, 12, 14, 16, 17, 19}
with cutsize cut(S,T) = 5
```



Στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει η εύρεση μιας διαμέρισης σε κλάσεις που δεν έχουν υποχρεωτικά το ίδιο μέγεθος τότε ένα καταλληλότερο κριτήριο βελτιστοποίησης είναι η λεγόμενη κανονικοποιημένη τομή: Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών και S ένα υποσύνολο κορυφών του V. Ο **όγκος** (volume) του S ορίζεται ως ο αριθμός των δεσμών του G που έχουν τουλάχιστον ένα άκρο στο S και συμβολίζεται με $\mathrm{vol}(S)$.

Για τα σύνολα $S = \{v_1, v_2\}$ και $T = \{v_3, v_5, v_4\}$ του προηγούμενου παραδείγματος έχουμε $\mathrm{vol}(S) = 4$, $\mathrm{vol}(T) = 6$.



Οι "καλές" διαμερίσεις έχουν μεγάλο όγκο για κάθε κλάση της διαμέρισης και μικρές τομές μεταξύ όλων των ζευγών κλάσεων. Η **κανονικοποιημένη τομή** (normalized cut) των S, T ως εξής:

$$\mathrm{ncut}(S, T) = \frac{\mathrm{cut}(S, T)}{\mathrm{vol}(S)} + \frac{\mathrm{cut}(S, T)}{\mathrm{vol}(T)}$$

Στο πρόβλημα της διαμέρισης ο στόχος είναι εύρεση συνόλων S, T που ελαχιστοποιούν την παράσταση $\mathrm{ncut}(S, T)$.

Για την διαμέριση του παραπάνω παραδείγματος, έχουμε ότι $\mathrm{ncut}(S, T) = \frac{3}{4} + \frac{3}{6} = 1.25$.

Ενώ, για την διαμέριση $S' = \{v_2, v_3\}$ και $T' = \{v_1, v_5, v_4\}$ έχουμε $\mathrm{vol}(S') = 5$, $\mathrm{vol}(T') = 6$, $\mathrm{cut}(S', T') = 4$, οπότε $\mathrm{ncut}(S', T') = \frac{4}{5} + \frac{4}{6} = 1.46667$. Επομένως, η προηγούμενη διαμέριση είναι καλύτερη από αυτήν.

Η μετρική ncut δεν ευνοεί την επιλογή συνόλων με λίγες κορυφές. Για παράδειγμα, η διαμέριση $S'' = \{v_2\}$ και $T'' = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ δίνει $\mathrm{vol}(S'') = 3$, $\mathrm{vol}(T'') = 7$, $\mathrm{cut}(S'', T'') = 3$, οπότε $\mathrm{ncut}(S'', T'') = \frac{3}{3} + \frac{3}{7} = 1.42857$.

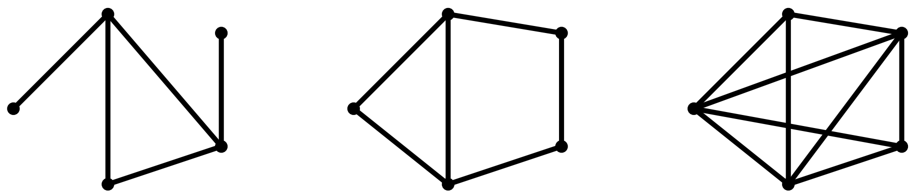
Η βιβλιοθήκη `networkx` διαθέτει τη μέθοδο `normalized_cut_size(G, S, T)` για τον υπολογισμό της κανονικοποιημένης τομής.

Η εύρεση της βέλτιστης διαμέρισης με k κλάσεις γίνεται αναδρομικά. Αρχικά, βρίσκεται η βέλτιστη διαμέριση με δύο κλάσεις. Στην συνέχεια, διαμερίζονται (εκλεπτύνονται) αναδρομικά οι δύο κλάσεις σε μικρότερες με κριτήριο την ελαχιστοποίηση της κανονικοποιημένης τομής, μέχρι να κατασκευασθούν οι ζητούμενες k κλάσεις.

Οι γέφυρες ενός γραφήματος (εφόσον υπάρχουν) μπορούν να αποτελέσουν ένα ευρετικό κριτήριο για να την δημιουργία της αρχικής διαμέρισης.

Υπάρχουν αλγόριθμοι που υπολογίζουν βέλτιστες διαμερίσεις με την βοήθεια τεχνικών γραμμικής άλγεβρας και πιο συγκεκριμένα υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα μιας συγκεκριμένης μήτρας που κωδικοποιεί το γράφημα και ονομάζεται Λαπλασιανή (Laplacian matrix).

2.3. Μέτρα συνεκτικότητας. Ορισμένα συνεκτικά γραφήματα είναι "πιο συνδεδεμένα" από ότι άλλα.



Για παράδειγμα, κάποια συνεκτικά γραφήματα έχουν κορυφές ή δεσμούς που αν τους αφαιρέσουμε, τότε το γράφημα παύει να είναι συνεκτικό, ενώ άλλα γραφήματα παραμένουν συνεκτικά ακόμα και όταν αφαιρέσουμε μια ή περισσότερες κορυφές ή δεσμούς τους.

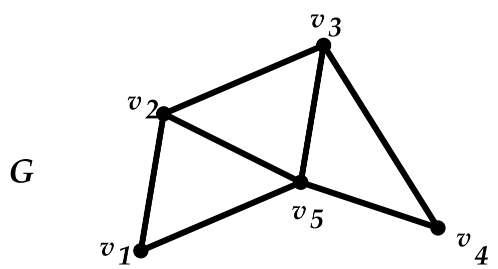
Ο υπολογισμός του αριθμού των κορυφών ή δεσμών που πρέπει να αφαιρεθούν για να προκύψει μη συνεκτικό γράφημα είναι ένα μέτρο της ανθεκτικότητας σε αποτυχίες ενός δικτύου επικοινωνίας.

Διαισθητικά, η ανθεκτικότητα ενός γραφήματος εξαρτάται από τον αριθμό των εναλλακτικών μονοπατιών μεταξύ των ζευγών κορυφών του. Όσο μεγαλύτερος είναι αυτός ο αριθμός τόσο πιο ανθεκτικό είναι το γράφημα σε αποτυχίες κορυφών ή δεσμών.

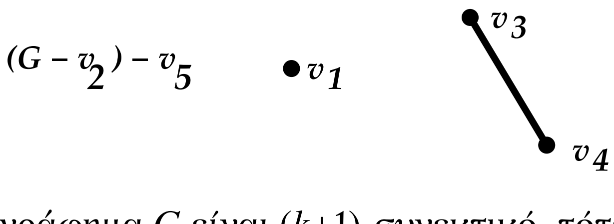
Σύνολο κλειδώσεων ενός συνεκτικού γραφήματος G λέγεται κάθε $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ τέτοιο ώστε το $(((G - v_1) - v_2) - \cdots) - v_n$ να είναι μη συνεκτικό.

Ένα γράφημα ονομάζεται k-**συνεκτικό** (k-connected) αν κάθε σύνολο κλειδώσεων του περιέχει τουλάχιστον k κορυφές. Με άλλα λόγια, αν το G είναι k-συνεκτικό τότε το γράφημα που προκύπτει από την διαγραφή οποιουδήποτε συνόλου $k - 1$ κορυφών του G είναι επίσης συνεκτικό.

Παράδειγμα: Το γράφημα



είναι 2-συνεκτικό, αφού το σύνολο $\{v_2, v_5\}$ είναι ένα ελάχιστο σύνολο κλειδώσεων:



Παρατήρηση. Αν ένα γράφημα G είναι $(k{+}1)$-συνεκτικό, τότε είναι και k-συνεκτικό. Πράγματι, αφού το G είναι $(k + 1)$-συνεκτικό η διαγραφή οποιονδήποτε k κορυφών του, δεν το κάνει μη συνεκτικό, άρα ούτε και η διαγραφή $k{-}1$ κορυφών οδηγεί σε μη συνεκτικό γράφημα, οπότε το G είναι και k-συνεκτικό. Δεν ισχύει το αντίστροφο, αν ένα γράφημα είναι k-συνεκτικό τότε δεν είναι $(k + 1)$-συνεκτικό.

Στην επόμενη πρόταση δίδεται μια απλή αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε ένα γράφημα να είναι 2-συνεκτικό.

Πρόταση 4. *Ένα γράφημα είναι 2-συνεκτικό αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος κορυφών του υπάρχει τουλάχιστον ένα κύκλος που τις περιέχει.*

Παράδειγμα : Στο προηγούμενο 2-συνεκτικό γράφημα οι κορυφές v_2 και v_4 ανήκουν στον κύκλο $(v_2v_5v_4v_3v_2)$, οι κορυφές v_2 και v_1 ανήκουν στον κύκλο (v_1, v_2, v_5, v_1), οι κορυφές v_2 και v_3 ανήκουν στον κύκλο $(v_2, v_1, v_5, v_4, v_3, v_3)$, κ.ο.κ.

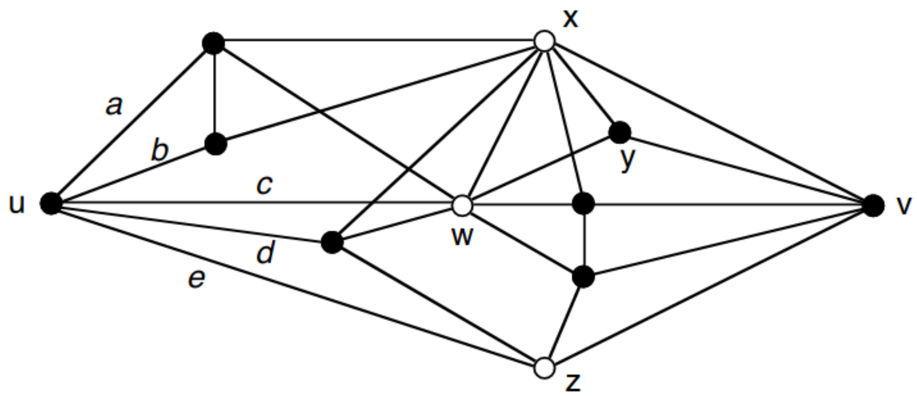
Παρατήρηση. Αν ένα γράφημα είναι 2-συνεκτικό τότε για κάθε ζεύγος κορυφών του υπάρχουν 2 τουλάχιστον διαφορετικά μονοπάτια που τους συνδέουν τα οποία, εκτός από τα άκρα τους, περιέχουν διαφορετικές κορυφές το καθένα.

Γενικότερα έχει αποδειχθεί ότι ένα γράφημα G είναι k-συνεκτικό αν και μόνο αν κάθε ζεύγος κορυφών του u, v υπάρχουν k τουλάχιστον διαφορετικά μονοπάτια που τους συνδέουν τα οποία, εκτός από τα άκρα τους, περιέχουν διαφορετικές κορυφές το καθένα. (Η απόδειξη δίδεται αργότερα.)

Ανεξάρτητα μονοπάτια. Δύο ή περισσότερα μονοπάτια ενός γραφήματος ονομάζονται **ανεξάρτητα** αν κανένα από αυτά δεν περιέχει ως εσωτερική κορυφή κάποια κορυφή του άλλου. Ειδικότερα, δύο $u - v$ μονοπάτια είναι ανεξάρτητα αν και μόνο αν τα άκρα τους u, v είναι οι μοναδικές κοινές κορυφές τους.

Έστω u, v δύο μη γειτονικές κορυφές και $X \subseteq V \setminus \{u, v\}$ τέτοιο ώστε κάθε $u - v$ μονοπάτι να περιέχει μια κορυφή του X, τότε επειδή οι κορυφές u, v περιέχονται σε διαφορετικές συνιστώσες του γραφήματος $G - X$ λέμε ότι το X **διαχωρίζει** (separates) τις κορυφές u, v και ονομάζεται (u, v)-**διαχωριστής**. Επιπλέον, ένα σύνολο κορυφών X ονομάζεται **διαχωριστής** του G αν διαχωρίζει κάποιο ζεύγος κορυφών του G.

Παράδειγμα: Οι κορυφές $\{x, z, w\}$ αποτελούν έναν (u, v)-διαχωριστή του επόμενου γραφήματος, διότι κάθε u-v μονοπάτι περιέχει τουλάχιστον μια από αυτές τις κορυφές.



Με βάση τα προηγούμενα έχουμε δύο διαφορετικές οπτικές της συνεκτικότητας ενός γραφήματος.

Η μια είναι ο αριθμός των κορυφών ή δεσμών που απαιτούνται να αφαιρεθούν ώστε να προκύψει μη συνεκτικό γράφημα (ή γενικότερα να αυξηθεί ο αριθμός των συνιστωσών του γραφήματος) και από την άλλη είναι ο αριθμός των διαφορετικών ανεξάρτητων μονοπατιών που ενώνουν οποιοδήποτε ζεύγος κορυφών.

Σε αυτές τις δύο οπτικές αντιστοιχούν τα επόμενα προβλήματα βελτιστοποίησης για δύο μη γειτονικές κορυφές u, v ενός συνεκτικού γραφήματος G.

- **Πρόβλημα μεγιστοποίησης**: Να προσδιορισθεί ο μέγιστος αριθμός ανεξάρτητων $u-v$ μονοπατιών.
- **Πρόβλημα ελαχιστοποίησης**: Να προσδιορισθεί ο ελάχιστος αριθμός των κορυφών που απαιτούνται για να διαχωρίσουν τις κορυφές u, v.

Παρατηρήστε ότι

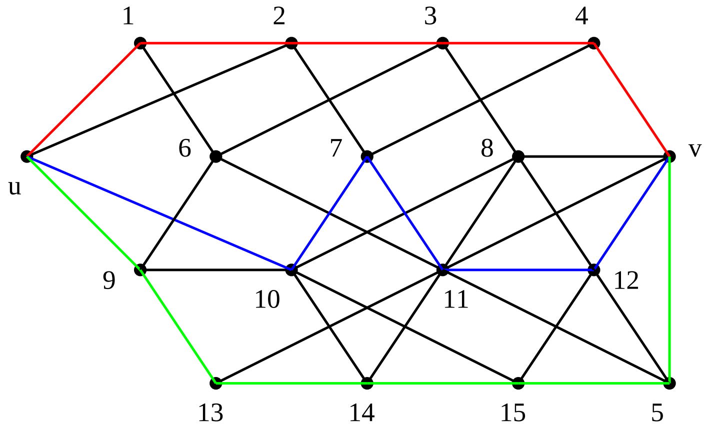
ο μέγιστος αριθμός ανεξάρτητων $u-v$ μονοπατιών είναι μικρότερος ή ίσος από τον ελάχιστο αριθμό κορυφών που απαιτούνται για να διαχωρίσουν τις κορυφές u, v.

Πράγματι, αν το γράφημα περιέχει k ανεξάρτητα $u-v$ μονοπάτια απαιτούνται τουλάχιστον k κορυφές για τον διαχωριστή (πρέπει να επιλέξουμε τουλάχιστον μια κορυφή από κάθε μονοπάτι). Αντίστοιχα, αν το γράφημα περιέχει ένα διαχωριστή μεγέθους k τότε αφού κάθε μονοπάτι διέρχεται από το πολύ μια από τις κορυφές του διαχωριστή μπορούν να υπάρχουν το πολύ k ανεξάρτητα μονοπάτια.

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας είναι το θεώρημα του Menger το οποίο δείχνει ότι οι δύο αριθμοί είναι ίσοι.

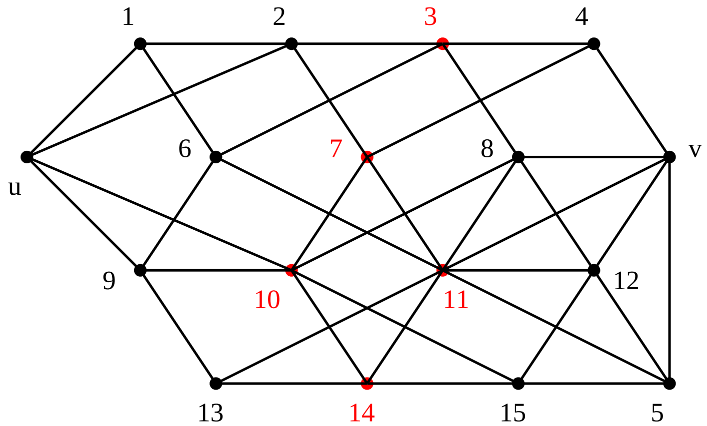
Παρατήρηση: Το θεώρημα του Menger και οι παραλλαγές του αποτελούν την επιτομή της σχέσης **πρωτεύοντος-δυϊκού** (primal-dual). Ο όρος πρωτεύον - δυικό προέρχεται από την επιχειρησιακή έρευνα όπου εμφανίζονται ζεύγη προβλημάτων βελτιστοποίησης τα οποία είναι άρρηκτα συνδεδεμένα μεταξύ τους. Συνήθως, το ένα από αυτά είναι ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης μιας αντικειμενικής (objective) συνάρτησης, ενώ το άλλο είναι ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας άλλης αντικειμενικής συνάρτησης. Μια εφικτή λύση για το ένα από τα δύο προβλήματα δίνει ένα φράγμα για την βέλτιστη λύση στο άλλο πρόβλημα (ασθενής δυϊκότητα) και η βέλτιστη τιμή του ενός προβλήματος ισούται με την βέλτιστη τιμή του άλλου (ισχυρή δυϊκότητα).

Παράδειγμα: Η ύπαρξη των επόμενων 3 ανεξάρτητων μονοπατιών ($(u, 1, 2, 3, 4, v)$, $(u, 10, 7, 11, 12, v)$, $(u, 9, 13, 14, 15, 5, v)$) στο παρακάτω γράφημα



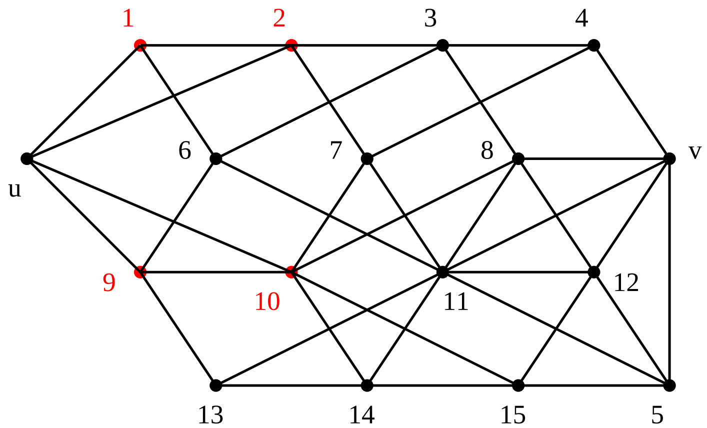
έχει ως συνέπεια ότι ο ελάχιστος αριθμός κορυφών που απαιτούνται για να διαχωρίσουν τις κορυφές u και v είναι τουλάχιστον 3 (αφού πρέπει να επιλέξουμε τουλάχιστον μια κορυφή από κάθε ανεξάρτητο μονοπάτι).

Ομοίως, η ύπαρξη ενός διαχωριστή με 5 κορυφές (τις 3, 7, 10, 11, 14)



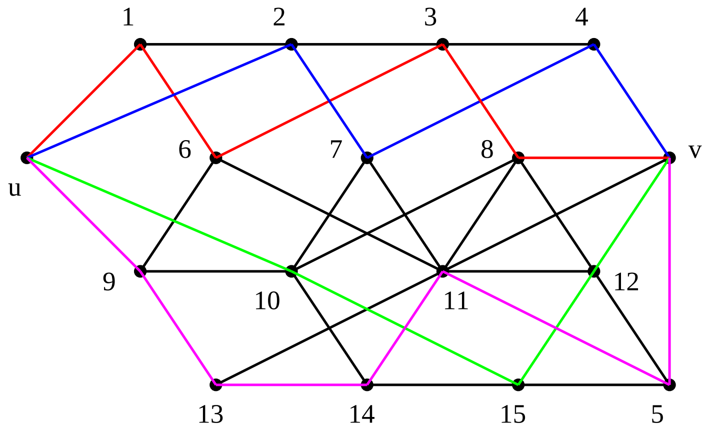
έχει ως συνέπεια ότι ο μέγιστος αριθμός ανεξάρτητων $u-v$ μονοπατιών είναι το πολύ 5 (αφού κάθε μονοπάτι πρέπει να διέρχεται από το πολύ μια από τις κορυφές του διαχωριστή).

Όμως, η εύρεση ενός διαχωριστή με 4 κορυφές (τις 1, 2, 9, 10)



έχει ως συνέπεια ότι ο μέγιστος αριθμός ανεξάρτητων $u-v$ μονοπατιών είναι το πολύ 4.

Τέλος, η εύρεση των επόμενων 4 ανεξάρτητων μονοπατιών ($(u, 1, 6, 3, 8, v)$, $(u, 2, 7, 4, v)$, $(u, 10, 15, 12, v)$, $(u, 9, 13, 14, 11, 5, v)$)

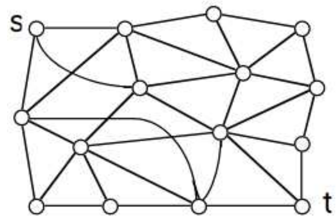


έχει ως συνέπεια ότι ο ελάχιστος αριθμός κορυφών που απαιτούνται για να διαχωρίσουν τις κορυφές u και v είναι τουλάχιστον 4.

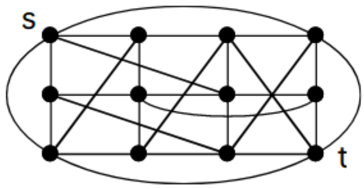
Άρα, επειδή ο μέγιστος αριθμός ανεξάρτητων $u - v$ μονοπατιών είναι μικρότερος ή ίσος από τον ελάχιστο αριθμό κορυφών κάθε (u, v)-διαχωριστή έπεται ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι και για τα δύο προβλήματα ίσος με 4.

Πρόταση 5 (**Θεώρημα Menger, 1927**). *Έστω u, v δύο κορυφές του G. Αν $\{u, v\} \notin E$ τότε ο ελάχιστος αριθμός κορυφών που διαχωρίζουν την u από την v ισούται με τον μέγιστο αριθμό ανεξάρτητων $u - v$ μονοπατιών.*

Άσκηση 1. *Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει διαχωριστής μεγέθους 2 για τις κορυφές s και t του επόμενου γραφήματος:*



Άσκηση 2. *Να υπολογισθεί ο ελάχιστος αριθμός κορυφών που διαχωρίζουν τις κορυφές s και t του επόμενου γραφήματος:*



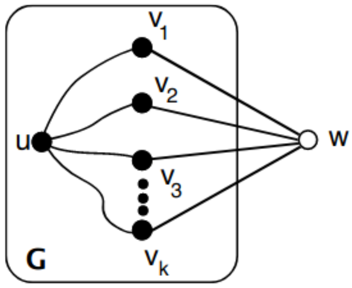
Πόρισμα 6 (Whitney, 1932). *Ένα γράφημα G είναι k-συνεκτικό αν και μόνο αν κάθε ζεύγος κορυφών του u, v ενώνεται με τουλάχιστον k ανεξάρτητα $u - v$ μονοπάτια.*

Απόδειξη. Αν ένα γράφημα G περιέχει k ανεξάρτητα μονοπάτια ανάμεσα σε οποιοδήποτε ζεύγος κορυφών του τότε δεν μπορεί να διαχωρισθεί με λιγότερες από k κορυφές, επομένως είναι k-συνεκτικό.

Αντίστροφα, έστω ότι το G είναι k-συνεκτικό (και έχει περισσότερες από k κορυφές) αλλά περιέχει κορυφές u, v που δεν ενώνονται με k ανεξάρτητα $u - v$ μονοπάτια. Τότε από το Θεώρημα του Menger (Πρόταση 5) οι u, v είναι γειτονικές. Έστω $G' = G - \{u, v\}$. Τότε το G' περιέχει το πολύ $k-2$ ανεξάρτητα $u-v$ μονοπάτια, άρα από το Θεώρημα του Menger (Πρόταση 5) μπορούμε να διαχωρίσουμε τις u, v στο G' με ένα σύνολο X που περιέχει το πολύ $k-2$ κορυφές. Επειδή το G περιέχει περισσότερες από k κορυφές υπάρχει κορυφή $w \notin X \cup \{u, v\}$ στο G. Αφού το X είναι διαχωριστής των u και v, θα X διαχωρίζει την w από τουλάχιστον μια από τις u, v, και ας υποθέσουμε ότι διαχωρίζει τις w και u. Τότε το σύνολο $X \cup \{v\}$ περιέχει το πολύ $k-1$ κορυφές και διαχωρίζει τις w και u στο G, το οποίο είναι άτοπο, αφού το G είναι k-συνεκτικό. □

Πόρισμα 7. *Έστω G ένα k-συνεκτικό γράφημα. Για κάθε υποσύνολο u, v_1, v_2, …, v_k που περιέχει $k+1$ κορυφές του G υπάρχουν μονοπάτια $u-v_1$, $u-v_2$, …, $u-v_k$ τα οποία είναι ανά δύο ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Από το G κατασκευάζουμε ένα νέο γράφημα $G \cup \{w\}$ προσθέτοντας μια νέα κορυφή w η οποία ενώνεται με δεσμούς με τις κορυφές v_1, v_2, …, v_k.

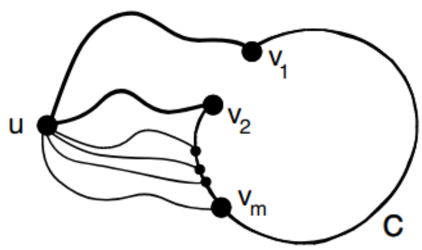


Αφού το G είναι k-συνεκτικό έπεται ότι και το $G \cup \{w\}$ είναι επίσης k-συνεκτικό. (Άσκηση).

Επομένως, υπάρχουν k ανεξάρτητα μονοπάτια $u-w$. Κάθε τέτοιο μονοπάτι υποχρεωτικά θα έχει ως άκρο ακριβώς ένα από τους δεσμούς $\{w, v_i\}$, $i \in [k]$. Άρα, τα μονοπάτια $u-v_i$ που προκύπτουν από αυτά σβήνοντας τον τελευταίο δεσμό τους είναι ανεξάρτητα. □

Πόρισμα 8 (Dirac, 1960). *Έστω G ένα k-συνεκτικό γράφημα με τουλάχιστον $k+1$ κορυφές, όπου $k \geq 3$, και έστω U ένα σύνολο k κορυφών του G. Τότε υπάρχει κύκλος του G που περιέχει όλες τις κορυφές του U.*

Απόδειξη. Έστω C ένας κύκλος του G που περιέχει τον μέγιστο δυνατό αριθμό κορυφών του U και έστω ότι $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, $m \leq k$ είναι οι κορυφές του U που περιέχονται στον C. Επειδή το G είναι τουλάχιστον 2-συνεκτικό έπεται ότι $m \geq 2$. Έστω ότι υπάρχει κορυφή $u \in U$ η οποία δεν περιέχεται στον κύκλο C. Τότε υπάρχουν ανεξάρτητα μονοπάτια $u-v_1$ και $u-v_2$.



Επομένως, μπορούμε να επεκτείνουμε τον κύκλο αφαιρώντας τον δεσμό $\{v_1, v_2\}$ και προσθέτοντας τα μονοπάτια $v_1 - u$ και $u - v_2$, κατασκευάζοντας ένα κύκλο με περισσότερες κορυφές του U, το οποίο είναι άτοπο. □

Υπάρχουν πολλές παραλλαγές του θεωρήματος Menger. Για παράδειγμα, αντί δύο κορυφές μπορεί να έχουμε δύο σύνολα κορυφών. Έστω $A, B \subseteq V$. Ένα μονοπάτι $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ με $v_1 \in A$ και $v_k \in B$ ονομάζεται $A - B$ **μονοπάτι**. Αν $A, B \subseteq V$ και $X \subseteq V$ τέτοιο ώστε κάθε $A - B$ μονοπάτι να περιέχει μια κορυφή του X τότε λέμε ότι το X **διαχωρίζει** (separates) τα σύνολα A και B και ονομάζεται (A, B)-**διαχωριστής**.

Πρόταση 9 (Γενίκευση του Θεωρήματος Menger). *Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών και $A, B \subseteq V$. Ο ελάχιστος αριθμός των κορυφών που διαχωρίζουν το A από το B ισούται με τον μέγιστο αριθμό των ανεξάρτητων $A - B$ μονοπατιών.*

Κατασκευή k-συνεκτικών γραφημάτων.

Ένα δίκτυο επικοινωνίας ονομάζεται **ανθεκτικό στα σφάλματα** (fault-tolerant) αν και μόνο αν υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικά μονοπάτια ανάμεσα σε κάθε ζεύγος κορυφών. Η έννοια αυτή ταυτίζεται με την έννοια των 2-συνεκτικών γραφημάτων.

Έστω H ένα υπογράφημα του G. Ένα (μη τετριμμένο) μονοπάτι P του G ονομάζεται **H-μονοπάτι** αν και μόνο αν οι μόνες κοινές κορυφές του P με το H είναι τα άκρα του μονοπατιού. Το υπογράφημα του G που αποτελείται από το H και το H-μονοπάτι λέμε ότι προκύπτει από το H με **προσθήκη μονοπατιού**.

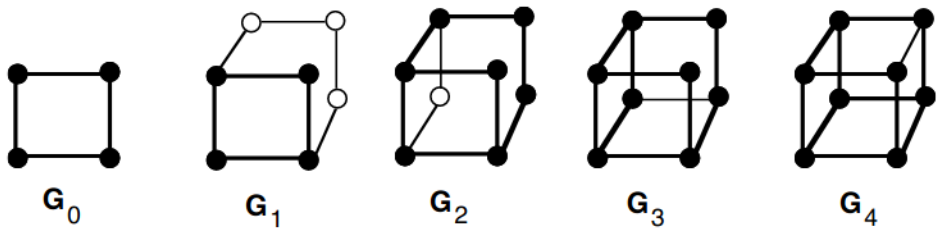
Λήμμα 10. *Έστω H ένα 2-συνεκτικό γράφημα. Τότε το γράφημα G που προκύπτει από την προσθήκη ενός H-μονοπατιού στο H είναι επίσης 2-συνεκτικό.*

Απόδειξη. Εύκολα προκύπτει ότι με την προσθήκη του H-μονοπατιού στο H, η ιδιότητα ότι κάθε ζεύγος κορυφών του G ανήκει σε κάποιον κύκλο διατηρείται, άρα το γράφημα G που προκύπτει ότι είναι επίσης 2-συνεκτικό. □

Πρόταση 11 (Whitney). *Ένα γράφημα G είναι 2-συνεκτικό αν και μόνο αν είναι το G είναι κύκλος ή το G προκύπτει από έναν κύκλο με διαδοχικές προσθήκες μονοπατιών.*

Με άλλα λόγια αν θέλουμε να κατασκευάζουμε 2-συνεκτικά γραφήματα ξεκινάμε από έναν κύκλο και κάνουμε διαδοχικά προσθήκες μονοπατιών.

Παράδειγμα, ο κύβος Q_3 (ο οποίος είναι 3-συνεκτικός, άρα και 2-συνεκτικός) μπορεί να κατασκευασθεί από τον κύκλο C_4 με την επόμενη ακολουθία από προσθήκες μονοπατιών.



Διαισθητικά οι κορυφές ενός k-συνεκτικού γραφήματος πρέπει να έχουν αρκετά μεγάλο βαθμό (τουλάχιστον k) και το γράφημα να περιέχει αρκετούς δεσμούς ώστε να υπάρχουν τουλάχιστον k ανεξάρτητα μονοπάτια μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους κορυφών του. Η επόμενη πρόταση δίνει ένα ελάχιστο φράγμα για τον αριθμό των δεσμών που πρέπει να έχει ένα γράφημα για να είναι k-συνεκτικό.

Πρόταση 12. *Έστω G ένα k-συνεκτικό γράφημα με n κορυφές. Τότε ο αριθμός των δεσμών του G είναι τουλάχιστον* $\left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil$.

Απόδειξη. Σε κάθε k-συνεκτικό γράφημα ισχύει ότι $\delta(G) \geq k$. Πράγματι, αν υπάρχει κορυφή v με $d(v) < k$, τότε μπορούμε να διαχωρίσουμε την κορυφή v από τις κορυφές του γραφήματος σβήνοντας λιγότερες από k κορυφές, τους γείτονες της, το οποίο είναι άτοπο.

Κατά συνέπεια ισχύει ότι

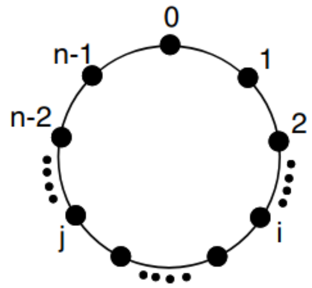
$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \geq \sum_{v \in V} \delta(G) = n\delta(G) \geq nk. \qquad \square$$

Για παράδειγμα, ένα 5-συνεκτικό γράφημα με 31 κορυφές πρέπει να έχει τουλάχιστον $\left\lceil \frac{5 \cdot 31}{2} \right\rceil = \lceil 77.5 \rceil = 78$ δεσμούς.

Άσκηση 3. *Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει* 3*-συνεκτικό γράφημα με* 75 *κορυφές και* 112 *δεσμούς.*

Ο Frank Harary έδωσε έναν αλγόριθμο για την κατασκευή ενός k-συνεκτικού γραφήματος $H_{k,n}$ με n κορυφές το οποίο έχει ακριβώς $\left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil$ δεσμούς.

Η κατασκευή ξεκινά με τον κύκλο C_n, του οποίου οι κορυφές αριθμούνται διαδοχικά (με την φορά του ρολογιού).

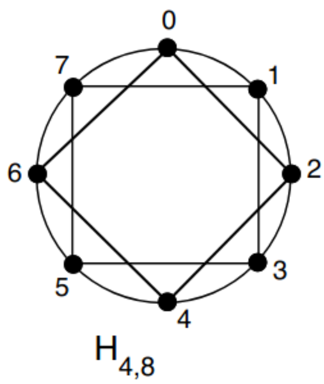


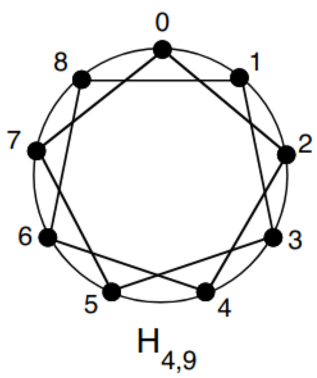
Η κατασκευή του $H_{n,k}$ εξαρτάται από την αρτιότητα των k και n. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- k άρτιος.
  Έστω $k = 2r$, τότε οι κορυφές i, j ενώνονται με δεσμό ανν τα σημεία απέχουν στον κύκλο απόσταση το πολύ r δηλαδή

$$|j - i| \leq r \text{ ή/και } n - |j - i| \leq r$$

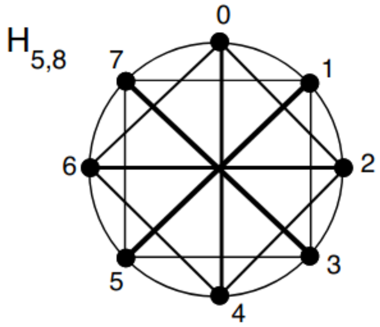
Για παράδειγμα,





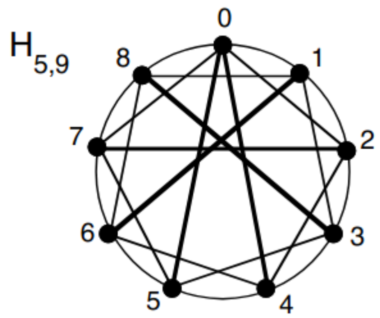
Το γράφημα $H_{2r,n}$ έχει ακριβώς rn δεσμούς. Πράγματι, κάθε κορυφή συνδέεται με $2r$ κορυφές, οπότε $2|E| = 2rn$. Άρα, το $H_{2r,n}$ έχει τον ζητούμενο αριθμό δεσμών αφού $rn = \frac{kn}{2} = \left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil$ (kn άρτιος).

- k περιττός και n άρτιος.
Έστω $k = 2r + 1$. Αρχικά κατασκευάζουμε το γράφημα $H_{2r,n}$ και προσθέτουμε τις $\frac{n}{2}$ "διαμέτρους" του αρχικού κύκλου C_n, δηλαδή τους δεσμούς που ενώνουν τις κορυφές i και $i + \frac{n}{2}$, για $i = 0, \ldots, \frac{n}{2} - 1$.
Για παράδειγμα,



Ο συνολικός αριθμός των δεσμών του $H_{2r+1,n}$ είναι ίσος με $rn + \frac{n}{2} = \frac{(2r+1)n}{2} = \frac{kn}{2} = \left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil$ (kn άρτιος).

- Τα k, n είναι περιττά.
Έστω $k = 2r+1$. Αρχικά κατασκευάζουμε το γράφημα $H_{2r,n}$ και προσθέτουμε τις $\frac{n+1}{2}$ "οιονεί-διαμέτρους" του αρχικού κύκλου C_n, δηλαδή τους δεσμούς που ενώνουν τις κορυφές 0 και $\frac{n-1}{2}$, τις κορυφές 0 και $\frac{n+1}{2}$ και τους δεσμούς που ενώνουν τις κορυφές i και $i + \frac{n+1}{2}$, για $i = 1, \ldots, \frac{n-3}{2}$.
Για παράδειγμα,



Ο συνολικός αριθμός των δεσμών του $H_{2r+1,n}$ είναι ίσος με $rn + \frac{n+1}{2} = \frac{(2r+1)n+1}{2} = \frac{kn+1}{2} = \left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil$ (kn περιττός).

Πρόταση 13. *Το γράφημα του Harary $H_{k,n}$ είναι k-συνεκτικό (με τον ελάχιστο αριθμό δεσμών μεταξύ όλων των γραφημάτων με n κορυφές).*

Άσκηση 4. *Να κατασκευασθούν τα γραφήματα $H_{3,7}$, $H_{4,7}$, $H_{5,7}$.*

Πρόταση 14. $\sum_{i=1}^{|V|} d(v_i) = 2|E|$.

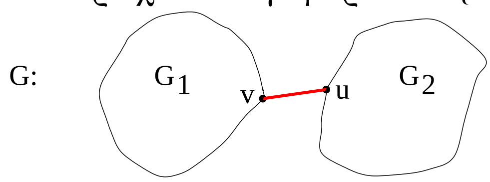
Απόδειξη: Κάθε δεσμός του γραφήματος συνεισφέρει κατά 2 στο άθροισμα των βαθμών (λόγω των άκρων του). Άρα, οι $|E|$ δεσμοί που περιέχει το γράφημα θα δημιουργούν συνολικό άθροισμα βαθμών $2|E|$. □

Πόρισμα 15. *Σε κάθε γράφημα ο αριθμός κόμβων με περιττό βαθμό είναι άρτιος.*

Απόδειξη: Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}$ οι (περιττοί σε πλήθος) κόμβοι με περιττό βαθμό. Τότε το άθροισμα των βαθμών των κόμβων αυτών θα ήταν περιττό (έστω Π) ως άθροισμα περιττού πλήθους περιττών αριθμών. Δεδομένου ότι το άθροισμα των βαθμών των κόμβων με άρτιο βαθμό είναι άρτιο (έστω A) ως άθροισμα άρτιων αριθμών, το συνολικό άθροισμα των βαθμών του γραφήματος θα ήταν $\Pi + A$: περιττός, το οποιο σύμφωνα με την Πρόταση 1 είναι άτοπο. Άρα το πλήθος των κόμβων με περιττό βαθμό είναι άρτιο. □

Πρόταση 16. *Αν ένα συνεκτικό γράφημα δεσμών G περιέχει μόνο κορυφές με άρτιο βαθμό, τότε δεν περιέχει γέφυρες.*

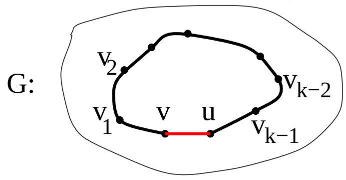
Απόδειξη. Έστω ότι το G περιέχει την γέφυρα $e = \{v, u\}$.



Αν διαγράψουμε από το G την γέφυρα e, στο νέο γράφημα $G - e$ οι κορυφές v, u θα έχουν περιττούς βαθμούς και θα προκύψουν δύο συνεκτικές συνιστώσες G_1, G_2 στις οποίες θα ανήκουν αντίστοιχα τα v, u. Τότε όμως όλες οι υπόλοιπες κορυφές της G_1 θα έχουν άρτιο βαθμό, επομένως το άθροισμα των βαθμών των κορυφών της G_1 θα είναι περιττό, άτοπο. Άρα, το G δεν περιέχει γέφυρα. □

Πρόταση 17. *Αν ένα συνεκτικό γράφημα δεσμών G δεν περιέχει γέφυρα, τότε κάθε κορυφή του ανήκει σε κάποιον κύκλο.*

Απόδειξη. Έστω $e = \{v, u\}$ ένας δεσμός του γραφήματος.



Αφού ο δεσμός e δεν είναι γέφυρα το γράφημα $G - e$ είναι συνεκτικό, άρα υπάρχει μονοπάτι $P = (v, v_1, v_2, \ldots, v_k = u$ στο $G - e$ που συνδέει τις κορυφές v και u. Επομένως, στο G η v ανήκει στον κύκλο $(v, v_1, v_2, \ldots, u, v)$. □

4. ΓΡΑΦΗΜΑ EULER - ΓΡΑΦΗΜΑ HAMILTON

ΓΡΑΦΗΜΑ EULER

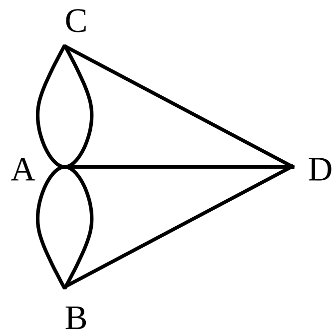
Αν υπάρχει (τουλάχιστον) ένας δρόμος του γραφήματος G, ο οποίος χρησιμοποιεί όλους τους δεσμούς του G, λέγεται **δρόμος Euler**. Αν το G περιέχει ένα κλειστό δρόμο Euler, τότε λέγεται **γράφημα Euler**.

Πρόταση 18.

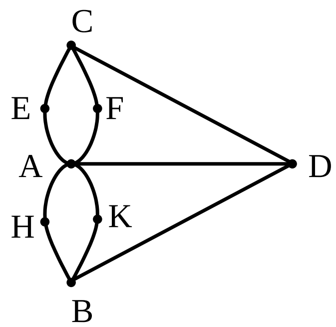
i) Ένα συνεκτικό γράφημα G περιέχει τουλάχιστον ένα δρόμο Euler αν και μόνο αν περιέχει το πολύ δύο κόμβους περιττού βαθμού. Αν περιέχει δύο τέτοιους κόμβους v_1, v_2, τότε όλοι οι δρόμοι Euler του G είναι $v_1 - v_2$ δρόμοι.

ii) Ένα συνεκτικό γράφημα G είναι γράφημα Euler αν και μόνο αν όλοι οι κόμβοι του έχουν άρτιο βαθμό, στην περίπτωση αυτή, όλοι οι δρόμοι Euler του G είναι κλειστοί.

Παρατήρηση: Η Πρόταση 18 i) δίνει και την (αρνητική) απάντηση στο πρόβλημα των γεφυρών του Konigsberg, που παρουσιάστηκε στην εισαγωγή, αφού το γράφημα

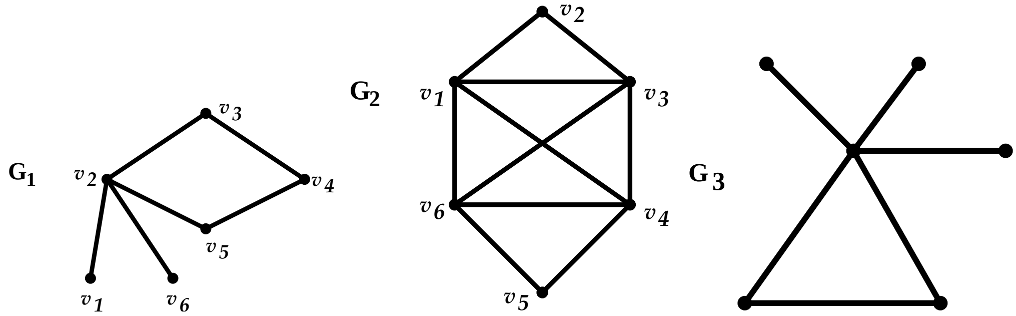


ή, αυστηρότερα, το γράφημα



έχει πάνω από δύο κόμβους περιττού βαθμού.

Παραδείγματα:



Το γράφημα G_1 περιέχει το δρόμο Euler

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_2, v_6)$$

αλλά δεν είναι γράφημα Euler, (αφού περιέχει και κόμβους περιττού βαθμού).

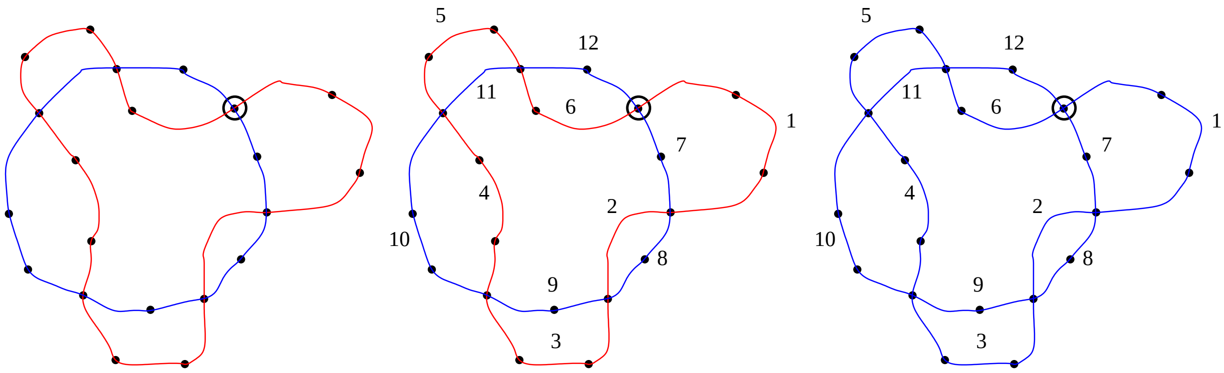
Το γράφημα G_2 (του οποίου όλοι οι κόμβοι έχουν άρτιο βαθμό) είναι γράφημα Euler, αφού περιέχει τον κλειστό δρόμο Euler

$$(v_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_1, v_3, v_6, v_4, v_5, v_6).$$

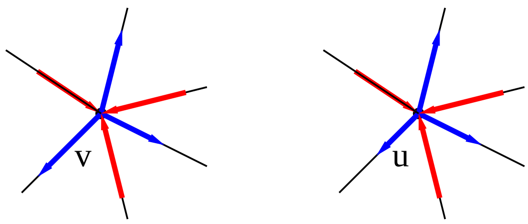
Το γράφημα G_3 δεν περιέχει δρόμο Euler, (αφου περιέχει πάνω από δύο κόμβους περιττού βαθμού.

Για την εύρεση ενός κλειστού δρόμου Euler μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο επόμενος αλγόριθμος. Ο αλγόριθμος στηρίζεται σε δύο βασικές ιδέες:

- Αν έχουμε δύο κλειστούς δρόμους που διέρχονται από μια ή περισσότερες κοινές κορυφές και χρησιμοποιούν διαφορετικούς δεσμούς, τότε μπορούμε να τους ενώσουμε σε ένα μεγαλύτερο κλειστό δρόμο.



- Επειδή όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό, κάθε δρόμος που ξεκινά από μια οποιαδήποτε κορυφή v μπορεί πάντα να επιστρέψει στην αρχική κορυφή v ανεξάρτητα από τις επιλογές που γίνονται κατά την διάτρεξή του. Ο λόγος είναι ότι για κάθε δεσμό που μας απομακρύνει από την αρχική v υπάρχει τουλάχιστον ένας δεσμός που μας οδηγεί πάλι σ' αυτή. Αντίθετα σε οποιαδήποτε άλλη κορυφή u δεν μπορούμε να φτάσουμε σε αδιέξοδο αφού για κάθε δεσμό που μας οδηγεί στην u υπάρχει τουλάχιστον ένας δεσμός που μας απομακρύνει από την u.



Αλγόριθμος του Hierholzer

Είσοδος: Ένα γράφημα Euler G.

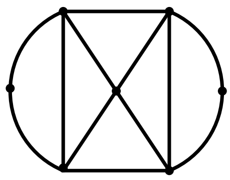
Έξοδος: Ένας κλειστός δρόμος Euler.

Βήμα 1 Επιλέγουμε οποιαδήποτε κορυφή v η οποία είναι άκρο δεσμού που δεν έχουμε διασχίσει. Κατασκευάζουμε έναν κλειστό δρόμο W που περιέχει την v επιλέγοντας αυθαίρετα έναν οποιονδήποτε από τους δεσμούς που δεν έχουμε ήδη διασχίσει μέχρι να επιστρέψουμε και πάλι στην v.

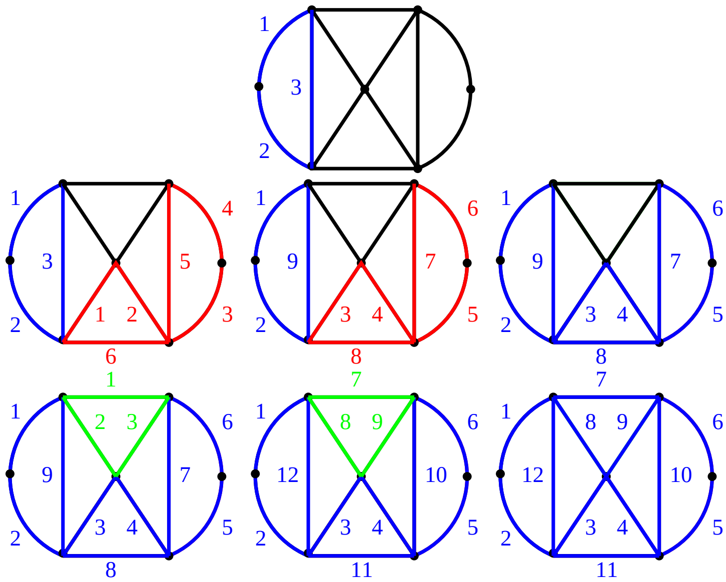
Βήμα 2 Αν υπάρχει κορυφή u η οποία είναι άκρο δεσμού που δεν έχουμε συμπεριλάβει στον κλειστό δρόμο W, επαναλαμβάνουμε το Βήμα 1 για την κορυφή u και **ενώνουμε** τους δύο κλειστούς δρόμους που προκύπτουν.

Αφού το G είναι συνεκτικό επαναλαμβάνοντας τα βήματα 1 και 2 θα εξαντλήσουμε όλους τους δεσμούς του γραφήματος και θα δημιουργήσουμε ένα κλειστό δρόμο Euler για το G.

Παράδειγμα: Να βρεθεί ένας κλειστός δρόμος Euler για το γράφημα



Λύση.

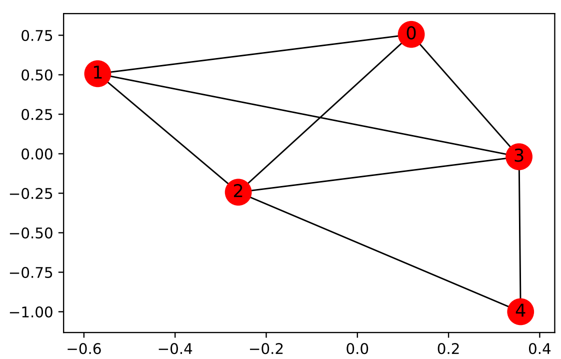


□

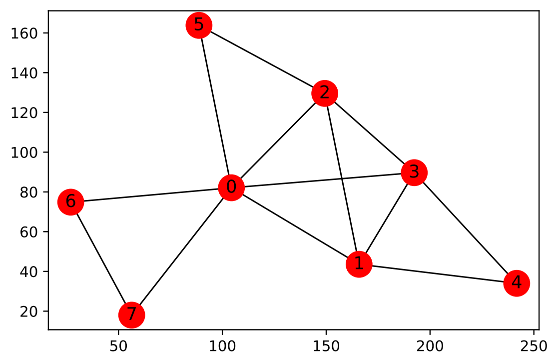
Μπορούμε να βρούμε ένα κλειστό δρόμο Euler σε ένα (συνεκτικό) γράφημα με άρτιους βαθμούς κορυφών χρησιμοποιώντας την μέθοδο `eulerian_circuit(G)`:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

H = nx.house_x_graph()
nx.draw_networkx(H)
plt.show()
if nx.is_eulerian(H):
    W1 = nx.eulerian_circuit(H)
    print("An Eulerian circuit for H:", list(W1))
else:
    print("H is not Eulerian graph")

Seq = [6,4,4,4,2,2,2,2]
G = nx.havel_hakimi_graph(Seq)
pos = nx.drawing.nx_agraph.graphviz_layout(G)
nx.draw_networkx(G,pos)
plt.savefig("euler_example0.eps")
if nx.is_eulerian(G):
    #W is an Eulerian circuit for G
    W = nx.eulerian_circuit(G)
    print("An Eulerian circuit for G:", list(W))
    #print("An Eulerian circuit for G:", [u for u, v in W])
    i = 1
    for e in W:
        G1 = G.subgraph(e)
        nx.draw_networkx_edges(G1,pos,edge_color='blue',width=3.0)
        nx.draw_networkx_nodes(G1,pos,node_color='blue',width=3.0)
        plt.savefig("euler_example"+str(i)+".eps")
        nx.draw_networkx_edges(G1,pos,edge_color='red',width=3.0)
        nx.draw_networkx_nodes(G1,pos,node_color='red',width=3.0)
        i += 1
    plt.savefig("euler_example"+str(i)+".eps")
else:
    print("G is not Eulerian graphs")
plt.show()
```

Output:

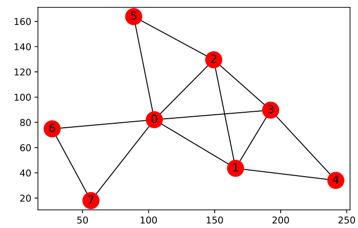



```
H is not Eulerian graph
```

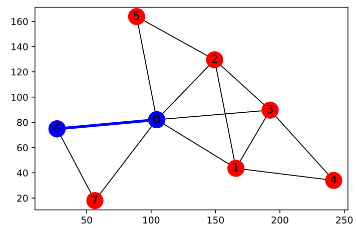



```
An Eulerian circuit for G: [(0, 6), (6,
 7), (7, 0), (0, 5), (5, 2), (2, 3),
 (3, 4), (4, 1), (1, 2), (2, 0), (0, 1)
 , (1, 3), (3, 0)]
```

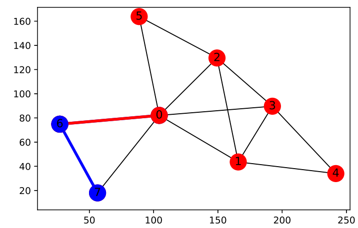
Στο επόμενο παράδειγμα απεικονίζεται η εκτέλεση του αλγορίθμου του Heirholzer πάνω στο γράφημα του προηγούμενου σχήματος. Προσοχή! Η σειρά εκτέλεσης έχει απεικονισθεί βουστροφηδόν.



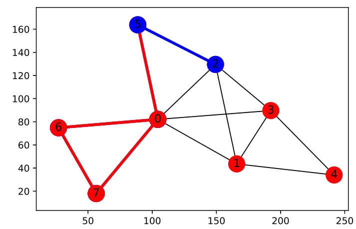
1



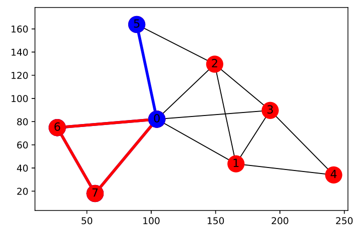
2



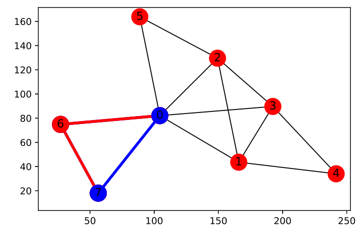
3



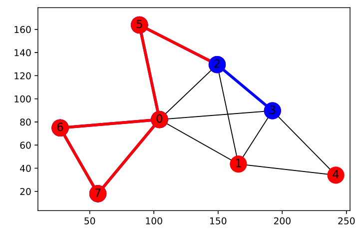
6



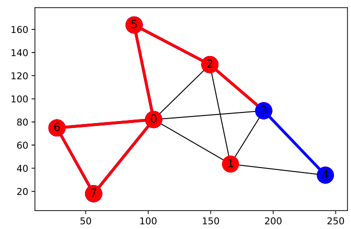
5



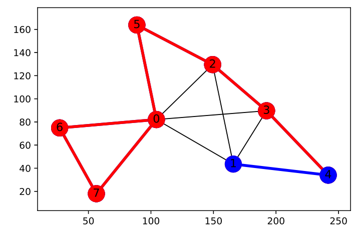
4 (Βρέθηκε ο 1ος κύκλος)



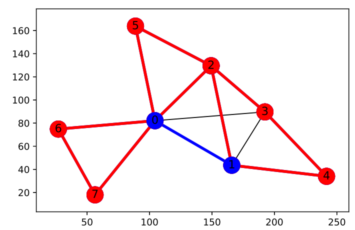
7



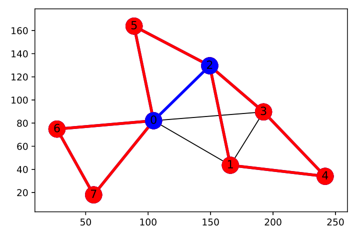
8



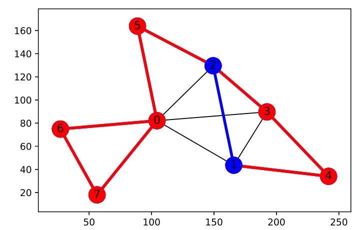
9



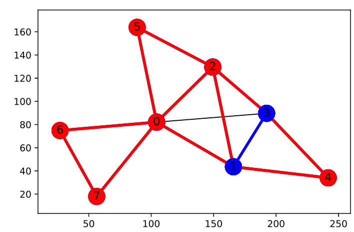
12



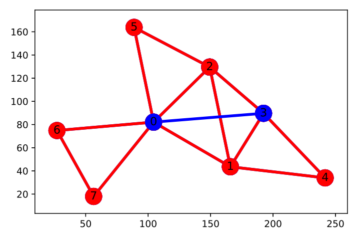
11 (Βρέθηκε 2ος κύκλος)



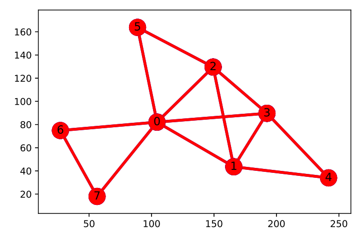
10



13



14 (Βρέθηκε 3ος κύκλος)



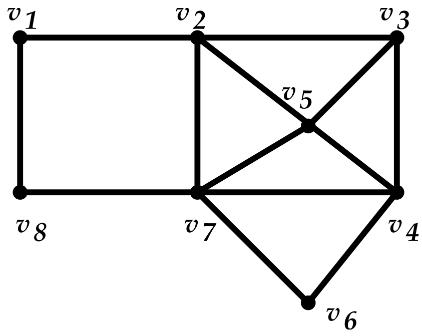
15

ΓΡΑΦΗΜΑ HAMILTON

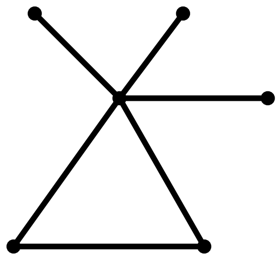
Ένας κύκλος του G ο οποίος διέρχεται από όλους τους κόμβους του G λέγεται **κύκλος Hamilton**. Αν το G περιέχει ένα κύκλο Hamilton, λέγεται **γράφημα Hamilton**.

Παραδείγματα:

G_1



G_2



Το γράφημα G_1 είναι γράφημα Hamilton, αφού περιέχει τον κύκλο Hamilton $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_1)$, ενώ το γράφημα G_2 δεν είναι γράφημα Hamilton, αφού προφανώς δεν περιέχει ένα κύκλο Hamilton.

Παρατήρηση: Μέχρι σήμερα δεν έχει βρεθεί μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για το πότε ένα γράφημα περιέχει κύκλο Hamilton. Επίσης, η εύρεση ενός κύκλου Hamilton σε ένα τυχαίο γράφημα θεωρείται δύσκολο πρόβλημα. (Συγκεκριμένα, ανήκει στην κατηγορία των NP-complete προβλημάτων.)

Γνωστά αποτελέσματα:

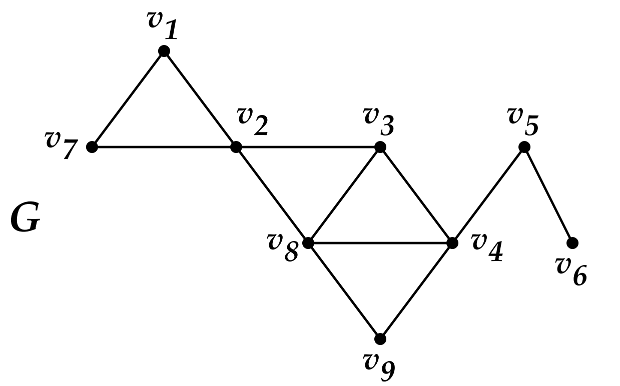
Πρόταση 19 (Dirac 1952). *Αν σε ένα απλό γράφημα G, με $|V(G)| = n \geq 3$, ισχύει ότι $d(v) + d(u) \geq n$ για κάθε ζεύγος v, u μη γειτονικών κορυφών, τότε το G είναι γράφημα Hamilton.*

Πρόταση 20 (Pósa 1962). *Αν σε ένα απλό γράφημα G, με $|V(G)| = n \geq 3$ και ακολουθία βαθμών $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$, ισχύει ότι $d_i \geq i + 1$ για κάθε $i < n/2$, τότε το G είναι γράφημα Hamilton.*

Πρόταση 21 (Chvátal 1972). *Αν σε ένα απλό γράφημα G, με $|V(G)| = n \geq 3$ και ακολουθία βαθμών $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$, ισχύει ότι $d_i \geq i + 1$ ή/και $d_{n-i} \geq n - i$ για κάθε $i < n/2$, τότε το G είναι γράφημα Hamilton.*

Ασκήσεις προς επίλυση

(1) Δίδεται το γράφημα G



Να ορισθούν:

i) Μια διαδρομή μήκους 8 από το v_1 στο v_3.

ii) Ένας δρόμος μήκους 5 από το v_3 στο v_8.

iii) Ένα μονοπάτι μήκους 4 από το v_2 στο v_3.

iv) Μια κλειστή διαδρομή μήκους 6 (που να μην είναι δρόμος).

v) Ένας κλειστός δρόμος μήκους 6 (που να μην είναι κύκλος).

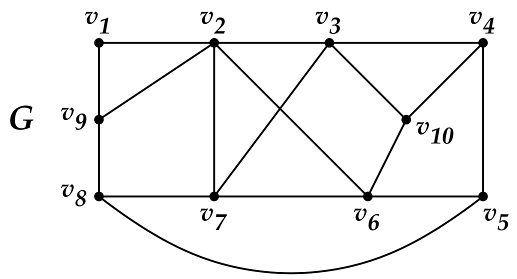
vi) Ένας κύκλος μήκους 5.

vii) Ένα άκυκλο υπογράφημά του H με $V(H) = V(G)$.

viii) Να ευρεθούν (αν υπάρχουν) οι κλειδώσεις και οι ισθμοί του.

ix) Να ευρεθούν τα μπλοκ του.

(2) Δίδεται το γράφημα G



i) Να εξετασθεί αν είναι μη διαχωρίσιμο.

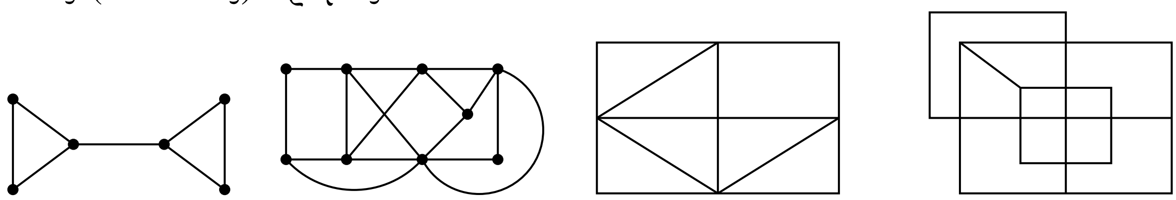
ii) Να ευρεθεί ένα σύνολο κλειδώσεών του.

(3) Για καθένα από τα παρακάτω γραφήματα, να εξετασθεί:

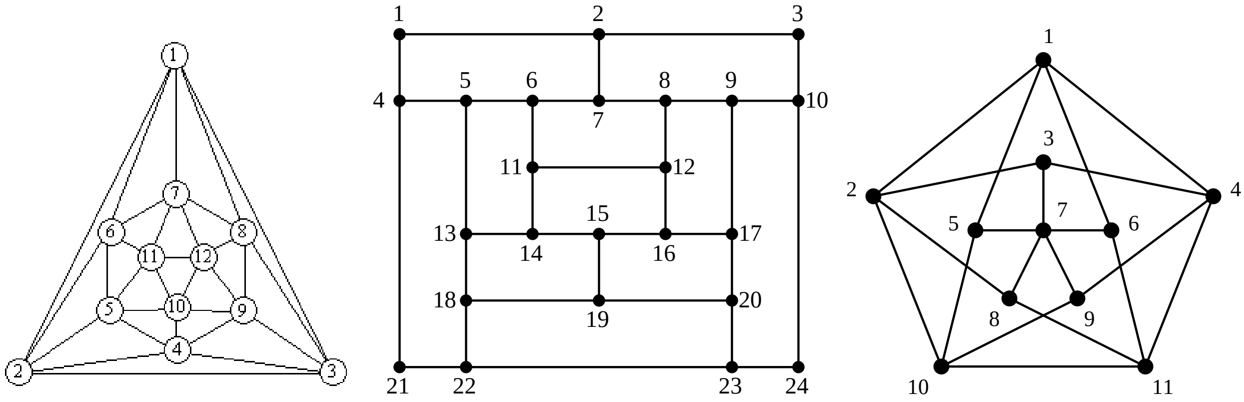
i) Αν υπάρχει δρόμος Euler.

ii) Αν είναι γράφημα Euler.

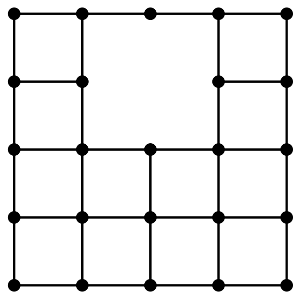
Στην περίπτωση όπου υπάρχει (κλειστός) δρόμος Euler να βρεθεί ένας τέτοιος (κλειστός) δρόμος.



(4) Να βρεθεί ένας κύκλος Hamilton για τα παρακάτω γραφήματα:



(5) **(*)** Να δειχθεί ότι το παρακάτω γράφημα δεν είναι γράφημα Hamilton.



Υποδείξεις:

(1ος τρόπος) Οι κορυφές βαθμού 2 μπορούν να συμμετέχουν στον κύκλο με μοναδικό τρόπο.

(2ος τρόπος) Το γράφημα είναι διμερές (βλ. σελ. 63), άρα σε κάθε βήμα του κύκλου εναλλάσσονται τα σύνολα της διαμέρισης.

(6) **(*)** Εστω G ένα κανονικό γράφημα με άρτιο αριθμό κορυφών. Να δειχθεί ότι ένα τουλάχιστον από τα G, G^c είναι γράφημα Hamilton.

(7) Να εξετασθεί αν υπάρχουν γραφήματα με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών

α) $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$

β) $(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 2, 2, 2)$

(8) **(*)** Να κατασκευασθεί ένα 3-συνεκτικό γράφημα με 8 κορυφές και 12 δεσμούς.

(9) Να υπολογισθεί μια διαμέριση των κορυφών του επόμενου γραφήματος σε δύο κλάσεις S, T, έτσι ώστε η κανονικοποιημένη τομή τους να είναι μικρότερη από 1/2.