

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ  
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΠΜΣ “ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ -  
ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΧΝΗΤΗΣ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗΣ”

Σημειώσεις του μαθήματος

**ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ  
ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ**

Κ. Μανές - Ι. Τασούλας

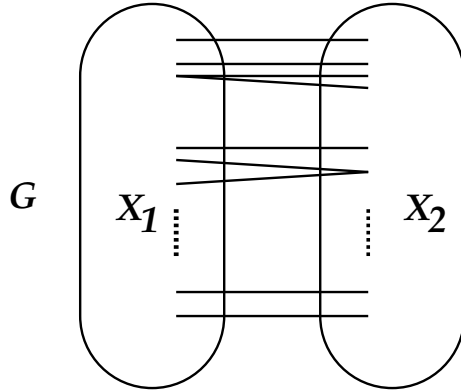
Σημειώσεις διαλέξεων 4-5

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2023

Οι παρούσες σημειώσεις βασίζονται σε προηγούμενες σημειώσεις του μαθήματος που έχουν συγγράψει ο Καθηγητής κ. Αριστείδης Σαπουνάκης και ο Καθηγητής κ. Παναγιώτης-Γεώργιος Τσικούρας.

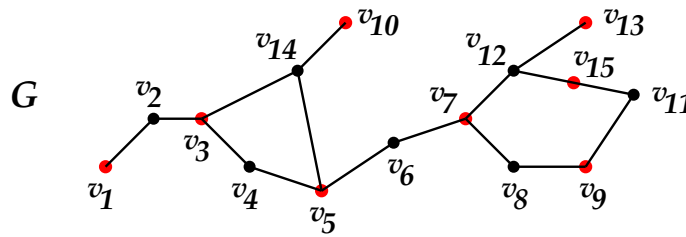
## 9. ΔΙΜΕΡΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Ένα γράφημα  $G$  λέγεται **διμερές** (bipartite) αν το σύνολο  $X$  των κορυφών του μπορεί να διαμεριστεί σε δύο υποσύνολα  $X_1, X_2$  τέτοια ώστε κάθε  $e \in E$  ενώνει μια κορυφή του  $X_1$  με μια κορυφή του  $X_2$ . Η διαμέριση  $X_1, X_2$  ονομάζεται **διμερής διαμέριση** (bipartition) των κορυφών του  $G$ .

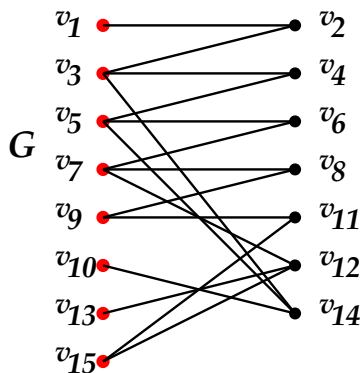


### Παραδείγματα

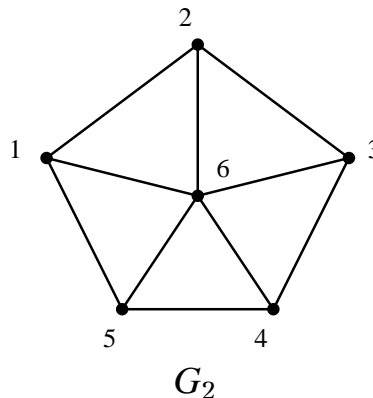
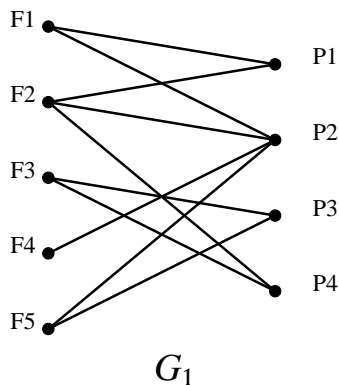
Το γράφημα  $G$  είναι διμερές:



Πράγματι, το  $G$  γράφεται:



Το γράφημα  $G_1$  είναι διμερές, ενώ το γράφημα  $G_2$  δεν είναι διμερές.



**Πρόταση 25.** Ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν όλοι οι κύκλοι του είναι άρτιου μήκους. (Η, ισοδύναμα δεν έχει κύκλους περιττού μήκους.)

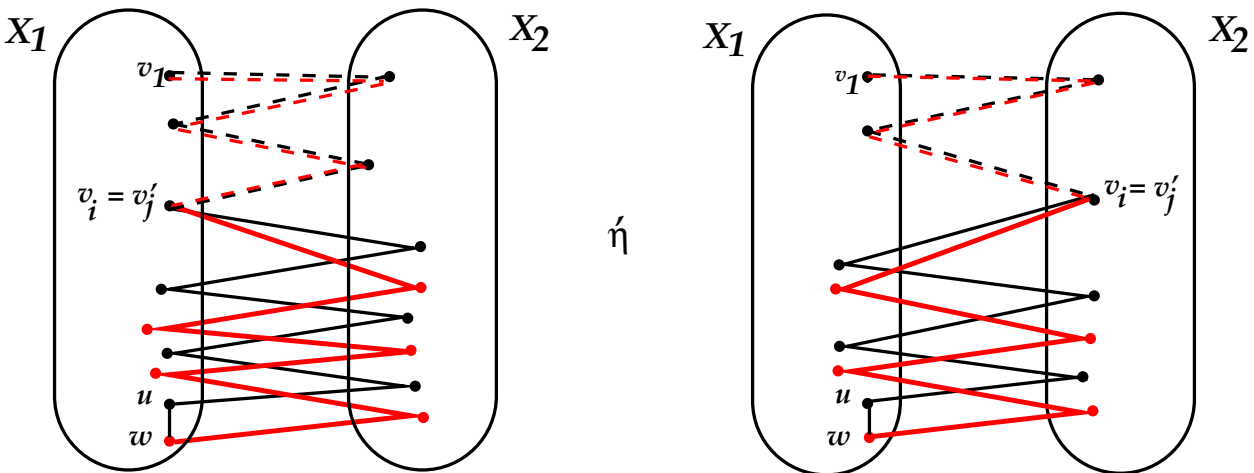
**Απόδειξη.** Ευθύ: Έστω  $G$  διμερές, με  $X = X_1 \cup X_2$ , ( $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ ) και  $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$  ένας κύκλος του με  $v_1 \in X_1$ . Αφού σε κάθε «βήμα» πηγαίνουμε από το ένα σύνολο κόμβων στο άλλο και αφού καταλήγουμε στο ίδιο σύνολο  $X_1$  από το οποίο ξεκινήσαμε θα έχουμε κάνει άρτιο αριθμό «βημάτων», δηλαδή ο κύκλος θα έχει άρτιο μήκος.

**Αντίστροφο:** Έστω  $G$  συνεκτικό (διαφορετικά, εργαζόμαστε αντίστοιχα σε κάθε συνιστώσα του). Έστω  $v_1 \in X$ . Διαμερίζουμε το  $X$  σε  $X_1, X_2$  ως εξής: Το  $X_1$  αποτελείται από το  $v_1$  και όλους τους κόμβους του  $X$  που απέχουν άρτια απόσταση από το  $v_1$ , ενώ  $X_2 = X \setminus X_1$ . Θα δείξουμε ότι κάθε  $\{u, w\}$  του  $E(G)$  ενώνει ένα κόμβο του  $X_1$  με ένα κόμβο του  $X_2$  (οπότε το  $G$  είναι διμερές).

Πράγματι, αν ο  $\{u, w\}$  ένωνε δύο κόμβους του  $X_1$  (δες επόμενο σχήμα) ή, όμοια, του  $X_2$ , τότε έστω

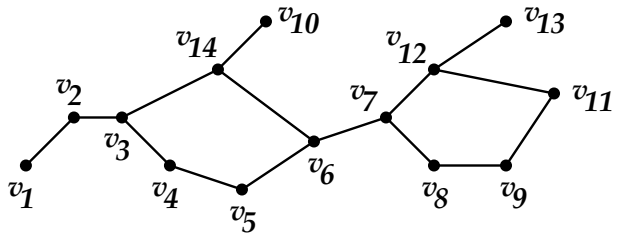
$$(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k = u) \text{ και } (v_1, v'_2, \dots, v'_{\lambda-1}, v'_\lambda = w)$$

τα συντομότερα  $v_1 - u$  και  $v_1 - w$  μονοπάτια, τα οποία θα ήταν άρτιου μήκους (αφού αρχίζουν και τελειώνουν στο ίδιο σύνολο  $X_1$ ). Άρα  $k, \lambda$  : περιττοί. Έστω  $v_i = v'_j$  ο τελευταίος κοινός κόμβος των μονοπατιών αυτών.



Τότε ο κύκλος  $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_k = u, w = v'_\lambda, \dots, v'_{j+1}, v'_j)$  έχει μήκος :  $(k - i) + 1 + (\lambda - j) = (k + \lambda) - (i + j) + 1$ . Αλλά οι  $i, j$  είναι και οι δύο περιττοί (αν  $v_i = v'_j \in X_1$ ), ή και οι δύο άρτιοι (αν  $v_i = v'_j \in X_2$ ). Σε κάθε περίπτωση λοιπόν,  $i + j$  : άρτιος. Επίσης  $k + \lambda$  : άρτιος (αφού  $k, \lambda$  : περιττοί). Άρα το μήκος του παραπάνω κύκλου είναι περιττό. Άτοπο. □

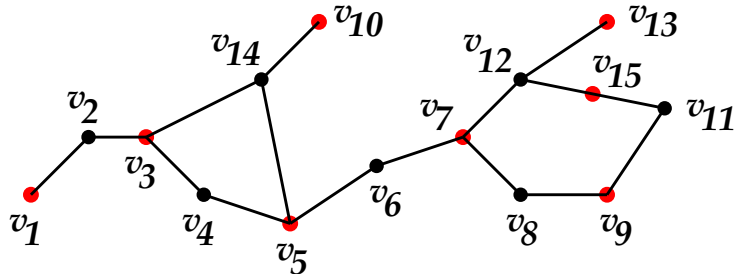
**Παρατηρήσεις:** Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ένα κριτήριο για το εάν γράφημα είναι διμερές. Για παράδειγμα, το γράφημα



δεν είναι διμερές διότι περιέχει κύκλο περιττού μήκους:  $(v_7, v_{12}, v_{11}, v_9, v_8, v_7)$

Επίσης, η απόδειξη δίνει έναν αλγόριθμο για την εύρεση της διμερούς διαμέρισης  $X_1, X_2$  των κορυφών ενός (συνεκτικού) διμερούς γραφήματος: Επιλέγουμε αυθαίρετα μια κορυφή  $v$  και ορίζουμε  $X_1$  (αντ.  $X_2$ ) το σύνολο των κορυφών που απέχουν άρτια (αντ. περιττή) απόσταση από την  $v$ . (Αν το γράφημα δεν είναι συνεκτικό επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία σε κάθε συνεκτική συνιστώσα.)

Για το συνεκτικό διμερές γράφημα



η διμερής διαμέριση  $X_1, X_2$  προκύπτει διαμερίζοντας τις κορυφές του με βάση την απόστασή τους από την κορυφή  $v_1$ , οπότε έχουμε

$$X_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_7, v_9, v_{10}, v_{13}, v_{15}\}.$$

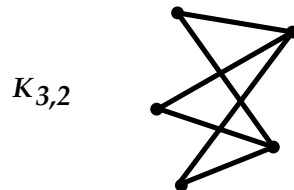
$$X_2 = \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_{11}, v_{12}, v_{14}\}.$$

Τέλος, από την προηγούμενη απόδειξη, προκύπτει ότι στην περίπτωση που ένα διμερές γράφημα  $G$  είναι συνεκτικό υπάρχει μοναδική διμερής διαμέριση των κορυφών του σε δύο σύνολα  $X_1, X_2$ . Αν το  $G$  είναι μη συνεκτικό, με τουλάχιστον ένα δεσμό, και αποτελείται από  $k$  συνεκτικές συνιστώσες τότε εύκολα προκύπτει ότι υπάρχουν  $2^{k-1}$  διαφορετικές διμερείς διαμερίσεις  $X_1, X_2$  των κορυφών του.

### ΠΛΗΡΕΣ ΔΙΜΕΡΕΣ ΓΡΑΦΗΜΑ

Χρησιμοποιήσαμε ήδη το συμβολισμό  $K_n$  για το πλήρες γράφημα με  $n$  κόμβους. Με  $K_{n,m}$  συμβολίζουμε ένα διμερές γράφημα  $G = (X, E)$  με  $X = X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset, |X_1| = n, |X_2| = m$  και τέτοιο ώστε για κάθε  $v \in X_1$  και για κάθε  $u \in X_2$  να ισχύει ότι  $\{v, u\} \in E$ . Το  $K_{n,m}$  ονομάζεται **πλήρες διμερές γράφημα** (complete bipartite graph).

**Παράδειγμα :**



**Πρόταση 26.** Για κάθε  $m, n \in \mathbb{N}^*$  ισχύει ότι  $|E(K_{n,m})| = n \cdot m$ .

**Απόδειξη.** Κάθε δεσμός του  $K_{n,m}$  έχει ακριβώς ένα άκρο του στο σύνολο  $X_1$  όπου  $|X_1| = n$ . Επομένως, μπορούμε να μετρήσουμε τους δεσμούς με βάση τα άκρα τους στο  $X_1$ . Κάθε κορυφή  $v \in X_1$  είναι άκρο σε  $m$  δεσμούς, άρα συνολικά υπάρχουν  $n \cdot m$  δεσμοί. □

Η ιδέα της προηγούμενης απόδειξης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την λύση της άσκησης 1.

**Παρατήρηση:** Το γράφημα  $K_{n,n}$  έχει  $2n$  κορυφές και  $n^2$  δεσμούς και επειδή είναι διμερές δεν περιέχει τρίγωνα (κύκλους μήκους 3). Μάλιστα έχει την ιδιότητα ότι περιέχει τον μέγιστο δυνατό αριθμό δεσμών μεταξύ όλων των γραφημάτων που έχουν  $2n$  κορυφές και δεν περιέχουν τρίγωνα.

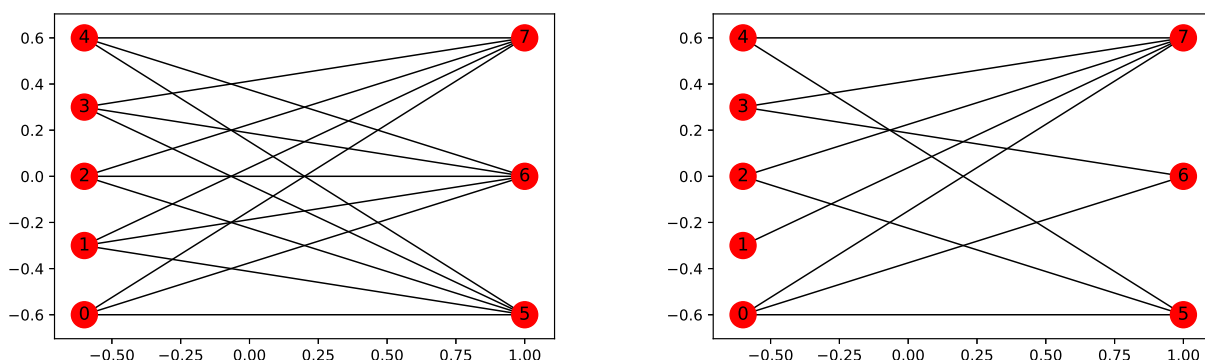
Μπορούμε να κατασκευάζουμε διμερή γραφήματα χρησιμοποιώντας τις μεθόδους `complete_bipartite_graph(n,m)` και `bipartite.gnmk_random_graph(n,m,k)` που κατασκευάζουν το πλήρες διμερές γράφημα  $K_{m,n}$  και ένα τυχαίο διμερές γράφημα με  $|X_1| = n$ ,  $|X_2| = m$  και  $k$  δεσμούς, όπου  $k \leq n \cdot m$ .

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

#create the complete bipartite graph K_{n,m}
n, m = 5, 3 #number of nodes in each set
B = nx.bipartite.complete_bipartite_graph(n,m)
#draw the graph using the bipartite layout algorithm
pos = nx.bipartite_layout(B, range(n))
nx.draw_networkx(B, pos)
plt.show()

#create a random bipartite graph with
#n,m nodes in each set resp. and k <= m*n edges
n, m = 5, 3 #number of nodes in each set
k = 10 #number of edges
B2 = nx.bipartite.gnmk_random_graph(n,m,k)
pos = nx.bipartite_layout(B2, range(n))
nx.draw_networkx(B2, pos)
plt.show()
```

Output:



Μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα γράφημα  $G$  είναι διμερές χρησιμοποιώντας την μέθοδο `is_bipartite(G)`. Στην περίπτωση όπου το  $G$  είναι **συνεκτικό** διμερές γράφημα με την μέθοδο `bipartite.sets(G)` μπορούμε να βρούμε την διμερή διαμέριση  $X_1, X_2$ . (Αν το  $G$  δεν είναι συνεκτικό, η μέθοδος `bipartite.sets(G)` δεν λειτουργεί και πρέπει να δουλέψουμε ξεχωριστά σε κάθε συνεκτική συνιστώσα)

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
```

```

n, m, k = 5, 3, 10
G = nx.bipartite.gnmk_random_graph(n,m,k)
pos = nx.layout.kamada_kawai_layout(G)
nx.draw_networkx(G,pos)
if nx.is_bipartite(G):
    X1 = []
    X2 = []
    Gcc = nx.connected_components(G)
    for cc in Gcc:
        G1 = G.subgraph(cc)
        X, Y = nx.bipartite.sets(G1)
        X1.extend(X)
        X2.extend(Y)
    print("The graph is bipartite")
    print("X1:",X1, "X2:",X2)
    G1 = G.subgraph(X1)
    nx.draw_networkx_nodes(G1,pos,node_color='blue',width=3.0)
else:
    print("The graph is not bipartite")
plt.show()

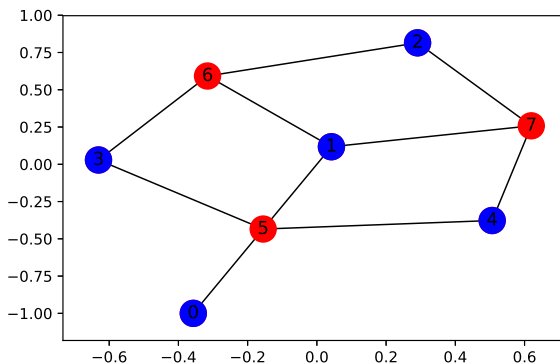
```

Output:

```

The graph is bipartite
X1: [0, 1, 2, 3, 4] X2: [5, 6, 7]

```



Παρακάτω δίδεται μια εναλλακτική υλοποίηση της μεθόδου `bipartite.sets(G)` η οποία χρησιμοποιεί την αρτιότητα της απόστασης από μια τυχαία κορυφή (σε κάθε συνεκτική συνιστώσα) για τον υπολογισμό της διμερούς διαμέρισης των κορυφών ενός διμερούς γραφήματος:

```

import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
from random import choice

n, m, k = 5, 3, 10
G = nx.bipartite.gnmk_random_graph(n,m,k)
pos = nx.layout.kamada_kawai_layout(G)
nx.draw_networkx(G,pos)
if nx.is_bipartite(G):
    nx.bipartite.sets
    X1 = []
    X2 = []
    Gcc = nx.connected_components(G)

```

```

for cc in Gcc:
    G1 = G.subgraph(cc)
    random_node = choice(list(G1.nodes()))
    distances = nx.shortest_path_length(G1, random_node)
    for v in G1:
        if(distances[v] % 2 == 0):
            X1.append(v)
        else:
            X2.append(v)
    print("The graph is bipartite")
    print("X1:", X1, "X2:", X2)
    G1 = G.subgraph(X1)
    nx.draw_networkx_nodes(G1, pos, node_color='blue', width=3.0)
else:
    print("The graph is not bipartite")
plt.show()

```

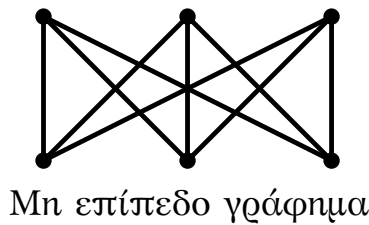
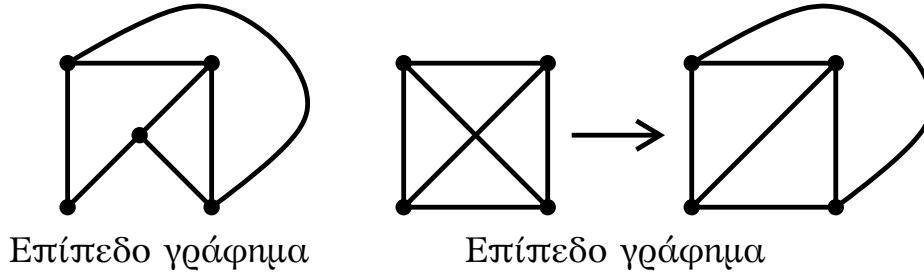


## 10. ΕΠΙΠΕΔΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

**Επίπεδο** (planar) λέγεται ένα γράφημα που μπορεί να απεικονισθεί στο επίπεδο, έτσι ώστε :

- α) Οι κόμβοι του να είναι διακεκριμένα σημεία.
- β) Οι δεσμοί του να είναι απλές, επίπεδες καμπύλες.
- γ) Κάθε ζεύγος δεσμών (αν συναντιούνται), συναντιούνται μόνο στους κόμβους.

**Παράδειγμα :**



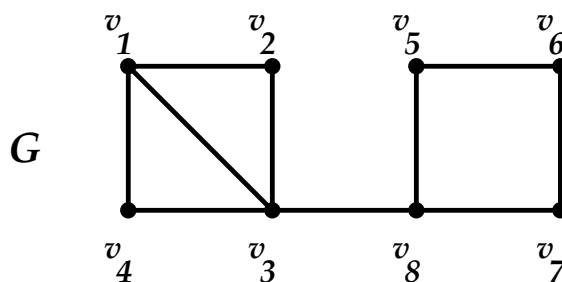
**Επίπεδο τοπολογικό γράφημα** (plane graph) λέγεται ένα επίπεδο γράφημα που έχει ήδη απεικονισθεί στο επίπεδο, έτσι ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες α), β) και γ).

**Παράδειγμα :** Το πρώτο από τα παραπάνω γραφήματα είναι επίπεδο τοπολογικό γράφημα.

**Παρατήρηση :** Στο “**πρόβλημα σύνδεσης**” το ερώτημα που τίθεται (κατά πόσον κάποιοι κόμβοι μπορούν να συνδεθούν με κάποιους άλλους χωρίς να υπάρχουν “διασταυρώσεις”) είναι ουσιαστικά το ερώτημα : κατά πόσον το προκύπτον γράφημα είναι επίπεδο. (Εφαρμογές : Πληροφορική, ηλεκτρολογία (συνδεσμολογίες), συγκοινωνίες κ.λπ.). Ένα θεώρημα σχετικό με το θέμα αυτό (ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα γράφημα μη επίπεδο) είναι το διάσημο θεώρημα του Kuratowski, που θα δούμε αργότερα.

Ορίζουμε σαν **έδρες** (faces) ενός επίπεδου τοπολογικού γραφήματος  $G$  τις κλειστές περιοχές του επιπέδου που ορίζονται από τους δεσμούς του γραφήματος. Η ανοιχτή περιοχή ονομάζεται **εξωτερική έδρα** (outer face) του  $G$ .

**Παράδειγμα :**



Το γράφημα  $G$  έχει τρεις έδρες πλην της εξωτερικής : Τα “τρίγωνα” που ορίζονται από τους κύκλους  $(v_1, v_2, v_3, v_1)$  και  $(v_1, v_3, v_4, v_1)$  και το “τετράγωνο” που ορίζεται από τον κύκλο  $(v_5, v_6, v_7, v_8, v_5)$ .

**Πρόταση 27 (Τύπος του Euler).** Έστω  $G = (V, E)$  ένα συνεκτικό επίπεδο τοπολογικό γράφημα με  $|F| = |F(G)|$  έδρες (συμπεριλαμβανόμενης και της εξωτερικής). Τότε

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

**Παράδειγμα :** Στο προηγούμενο γράφημα  $G$  έχουμε :  
 $|V| = 8, |E| = 10, |F| = 4$  και πράγματι  $8 - 10 + 4 = 2$ .

**Παρατηρήσεις :**

- (1) Από τον τύπο του Euler προκύπτει ότι αν ένα γράφημα είναι επίπεδο κάθε αναπαράσταση του ως επίπεδο τοπολογικό γράφημα θα έχει πάντα τον ίδιο αριθμό εδρών.
- (2) Ο τύπος του Euler ισχύει και για μη απλά γραφήματα, δηλαδή για γραφήματα που περιέχουν βρόχους ή και πολλαπλούς δεσμούς ανάμεσα στις κορυφές τους.
- (3) Ο τύπος του Euler ισχύει και για γραφήματα τα οποία έχουν απεικονισθεί πάνω σε μια σφαίρα, έτσι ώστε να ικανοποιούν τις συνθήκες α), β) και γ). Σε αυτή την περίπτωση ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν τα πολύεδρα με κορυφές πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας.

**Λήμμα 28.**

(1) Σε κάθε επίπεδο γράφημα  $G = (V, E)$ , με  $|E| \geq 2$ , ισχύει ότι

$$3|F| \leq 2|E|$$

(2) Σε κάθε επίπεδο διμερές γράφημα  $G = (V, E)$  με  $|E| \geq 2$  ισχύει ότι

$$2|F| \leq |E|$$

**Απόδειξη.** Έστω  $s(G)$  ο αριθμός των ζευγών  $(e, f)$  του  $G$  για τα οποία ο δεσμός  $e$  συνορεύει με την έδρα  $f$ .

Μπορούμε να μετρήσουμε τα ζεύγη  $(e, f)$  με δύο τρόπους: Αθροίζοντας για κάθε έδρα  $f$  το πλήθος των δεσμών  $e$  που συνορεύουν με αυτήν, ή αθροίζοντας για κάθε δεσμό  $e$  το πλήθος των εδρών  $f$  οι οποίες συνορεύουν με αυτόν.

(1) Με τον πρώτο τρόπο, κάθε έδρα συνορεύει με τουλάχιστον 3 δεσμούς, επομένως

$$s(G) \geq 3|F|$$

Με τον δεύτερο τρόπο, κάθε δεσμός συνορεύει το πολύ με δύο έδρες, οπότε

$$s(G) \leq 2|E|$$

Άρα

$$3|F| \leq 2|E|.$$

- (2) Επειδή το γράφημα είναι διμερές, δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους, άρα, με τον πρώτο τρόπο, κάθε έδρα συνορεύει με τουλάχιστον 4 δεσμούς, επομένως

$$s(G) \geq 4|F|$$

Με τον πρώτο τρόπο, κάθε δεσμός συνορεύει το πολύ με δύο έδρες, οπότε

$$s(G) \leq 2|E|$$

Άρα

$$4|F| \leq 2|E| \Leftrightarrow 2|F| \leq |E|. \quad \square$$

**Πόρισμα 29 (Ανισότητα κορυφών-δεσμών σε επίπεδα γραφήματα).**

- (1) Σε κάθε επίπεδο γράφημα  $G = (V, E)$  ισχύει ότι

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

- (2) Σε κάθε επίπεδο διμερές γράφημα  $G = (V, E)$  ισχύει ότι

$$|E| \leq 2|V| - 4$$

**Απόδειξη.**

- (1) Από το προηγούμενο λήμμα για κάθε επίπεδο γράφημα  $G = (V, E)$  ισχύει ότι

$$3|F| \leq 2|E|$$

Όμως, από τον τύπο του Euler έχουμε ότι  $|F| = |E| - |V| + 2$  οπότε

$$3(|E| - |V| + 2) \leq 2|E| \Leftrightarrow |E| \leq 3|V| - 6$$

- (2) Άσκηση. □

**Άσκηση 5.** Τα γραφήματα  $K_5$  και  $K_{3,3}$  δεν είναι επίπεδα.

**Λύση.** Για το γράφημα  $K_5$  έχουμε ότι  $|V(K_5)| = 5$  και  $|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10$ . Από το προηγούμενο πόρισμα, έχουμε ότι αν το  $K_5$  είναι επίπεδο πρέπει

$$|E(K_5)| \leq 3|V(K_5)| - 6 \Leftrightarrow 10 \leq 3 \cdot 5 - 6 \Leftrightarrow 10 \leq 9$$

άτοπο, άρα το  $K_5$  δεν είναι επίπεδο.

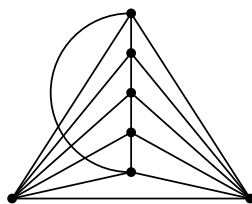
Για το γράφημα  $K_{3,3}$  έχουμε ότι  $|V(K_{3,3})| = 6$  και  $|E(K_{3,3})| = 3 \cdot 3 = 9$ .

Επειδή το  $K_{3,3}$  είναι διμερές, από το προηγούμενο πόρισμα, έχουμε ότι αν το  $K_{3,3}$  είναι επίπεδο πρέπει

$$|E(K_{3,3})| \leq 2|V(K_{3,3})| - 4 \Leftrightarrow 9 \leq 2 \cdot 6 - 4 \Leftrightarrow 9 \leq 8$$

άτοπο, άρα το  $K_{3,3}$  δεν είναι επίπεδο. □

**Άσκηση 6.** Να εξετασθεί αν το παρακάτω γράφημα είναι επίπεδο ή όχι.



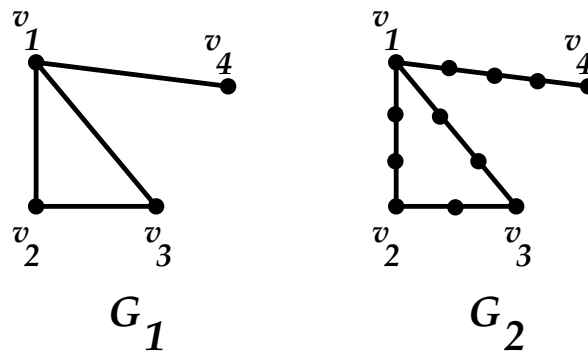
# κορυφών = 7,  
# δεσμών = 16

**Παρατήρηση:** Προφανώς, αν ένα γράφημα  $G$  έχει ως υπογράφημα ένα μη επίπεδο γράφημα  $H$ , τότε το  $G$  είναι μη επίπεδο.

## ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ KURATOWSKI

Εάν ένα γράφημα  $G_2$  προκύπτει από ένα γράφημα  $G_1$  με αντικατάσταση ενός ή περισσότερων δεσμών του  $G_1$  από ένα μονοπάτι μεταξύ των αντίστοιχων κόμβων (δηλαδή, με την παρεμβολή νέων κόμβων), τότε το  $G_2$  λέγεται **εκλέπτυνση** ή **υποδιαίρεση** του  $G_1$ .

**Παράδειγμα :**



Το  $G_2$  είναι μια εκλέπτυνση του  $G_1$ .

**Πρόταση 30 (Θεώρημα Kuratowski).** Ένα γράφημα είναι μη επίπεδο αν και μόνο αν έχει ένα υπογράφημα που είναι εκλέπτυνση του  $K_5$  ή του  $K_{3,3}$ .

Σχετικές ασκήσεις: 8, 9

**Παρατήρηση:** Το Θεώρημα του Kuratowski συνδέει μια τοπολογική ιδιότητα (την αναπαράσταση ενός γραφήματος στο επίπεδο χωρίς τεμνόμενους δεσμούς) με μια συνδυαστική ιδιότητα (την μη εμφάνιση ως υπογραφημάτων των εκλεπτύνσεων του  $K_5$  και του  $K_{3,3}$ ). Επειδή, ο έλεγχος αυτός μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο έπεται ότι μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα γράφημα είναι ή όχι επίπεδο σε πολυωνυμικό χρόνο.

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο `check_planarity(G)` της βιβλιοθήκης `networkx` μπορούμε αφενός να ελέγξουμε αν ένα γράφημα είναι επίπεδο και αφετέρου, εφόσον είναι επίπεδο, να το σχεδιάσουμε ως επίπεδο τοπολογικό γράφημα:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

K5 = nx.complete_graph(5)
#check_planarity(G) returns the tuple: bool is_planar, PlanarEmbedding
#is_planar is True iff G is planar
#PlanarEmbedding is a combinatorial description of a planar embedding
#to be used with nx.combinatorial_embedding_to_pos(embedding)
#to get the x,y coordinates of each vertex
if nx.check_planarity(K5)[0]:
    print("The graph is planar")
else:
    print("The graph is not planar")
```

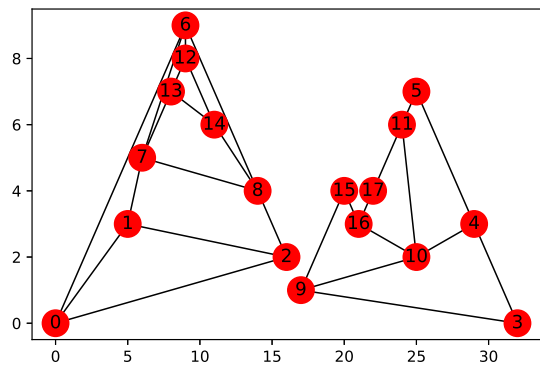
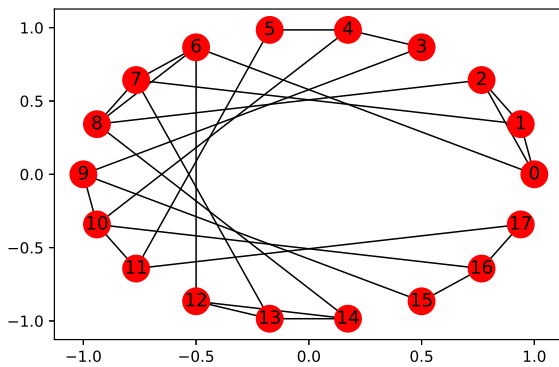
```

#Create a planar graph G using some operations
G1 = nx.cycle_graph(3)
G2 = nx.path_graph(3)
G = nx.disjoint_union(G1,G2)
G = nx.cartesian_product(G2, G)
G = nx.disjoint_union(G, nx.Graph())
#A non-planar drawing
pos = nx.layout.shell_layout(G)
nx.draw_networkx(G,pos)
plt.show()
is_planar, embedding = nx.check_planarity(G)
#A planar drawing of G (if it exists)
if is_planar:
    pos = nx.combinatorial_embedding_to_pos(embedding)
    nx.draw_networkx(G,pos)
    plt.show()

```

Output:

The graph is **not** planar



Στην περίπτωση που ένα γράφημα είναι μη επίπεδο, η εύρεση μιας εκλεπτύνσης του  $K_5$  ή του  $K_{3,3}$  μπορεί να επιτευχθεί με την επαναληπτική μέθοδο `get_counterexample(G)`, η οποία χρησιμοποιεί την μέθοδο `check_planarity(G)`:

Η ιδέα της μεθόδου είναι ότι σε ένα μη επίπεδο γράφημα υπάρχουν δεσμοί του γραφήματος των οποίων η αφαίρεση καταστρέφει την ύπαρξη των εκλεπτύνσεων του  $K_5$  και  $K_{3,3}$ , οπότε το γράφημα που προκύπτει είναι επίπεδο. (Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι κάθε γνήσιο υπογράφημα μιας εκλεπτύνσης των  $K_5$  και  $K_{3,3}$  είναι επίπεδο γράφημα). Επομένως, οι δεσμοί αυτοί αποτελούν μέρος αυτών των εκλεπτύνσεων.

Προκειμένου να τους βρούμε, αφαιρούμε από το  $G$  έναν-έναν τους δεσμούς του  $e_1, e_2, \dots$ , οπότε προκύπτει μια ακολουθία  $G_i$  από μη επίπεδα υπογραφήματα του  $G$  όπου  $G_0 = G$  και  $G_{i+1}$  είναι ίσο με

- $G_i - e_i$ , αν το γράφημα  $G_i - e_i$  είναι μη επίπεδο. (Δηλαδή, αφαιρούμε τον  $e_i$  οριστικά, διότι υπάρχει εκλέπτυνση των  $K_5$  ή/και  $K_{3,3}$  στην οποία δεν συμμετέχει ο δεσμός  $e_i$ .)
- $G_i$ , αν το γράφημα  $G_i - e_i$  είναι επίπεδο. (Στην περίπτωση αυτή, ο δεσμός  $e_i$  ανήκει οπωσδήποτε στην μοναδική εκλέπτυνση των  $K_5$  ή  $K_{3,3}$  που περιέχει το γράφημα  $G_i$ .)

Στο τέλος, οι δεσμοί  $e$  που δεν αφαιρέθηκαν αποτελούν τους δεσμούς της ζητούμενης εκλέπτυνσης του  $K_5$  ή του  $K_{3,3}$ .

```
def get_counterexample(G):
    # copy graph
    G = nx.Graph(G)

    if nx.check_planarity(G)[0]:
        raise nx.NetworkXException("G is planar - no counter example.")

    # find Kuratowski subgraph
    subgraph = nx.Graph()
    for u in G:
        nbrs = list(G[u]) #get the neighbors of u
        for v in nbrs:
            G.remove_edge(u, v)
            if nx.check_planarity(G)[0]:
                G.add_edge(u, v) #put back the edge {u,v}
                subgraph.add_edge(u, v) #edge {u,v} belongs to the Kuratowski graph

    return subgraph
```

Ακολουθούν 3 παραδείγματα μη επίπεδων γραφημάτων στα οποία βρίσκουμε τις αντίστοιχες εκλεπτύνσεις του  $K_5$  ή του  $K_{3,3}$  με την βοήθεια της μεθόδου `get_counterexample(G)`:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

def find_and_draw_kuratowski_in_nonplanar_graph(G, name):
    #pos = nx.nx_agraph.graphviz_layout(G)
    pos = nx.layout.shell_layout(G)
    nx.draw_networkx(G, pos)
    kuratowski = nx.planarity.get_counterexample(G)
    print("The Kuratowski graph consists of nodes:", kuratowski.nodes())
    nx.draw_networkx(kuratowski, pos, node_color="blue", edge_color="blue", width=3.0)
    plt.savefig(name)
    plt.show()

#1st example of finding Kuratowski subgraph in non-planar graph
K57 = nx.bipartite.complete_bipartite_graph(5,7)
find_and_draw_kuratowski_in_nonplanar_graph(K57, "k57.eps")

#2nd example of finding Kuratowski subgraph in non-planar graph
n, k, p = 20, 3, 0.5
```

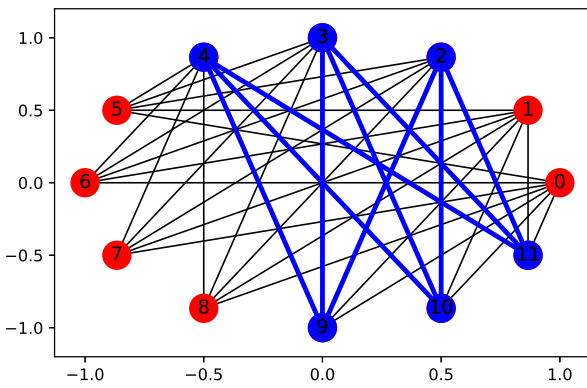
```
G = nx.random_graphs.newman_watts_strogatz_graph(n,k,p)
find_and_draw_kuratowski_in_nonplanar_graph(G, "k2.eps")
```

#3rd example of finding Kuratowski subgraph in non-planar graph

```
G1 = nx.cycle_graph(6)
G2 = nx.power(nx.cycle_graph(5), 2)
G = nx.cartesian_product(G2, G1)
find_and_draw_kuratowski_in_nonplanar_graph(G, "k1.eps")
```

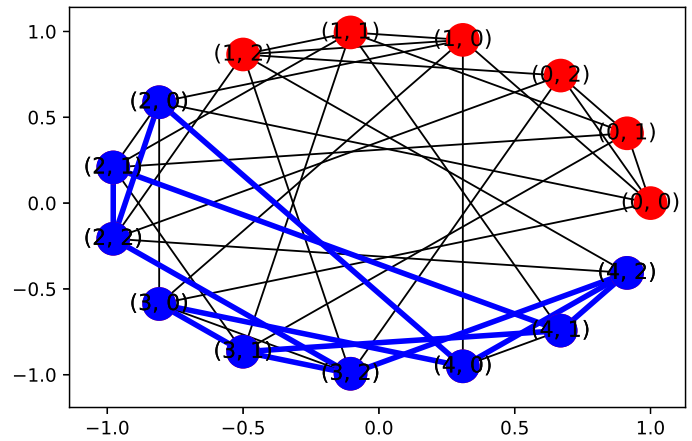
Output:

```
The Kuratowski graph consists of nodes:
[2, 9, 10, 11, 3, 4]
```

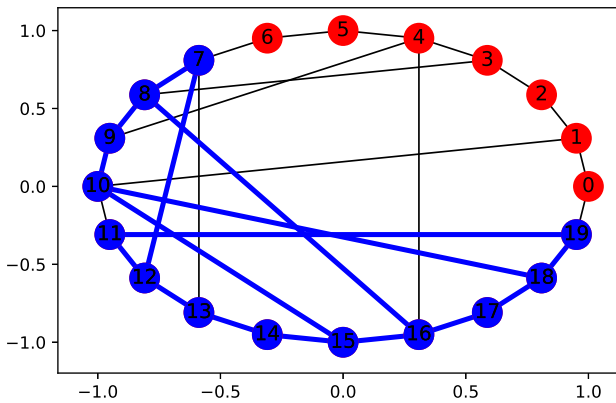


The Kuratowski graph consists of nodes:

```
[(2, 0), (4, 0), (2, 2), (2, 1), (4, 1), (3, 2), (3, 0), (3, 1), (4, 2)]
```



```
The Kuratowski graph consists of nodes:
[7, 8, 12, 9, 16, 10, 15, 18, 11, 19, 13, 14, 17]
```



Σχετικός με το πρόβλημα σύνδεσης είναι και ο παρακάτω ορισμός :

**Αριθμός διασταυρώσεων** (crossing number)  $cr(G)$  ενός γραφήματος  $G$  είναι ο ελάχιστος αριθμός διασταυρώσεων των δεσμών του  $G$  ανά δύο, όταν το  $G$  ζωγραφιστεί στο επίπεδο.

Προφανώς  $cr(G) = 0$  αν και μόνο αν το  $G$  είναι επίπεδο γράφημα. Έχει αποδειχθεί ότι ο αριθμός διασταυρώσεων ενός πλήρους γραφήματος  $K_n$  ικανοποιεί την ανισότητα :

$$cr(K_n) \leq \frac{1}{4} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$$

(και μάλιστα, για  $n \leq 12$ , ισχύει το “=” ).

Επίσης, έχει αποδειχθεί ότι

$$cr(K_{m,n}) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$$

(και μάλιστα, όταν  $m \leq n$  και είτε  $m \leq 6$  είτε  $m = 7$  και  $n \leq 10$ , ισχύει το “=” ).

**Πρόταση 31.** Έστω  $G = (V, E)$  ένα γράφημα δεσμών τότε

$$|E(G)| - 3|V(G)| + 6 \leq cr(G)$$

**Απόδειξη.** Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν το  $G$  είναι επίπεδο, τότε  $cr(G) = 0$  και  $|E(G)| - 3|V(G)| + 6 \leq 0$ , άρα η ανισότητα ισχύει.

Αν το  $G$  δεν είναι επίπεδο, τότε κάθε αναπαράσταση του στο επίπεδο θα περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο διασταύρωσης. Έστω μια αναπαράσταση του  $G$  με  $cr(G) = c$  σημεία διασταύρωσης.

Αν στο γράφημα  $G$  προσθέσουμε  $c$  επιπλέον κορυφές στα σημεία διασταύρωσης των δεσμών του, τότε θα προκύψει ένα γράφημα  $G'$  το οποίο είναι επίπεδο και έχει  $|V(G)| + c$  κορυφές και  $|E(G)| + 2c$  δεσμούς.

Επομένως, από το Πρόγραμμα 29 για το γράφημα  $G'$  θα ισχύει ότι

$$|E(G')| \leq 3|V(G')| - 6 \Leftrightarrow$$

$$|E(G)| + 2c \leq 3(|V(G)| + c) - 6 \Leftrightarrow$$

$$|E(G)| - 3|V(G)| + 6 \leq c$$

□



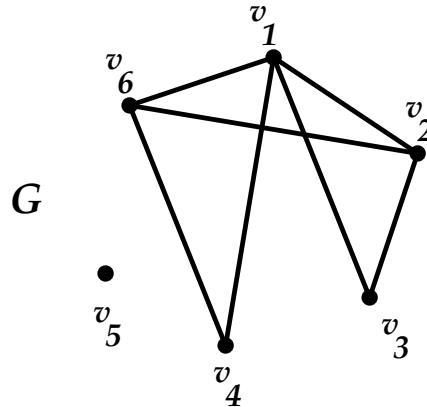
## 11. ΜΗΤΡΑ ΚΑΙ ΛΙΣΤΑ ΓΕΙΤΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΔΕΣΜΩΝ

Έστω  $G = (V, E)$ . Ορίζουμε την  $|V| \times |V|$  μήτρα (πίνακα)  $M_G$  ή  $M$  του  $G$  ως εξής:

$$M = [m_{ij}], \text{ με } m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{αν } \{v_i, v_j\} \notin E. \end{cases}$$

Η μήτρα αυτή ονομάζεται **μήτρα (γειτονικότητας) του γραφήματος δεσμών**.

**Παράδειγμα:** Στο γράφημα  $G$



αντιστοιχεί η μήτρα

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Παρατηρήσεις:**

1. Η μήτρα  $M$  είναι προφανώς συμμετρική.
2. Ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^{|V|} m_{ij} = \sum_{j=1}^{|V|} m_{ji} = d(v_i)$$

(δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων της  $i$  γραμμής ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της  $i$  στήλης και με τον βαθμό του κόμβου  $v_i$ ).

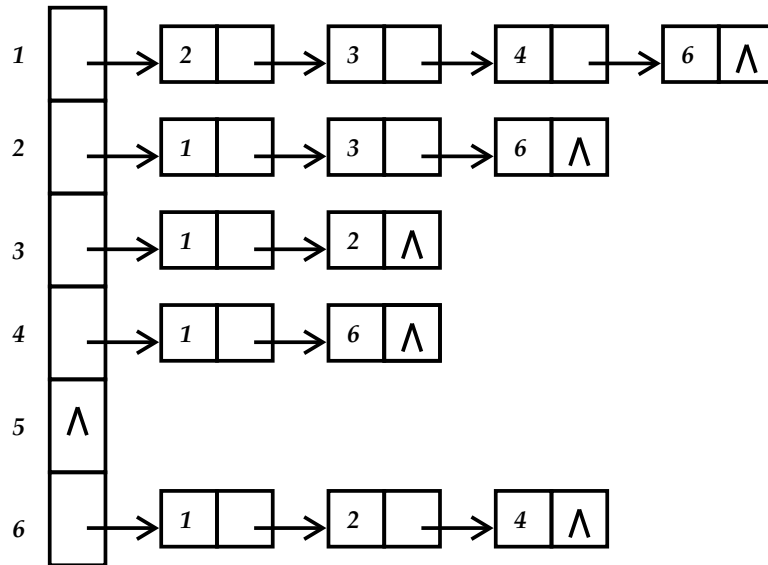
Για να εκφραστούν και να υλοποιηθούν αποδοτικότερα κάποιοι αλγόριθμοι στον υπολογιστή, χρησιμοποιούνται και οι **λίστες γειτονικότητας**.

Σ' αυτές, κάθε γραμμή (λίστα) αντιστοιχεί σε ένα κόμβο  $v_i$ , ο δείκτης  $i$  του οποίου εμφανίζεται ως επικεφαλής δείκτης της λίστας. Τα υπόλοιπα στοιχεία της λίστας έχουν τη μορφή

κόμβος	δείκτης
--------	---------

όπου στην πρώτη θέση εμφανίζεται ο δείκτης ενός κόμβου που συνδέεται με τον  $v_i$ , ενώ η δεύτερη θέση συνδέεται με το επόμενο στοιχείο της λίστας (αν υπάρχει και άλλος κόμβος που συνδέεται με τον  $v_i$ ) ή περιέχει ένα σύμβολο  $\wedge$  (αν δεν υπάρχει άλλος κόμβος που συνδέεται με τον  $v_i$ ).

**Παράδειγμα:** Για το γράφημα  $G$  στην αρχή της παραγράφου, η λίστα γειτονικότητας είναι:



**Παρατήρηση:** Σε κάθε γραμμή εμφανίζονται όλοι οι κόμβοι που συνδέονται με τον επικεφαλής κόμβο (και όχι κατ' ανάγκη μεταξύ τους).

```

import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G = nx.Graph()
V = [1,2,3,4,5,6]
E = [[1,2],[1,3],[1,4],[1,6],[2,3],[2,6],[4,6]]
G.add_nodes_from(V)
G.add_edges_from(E)

print("The (sparse) adjacency matrix of graph G is:")
print(nx.adjacency_matrix(G))
print("The adjacency matrix of graph G is:")
print(nx.adjacency_matrix(G).todense())

pos = nx.circular_layout(G)
nx.draw_networkx(G,pos)
plt.show()
  
```

Output:

```

The (sparse) adjacency matrix of graph G is:
(0, 1) 1
(0, 2) 1
(0, 3) 1
(0, 5) 1
(1, 0) 1
(1, 2) 1
(1, 5) 1
(2, 0) 1
(2, 1) 1
(3, 0) 1
(3, 5) 1
(5, 0) 1
  
```

(5, 1) 1

(5, 3) 1

The adjacency matrix of graph G is:

[[0 1 1 1 0 1]

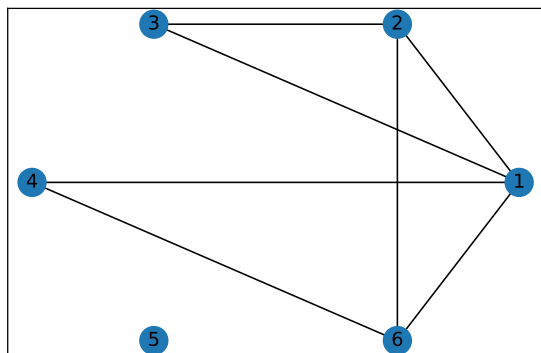
[1 0 1 0 0 1]

[1 1 0 0 0 0]

[1 0 0 0 0 1]

[0 0 0 0 0 0]

[1 1 0 1 0 0]]

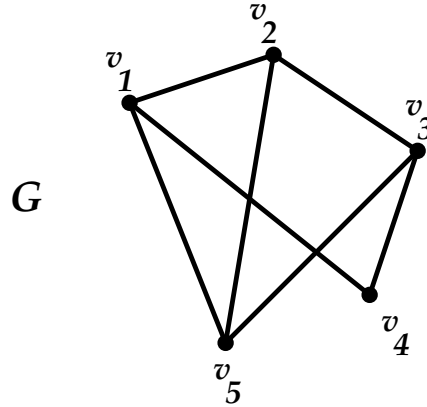


## 12. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΔΕΣΜΩΝ

Έστω  $G = (V, E)$  ένα γράφημα δεσμών. Ορίζουμε την απεικόνιση  $\Gamma : V \rightarrow \mathcal{P}(V)$  με  $\Gamma(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E\}$ .

**Παρατήρηση:** Το ζεύγος  $(V, \Gamma)$  ορίζει το γράφημα  $G$  ισοδύναμα με το  $(V, E)$  και γι' αυτό μπορούμε να αναφερόμαστε και στο γράφημα  $(V, \Gamma)$  αντί  $(V, E)$ . Η  $\Gamma$  ονομάζεται **απεικόνιση του γραφήματος δεσμών**.

**Παράδειγμα:** Στο γράφημα  $G$



αντιστοιχεί η απεικόνιση  $\Gamma$ , με

$$\Gamma(v_1) = \{v_2, v_4, v_5\},$$

$$\Gamma(v_2) = \{v_1, v_3, v_5\},$$

$$\Gamma(v_3) = \{v_2, v_4, v_5\},$$

$$\Gamma(v_4) = \{v_1, v_3\},$$

$$\Gamma(v_5) = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

Επιπλέον, ορίζουμε τα εξής:

Αν  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ , τότε

$$\Gamma(A) = \Gamma(v_1) \cup \Gamma(v_2) \cup \dots \cup \Gamma(v_k)$$

και (αναδρομικά) για  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\Gamma^n(v) = \Gamma(\Gamma^{n-1}(v)).$$

**Παράδειγμα:** Για το γράφημα  $G$  έχουμε:

Αν  $A = \{v_1, v_2\}$  τότε  $\Gamma(A) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ .

Επίσης,  $\Gamma^2(v_1) = \Gamma(\Gamma(v_1)) = \Gamma(\{v_2, v_4, v_5\}) = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ .

### 13. ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΟΣΤΟΥΣ

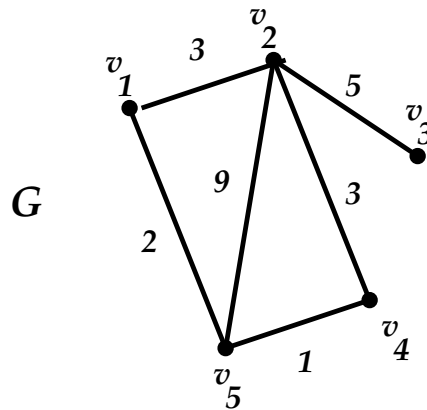
Με ένα γράφημα  $G(V, E)$  μπορεί να συσχετισθεί κάποια **συνάρτηση κόστους**, δηλαδή μια συνάρτηση  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Οι τιμές  $f(\{v_i, v_j\})$  για κάθε  $\{v_i, v_j\} \in E$ , δίδονται αντίστοιχα και πάνω στο γράφημα.

Βασικές έννοιες, όπως ο ισομορφισμός, τα υπογραφήματα κ.λπ. μεταφέρονται κατά προφανή τρόπο στα γραφήματα με συνάρτηση κόστους.

Προφανώς, μπορούμε επίσης να ορίσουμε και την αντίστοιχη μήτρα γειτονικότητας:

$$M = [m_{ij}], \text{ με } m_{ij} = \begin{cases} f(\{v_i, v_j\}), & \text{αν } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{αν } \{v_i, v_j\} \notin E. \end{cases}$$

**Παράδειγμα:** Στο γράφημα  $G$



αντιστοιχεί η μήτρα

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

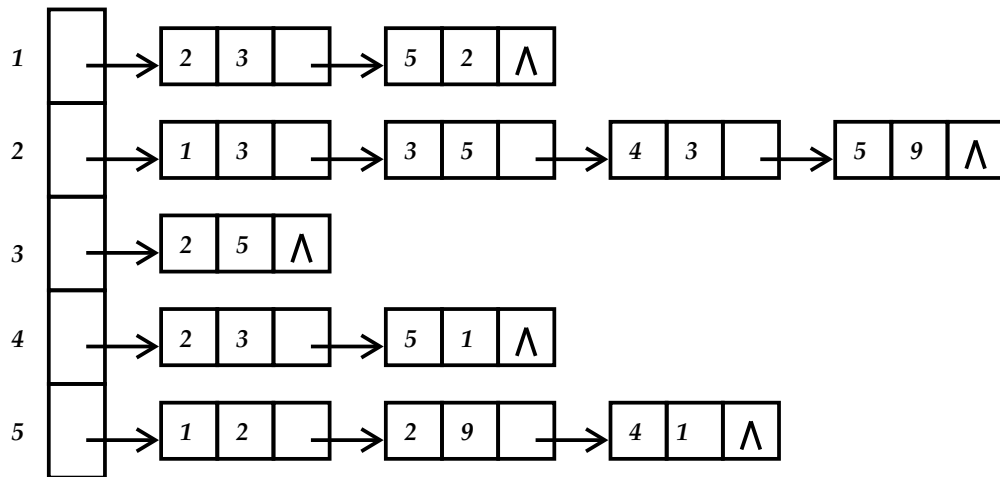
**Παρατήρηση:** Προφανώς τα γραφήματα χωρίς συνάρτηση κόστους μπορούν να θεωρηθούν σαν ειδική περίπτωση, όπου  $f(\{v_i, v_j\}) = 1$ , για κάθε  $\{v_i, v_j\} \in E$ .

Στην περίπτωση που το γράφημα έχει συνάρτηση κόστους, τα στοιχεία της λίστας έχουν την μορφή

κόμβος	κόστος	δείκτης
--------	--------	---------

όπου στη δεύτερη θέση εμφανίζεται το κόστος του αντίστοιχου δεσμού.

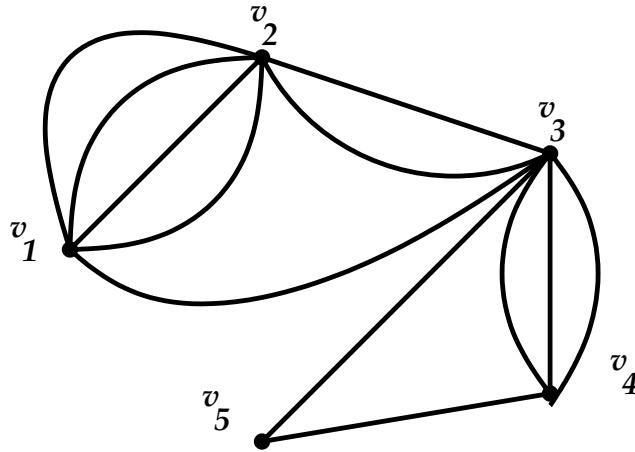
Παράδειγμα: Για το γράφημα  $G$  η λίστα γειτονικότητας είναι:



## $p$ -γραφήματα δεσμών

Το διατεταγμένο ζεύγος  $(X, F)$ , όπου  $X \neq \emptyset$  και  $F$  είναι μια οικογένεια ζευγών  $\{v, u\}$  με  $v, u \in X$  τέτοια ώστε κανένα στοιχείο της δεν εμφανίζεται περισσότερες από  $p$  φορές, λέγεται  $p$ -γράφημα δεσμών.

**Παράδειγμα :** Το παρακάτω γράφημα είναι ένα 4-γράφημα δεσμών (αφού το  $\{v_1, v_2\}$  εμφανίζεται 4 φορές).



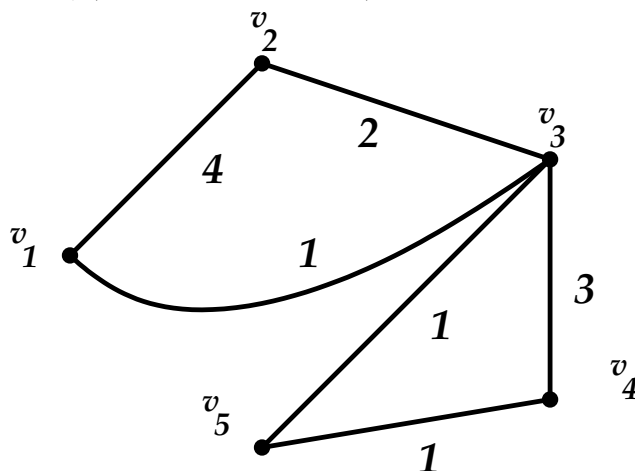
Η μήτρα του παραπάνω 4-γραφήματος είναι προφανώς η

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

### Παρατηρήσεις :

1. Για  $p = 1$  παίρνουμε τα απλά γραφήματα δεσμών με τα οποία και συνήθως ασχολούμαστε.

2. Προφανώς τα  $p$ -γραφήματα δεσμών μπορούν να ταυτιστούν με τα γραφήματα με συνάρτηση κόστους, αρκεί κάθε πολλαπλή εμφάνιση δεσμών μεταξύ δύο κόμβων να αντικατασταθεί με έναν απλό δεσμό ανάμεσα στις κορυφές αυτές, με κόστος ίσο με το πλήθος των πολλαπλών δεσμών. Το παραπάνω γράφημα λοιπόν μπορεί να αντικατασταθεί με το γράφημα με συνάρτηση κόστους



(στο οποίο προφανώς αντιστοιχεί η ίδια μήτρα  $M$ ).

## 14. ΠΡΟΒΛΕΨΗ ΝΕΩΝ ΔΕΣΜΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ

Δίδεται ένα γράφημα δεσμών  $G$  στο οποίο οι δεσμοί αναπαριστούν τις υφιστάμενες γνωριμίες ανάμεσα σε ένα σύνολο προσώπων. Προφανώς, οι γνωριμίες αυτές είναι δυναμικές και μεταβάλλονται με τον χρόνο. Συνήθως, όσο περνάει ο χρόνος πραγματοποιούνται νέες γνωριμίες μεταξύ των προσώπων του συνόλου. Πώς μπορούμε να προβλέψουμε τις πιθανές νέες γνωριμίες, δεδομένου ότι γνωρίζουμε τις υφιστάμενες γνωριμίες;

Μια προσέγγιση στο πρόβλημα αυτό βασίζεται στην παραδοχή ότι οι νέες γνωριμίες προέρχονται από τις κοινές επαφές δύο προσώπων. Όσο περισσότερες είναι οι κοινές επαφές, τόσο πιο πιθανό είναι τα δύο πρόσωπα να γνωριστούν στο μέλλον. Η ιδιότητα αυτή επεκτείνεται και στις κοινές επαφές των κοινών επαφών κάθε προσώπου και γενικότερα στην ύπαρξη πολλών σύντομων μονοπατιών μεταξύ δύο προσώπων.

Επομένως, με βάση αυτή την παραδοχή, η πρόβλεψη των μελλοντικών γνωριμιών μπορεί να βασιστεί στο πλήθος των διαφορετικών μονοπατιών που συνδέουν δύο κορυφές. Όσο πιο σύντομα είναι τα μονοπάτια αυτά (πχ. μήκους 2), τόσο περισσότερο συνεισφέρουν στην δημιουργία νέας γνωριμίας και όσο αυξάνει το μήκος τους, τόσο λιγότερο πρέπει να συνυπολογίζονται ως συνεισφορά στην δημιουργία νέας γνωριμίας.

Επειδή η απαρίθμηση των μονοπατιών ενός γραφήματος είναι εν γένει πολύ δύσκολο πρόβλημα, θα βασιστούμε αντ' αυτού στην απαρίθμηση των διαδρομών του, για τις οποίες έχει αποδειχθεί η επόμενη πρόταση:

**Πρόταση 32.** Ο αριθμός των  $v_i-v_j$  διαδρομών μήκους  $n$  σε ένα γράφημα δεσμών ή τόξων  $G$ , ισούται με το στοιχείο  $(i, j)$  της μήτρας γειτνίασης  $M^n$  του  $G$ .

**Απόδειξη.** Για  $n = 1$  προφανώς ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για  $n = k$  (και έστω ότι  $M = [m_{ij}]$  και  $M^k = [p_{ij}]$ ).

Για  $n = k + 1$  θα είναι  $M^{k+1} = M^k M = [q_{ij}]$ , όπου

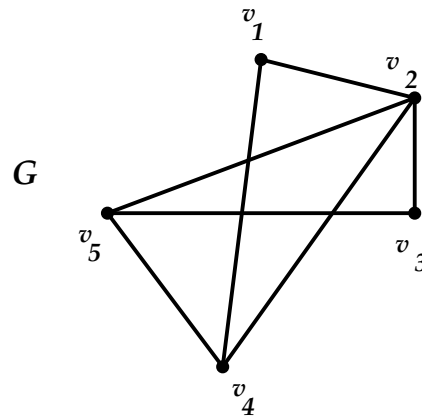
$$(1) \quad q_{ij} = \sum_{r=1}^n p_{ir} m_{rj}$$

(όπου  $n = |V|$ ).

Από την υπόθεση της επαγωγής,  $p_{ir}$  είναι ο αριθμός των διαδρομών μήκους  $k$  από την  $v_i$  στην  $v_r$ . Επίσης,  $m_{rj}$  είναι ο αριθμός των δεσμών (δηλαδή των διαδρομών μήκους 1) από την  $v_r$  στην  $v_j$ . Τότε το  $p_{ir} m_{rj}$  είναι ο αριθμός των διαδρομών μήκους  $k+1$  από την  $v_i$  στην  $v_j$ , με προτελευταία κορυφή την  $v_r$ . Άρα το  $\sum_{r=1}^n p_{ir} m_{rj}$  (δηλαδή, λόγω της (2), το  $q_{ij}$ ) θα είναι ο αριθμός όλων των διαδρομών μήκους  $k+1$  από την  $v_i$  στην  $v_j$  με προτελευταία κορυφή μιας από τις  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , δηλαδή θα είναι πράγματι ο αριθμός όλων των διαδρομών μήκους  $k+1$  από την  $v_i$  στην  $v_j$ . □



## Παράδειγμα Για το γράφημα



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 5 & 7 & 4 \end{bmatrix},$$

$$M^4 = \begin{bmatrix} 11 & 13 & 9 & 11 & 14 \\ 13 & 26 & 13 & 19 & 19 \\ 9 & 13 & 11 & 14 & 11 \\ 11 & 19 & 14 & 19 & 14 \\ 14 & 19 & 11 & 14 & 19 \end{bmatrix},$$

$$M^5 = \begin{bmatrix} 24 & 45 & 27 & 38 & 33 \\ 45 & 64 & 45 & 58 & 58 \\ 27 & 45 & 24 & 33 & 38 \\ 38 & 58 & 33 & 44 & 52 \\ 33 & 58 & 38 & 52 & 44 \end{bmatrix}, \text{ κ.ο.κ.}$$

Στην  $M^3 = [p_{ij}]$  έχουμε  $p_{13} = 3$ , άρα υπάρχουν τρεις διαδρομές μήκους 3 από την  $v_1$  ως την  $v_3$ . (Πράγματι, είναι οι  $(v_1, v_2, v_5, v_3)$ ,  $(v_1, v_4, v_2, v_3)$ ,  $(v_1, v_4, v_5, v_3)$ ).

Στην  $M^4 = [p_{ij}]$  έχουμε  $p_{13} = 9$ , άρα υπάρχουν εννέα διαδρομές μήκους 4 από την  $v_1$  ως την  $v_3$ .

**Πόρισμα 33.** Ο αριθμός των  $v_i$ - $v_j$  διαδρομών μήκους το πολύ  $n$  σε ένα γράφημα τόξων  $G$ , ισούται με το στοιχείο  $(i, j)$  της μήτρας  $\sum_{k=0}^n M^k$ .

Παρατηρήστε ότι  $M^0$  ισούται με την μοναδιαία μήτρα, η οποία περιλαμβάνεται στο άθροισμα, διότι κάθε κορυφή είναι προσβάσιμη από τον εαυτό της με μια διαδρομή μήκους 0.

Σύμφωνα με την παραδοχή που κάνουμε, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των διαδρομών μεταξύ των (μη γειτονικών) κορυφών  $v_i, v_j$ , τόσο πιο πιθανό είναι να δημιουργηθεί ένας δεσμός μεταξύ τους. Επομένως, οι τιμές της μήτρας  $\sum_{k=0}^n M^k$  σε φθίνουσα σειρά δίνουν τους υποψήφιους νέους δεσμούς που θα δημιουργηθούν στο γράφημα.

Δυστυχώς, εν γένει, ο υπολογισμός του αθροίσματος  $\sum_{k=0}^{\nu} M^k$  είναι υπολογιστικά δύσκολος για μεγάλες μήτρες (που αντιστοιχούν σε μεγάλα γραφήματα) και για μεγάλα  $\nu$ .

Η (αναπάντεχη) λύση στο πρόβλημα αυτό είναι ο υπολογισμός ενός ακόμα πιο μεγάλου αθροίσματος: του ορίου  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\nu} M^k = \sum_{k=0}^{\infty} M^k$ , το οποίο όταν υπάρχει ισούται με  $(I - M)^{-1}$ .

Όμως για τις μήτρες γειτνίασης, σχεδόν πάντα, το όριο  $\sum_{k=0}^{\infty} M^k$  δεν υπάρχει, διότι, για παράδειγμα, τα στοιχεία της μήτρας  $M^k$  είναι πιθανόν να μεγαλώνουν και αυτά πολύ γρήγορα καθώς μεγαλώνει το  $k$ .

Παρόλα αυτά, σταθμίζοντας τους δεσμούς με ένα βάρος  $\gamma < 1$  είναι δυνατόν να πετύχουμε την σύγκλιση του παραπάνω αθροίσματος. Η στάθμιση αυτή προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την μήτρα  $M$  επί  $\gamma < 1$ , έτσι κάθε διαδρομή μήκους  $\nu$  σταθμίζεται με  $\gamma^{\nu}$  αντί για  $1^{\nu} = 1$ , οπότε έχουμε την επόμενη παραλλαγή της Πρότασης 32 του Πορίσματος 33.

**Πρόταση 34.** α) Ο αριθμός των σταθμισμένων  $\nu_i - \nu_j$  διαδρομών μήκους  $\nu$  σε ένα γράφημα δεσμών ή τόξων  $G$  ισούται με τον στοιχείο  $(i, j)$  της μήτρας  $(\gamma M)^{\nu} = \gamma^{\nu} M^{\nu}$ .  
β) Ο αριθμός των σταθμισμένων  $\nu_i - \nu_j$  διαδρομών μήκους το πολύ  $\nu$  σε ένα γράφημα δεσμών ή τόξων  $G$  ισούται με τον στοιχείο  $(i, j)$  της μήτρας  $\sum_{k=0}^{\nu} (\gamma M)^k = \sum_{k=0}^{\nu} \gamma^k M^k$ .

Ο λόγος για τον οποίο συγκλίνει το άθροισμα  $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k M^k$  για κατάλληλο  $\gamma < 1$  είναι ότι σε ένα γράφημα με μέγιστο βαθμό  $\Delta$  το πλήθος των διαδρομών μήκους  $\nu$  που αρχίζουν από την κορυφή  $\nu_i$  φράσσεται<sup>1</sup> από το  $\Delta^{\nu}$ . Επομένως, αν για παράδειγμα, επιλέξουμε  $\gamma = \frac{1}{\Delta+1}$ , τότε κάθε στοιχείο της μήτρας  $\sum_{k=0}^{\infty} (\gamma M)^k$  φράσσεται από το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{\Delta+1}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{\Delta}{\Delta+1}} = \Delta + 1$ .

Με βάση αυτή την παρατήρηση μπορούμε να αποδείξουμε την επόμενη πρόταση:

**Πρόταση 35.** Έστω  $M$  η μήτρα γειτνίασης του γραφήματος  $G$ , στην οποία η μέγιστη ιδιοτιμή είναι μικρότερη από  $\lambda$ , τότε το σταθμισμένο άθροισμα των διαδρομών μεταξύ όλων των ζευγών κορυφών περιέχεται στην μήτρα  $(I - \frac{1}{\lambda}M)^{-1} - I$ , δηλαδή

$$K = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda}M\right)^k = (I - \frac{1}{\lambda}M)^{-1} - I$$

Το στοιχείο  $(i, j)$  της παραπάνω μήτρας  $K$  ονομάζεται **μέτρο Katz** (Katz measure) του δεσμού  $\{\nu_i, \nu_j\}$ , όσο μεγαλύτερο τόσο μεγαλύτερη η πιθανότητα δημιουργίας του δεσμού  $\{\nu_i, \nu_j\}$ . Ο αριθμός  $\frac{1}{\lambda}$  είναι παράμετρος και επιλέγεται αφενός για να υπάρχει σύγκλιση και αφετέρου για να υπάρχει καλή πρόβλεψη για τους πιθανούς νέους δεσμούς.

<sup>1</sup>Σε κάθε βήμα της διαδρομής έχουμε το πολύ  $\Delta$  επιλογές, άρα με  $\nu$  βήματα υπάρχουν το πολύ  $\Delta^{\nu}$  διαδρομές

Συγκεκριμένα ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

Δίδεται η μήτρα γειτνίασης  $M$  ενός γραφήματος δεσμών  $G = (V, E)$

- Αρχικά επιλέγεται ένα μικρό υποσύνολο  $E_0$  των δεσμών του γραφήματος ως σύνολο επαλήθευσης. Καθώς, επίσης και ένα σύνολο ζευγών του γραφήματος που δεν συνδέονται με δεσμό (που επίσης προστίθενται στο σύνολο επαλήθευσης).
- Θέτουμε 0 τις αντίστοιχες τιμές της μήτρας  $M$  που αντιστοιχούν στους δεσμούς του συνόλου επαλήθευσης, οπότε προκύπτει η μήτρα  $M'$ .
- Υπολογίζουμε την αντίστροφη της μήτρας  $I - \frac{1}{\lambda}M'$  για διαφορετικές τιμές του  $\lambda$  με κριτήριο το πόσο καλά προβλέπει τους δεσμούς του συνόλου επαλήθευσης  $E_0$ .
- Όταν έχει επιλεγεί το κατάλληλο  $\lambda$ , τότε υπολογίζουμε την αντίστροφη της μήτρας  $I - \frac{1}{\lambda}M$  (με όλους τους δεσμούς).
- Οι προβλεπόμενοι νέοι δεσμοί κατατάσσονται σε φθίνουσα σειρά με βάση τα στοιχεία της μήτρας  $(I - \frac{1}{\lambda}M)^{-1}$ .

Στην συνέχεια παρουσιάζεται μια υλοποίηση στην βιβλιοθήκη networkx του υπολογισμού του μέτρου Katz για τα ζεύγη κορυφών ενός γραφήματος (δεδομένου ότι έχουμε επιλέξει το βέλτιστο  $\lambda$ , το οποίο στην υλοποίηση επιλέγεται ίσο με την μέγιστη ιδιοτιμή +0.01) και παρουσιάζονται σε φθίνουσα σειρά τα πιθανά ζεύγη που θα συνδεθούν με νέο δεσμό.

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def find_katz_measure(G):
    #maxeigen is the maximum eigenvalue of G, due to symmetry of the adjacency matrix
    #maxeigen is real, hence the imaginary part is 0
    maxeigen = max(nx.adjacency_spectrum(G)).real
    phi = maxeigen + 0.01 #phi must be greater than maxeigen
    M = nx.adjacency_matrix(G) #FutureWarning: adjacency_matrix will return a scipy.
    #sparse array instead of a matrix in Networkx 3.0.
    A = (M**0-(1/(phi))*M).todense() #A = I - 1/phi M where max eigenvalue of G < phi
    KatzMatrix = np.linalg.inv(A) #KatzMatrix contains the Katz measures
    mean, sigma = 0, 0.00001
    #Katz matrix with noise in order to break ties that occur due to symmetry
    KatzMatrix = KatzMatrix + np.random.normal(mean, sigma, size=KatzMatrix.shape)
    #Find all possible new edges sorted according to their Katz measures
    ls = []
    nrows, ncols = KatzMatrix.shape
    for row in range(nrows):
        for col in range(row+1, ncols): #due to symmetry use upper triangular part
            if M[row, col] == 0: #only care for new edges
                #Warning: (row, col) do not coincide with node labels of a graph
                ls.append((KatzMatrix[row, col], (row, col)))

    ls.sort(reverse=True)
    dic = dict(ls)
    nodelist = list(G.nodes) #keeps the real node names
    for key in dic.keys():
        node1, node2 = dic[key]
```

```
print("The Katz measure of edge (" + nodelist[node1] + ", " + nodelist[node2] + ") is:",
      key,)
```

Η εκτέλεση του αλγορίθμου στο γράφημα μονοπάτι  $P_7$  (μονοπάτι με 7 κορυφές) δίνει τις εξής προβλέψεις:

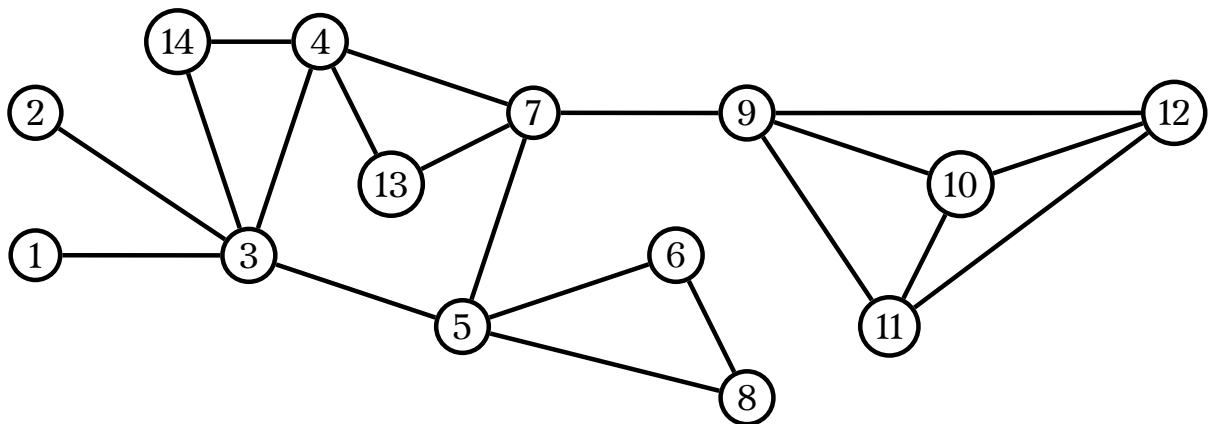
**Example 1**

```
G = nx.path_graph(7)
find_katz_measure(G)
```

Output:

```
The Katz measure of edge ( 2 4 ) is: 38.993082626119055
The Katz measure of edge ( 1 3 ) is: 32.50365841507673
The Katz measure of edge ( 3 5 ) is: 32.50365384252009
The Katz measure of edge ( 2 5 ) is: 29.55192667167553
The Katz measure of edge ( 1 4 ) is: 29.55191457606483
The Katz measure of edge ( 1 5 ) is: 22.39670962853473
The Katz measure of edge ( 3 6 ) is: 17.496161771593563
The Katz measure of edge ( 0 3 ) is: 17.4961388333677
The Katz measure of edge ( 0 2 ) is: 16.59634231620947
The Katz measure of edge ( 4 6 ) is: 16.59633854567883
The Katz measure of edge ( 2 6 ) is: 15.907313176164534
The Katz measure of edge ( 0 4 ) is: 15.90728019062902
The Katz measure of edge ( 0 5 ) is: 12.055774189282062
The Katz measure of edge ( 1 6 ) is: 12.055760081593043
The Katz measure of edge ( 0 6 ) is: 6.48941985693066
```

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα είναι το επόμενο γράφημα:



Η εκτέλεση του αλγορίθμου στο γράφημα αυτό δίνει τις παρακάτω προβλέψεις:

**Example 2**

```
G = nx.Graph()
V = range(1, 14)
E = [[1, 3], [2, 3], [3, 4], [3, 5], [3, 14], [4, 7], [4, 13], [4, 14], [5, 6], [5, 7], [5, 8], [6, 8],
      [7, 9], [7, 13], [9, 10], [9, 11], [9, 12], [10, 11], [10, 12], [11, 12]]
G.add_nodes_from(V)
G.add_edges_from(E)

pos = nx.layout.kamada_kawai_layout(G)
nx.draw_networkx(G, pos)
plt.savefig("images/digraph03b.eps")
plt.show()
find_katz_measure(G)
```

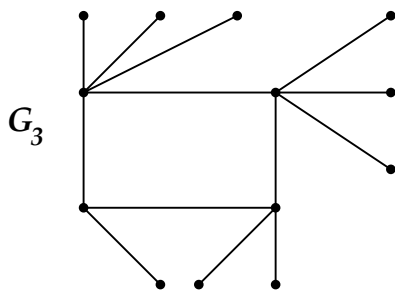
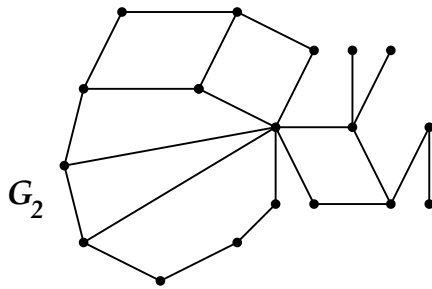
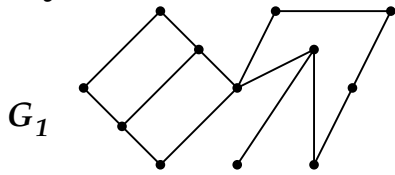
## Output:

The Katz measure of edge ( 4 9 ) is: 42.407828295826306  
The Katz measure of edge ( 3 9 ) is: 38.451034249754315  
The Katz measure of edge ( 7 12 ) is: 37.80732025756281  
The Katz measure of edge ( 7 10 ) is: 37.807307172658334  
The Katz measure of edge ( 7 11 ) is: 37.80730336232747  
The Katz measure of edge ( 3 7 ) is: 36.98637256573747  
The Katz measure of edge ( 5 9 ) is: 36.096968869405124  
The Katz measure of edge ( 4 10 ) is: 32.89712365424941  
The Katz measure of edge ( 4 11 ) is: 32.89711782326236  
The Katz measure of edge ( 4 12 ) is: 32.8971071206303  
The Katz measure of edge ( 4 5 ) is: 30.710953433689962  
The Katz measure of edge ( 3 12 ) is: 29.82770754993906  
The Katz measure of edge ( 3 10 ) is: 29.827698732839057  
The Katz measure of edge ( 3 11 ) is: 29.827691505136976  
The Katz measure of edge ( 5 10 ) is: 28.001572482551047  
The Katz measure of edge ( 5 11 ) is: 28.001571751322167  
The Katz measure of edge ( 5 12 ) is: 28.00156747810296  
The Katz measure of edge ( 9 13 ) is: 27.711312939413755  
The Katz measure of edge ( 9 14 ) is: 24.583856252866497  
The Katz measure of edge ( 7 14 ) is: 23.647405780755033  
The Katz measure of edge ( 12 13 ) is: 21.49656345357456  
The Katz measure of edge ( 11 13 ) is: 21.496561597003872  
The Katz measure of edge ( 10 13 ) is: 21.496545757135568  
The Katz measure of edge ( 3 13 ) is: 21.39584193134521  
The Katz measure of edge ( 5 13 ) is: 19.893833619244557  
The Katz measure of edge ( 11 14 ) is: 19.070486471059418  
The Katz measure of edge ( 10 14 ) is: 19.070477704873394  
The Katz measure of edge ( 12 14 ) is: 19.07045589589915  
The Katz measure of edge ( 5 14 ) is: 17.977322108838294  
The Katz measure of edge ( 8 9 ) is: 15.76902767333817  
The Katz measure of edge ( 6 9 ) is: 15.769020404216578  
The Katz measure of edge ( 6 7 ) is: 15.16837111349862  
The Katz measure of edge ( 7 8 ) is: 15.168365236055962  
The Katz measure of edge ( 13 14 ) is: 13.724343433672654  
The Katz measure of edge ( 4 8 ) is: 13.416159786726148  
The Katz measure of edge ( 4 6 ) is: 13.416152369460667  
The Katz measure of edge ( 3 6 ) is: 12.414640166226949  
The Katz measure of edge ( 3 8 ) is: 12.414617122616901  
The Katz measure of edge ( 6 12 ) is: 12.232552025013698  
The Katz measure of edge ( 8 11 ) is: 12.232550997828197  
The Katz measure of edge ( 6 11 ) is: 12.232550623037762  
The Katz measure of edge ( 8 10 ) is: 12.232547119056813  
The Katz measure of edge ( 8 12 ) is: 12.2325461249435  
The Katz measure of edge ( 6 10 ) is: 12.232542048818946  
The Katz measure of edge ( 2 9 ) is: 11.690418008065784  
The Katz measure of edge ( 1 9 ) is: 11.690411330737003  
The Katz measure of edge ( 2 7 ) is: 11.24512727359525  
The Katz measure of edge ( 1 7 ) is: 11.24511909670391  
The Katz measure of edge ( 1 4 ) is: 10.150735963672883  
The Katz measure of edge ( 2 4 ) is: 10.150730361250012  
The Katz measure of edge ( 2 10 ) is: 9.068643569526332  
The Katz measure of edge ( 2 12 ) is: 9.068639239471013  
The Katz measure of edge ( 2 11 ) is: 9.06863630028517  
The Katz measure of edge ( 1 10 ) is: 9.06863615782586  
The Katz measure of edge ( 1 12 ) is: 9.068629920666943

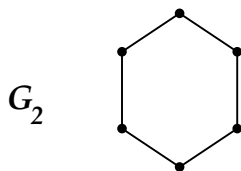
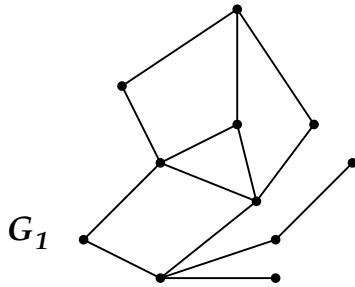
The Katz measure of edge ( 1 11 ) is: 9.068623406478643  
The Katz measure of edge ( 8 13 ) is: 8.690667624703268  
The Katz measure of edge ( 6 13 ) is: 8.690657114433838  
The Katz measure of edge ( 1 5 ) is: 8.640161644998408  
The Katz measure of edge ( 2 5 ) is: 8.640161527284398  
The Katz measure of edge ( 6 14 ) is: 7.853433787812736  
The Katz measure of edge ( 8 14 ) is: 7.853429765228951  
The Katz measure of edge ( 2 13 ) is: 6.505062895979592  
The Katz measure of edge ( 1 13 ) is: 6.505058789382233  
The Katz measure of edge ( 2 14 ) is: 6.012281871965988  
The Katz measure of edge ( 1 14 ) is: 6.01227340518822  
The Katz measure of edge ( 2 6 ) is: 3.774486114102366  
The Katz measure of edge ( 2 8 ) is: 3.774476240488068  
The Katz measure of edge ( 1 8 ) is: 3.7744733435922013  
The Katz measure of edge ( 1 6 ) is: 3.774467139339706  
The Katz measure of edge ( 1 2 ) is: 2.9261250517933344

### Ασκήσεις προς επίλυση

- (1) (\*) Έστω ένα  $d$ -κανονικό διμερές γράφημα  $G$  και  $X_1, X_2$  η διαμέριση των κορυφών του. Να δειχθεί ότι  $|X_1| = |X_2|$ .
- (2) Να εξετασθεί ποιο από τα παρακάτω γράφημα είναι διμερές.



- (3) Να επιβεβαιωθεί ο τύπος του Euler για τα παρακάτω γράφημα:



- (4) i) Να δειχθεί ότι κάθε γράφημα με 8 κορυφές και περισσότερους από 18 δεσμούς δεν είναι επίπεδο.  
 ii) Να δειχθεί ότι κάθε διμερές γράφημα με 12 κορυφές και περισσότερους από 20 δεσμούς δεν είναι επίπεδο.  
 (5) Να δειχθεί ότι σε ένα επίπεδο γράφημα  $G = (V, E)$  υπάρχει κορυφή με βαθμό μικρότερο ή ίσο του 5.

Λύση. Έστω ότι ο ελάχιστος βαθμός  $\delta(G)$  είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 6, τότε

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \geq \sum_{v \in V} \delta(G) \geq 6|V(G)| \Leftrightarrow 3|V| \leq |E|$$

Όμως, από το Πρόγραμμα 29 έχουμε ότι

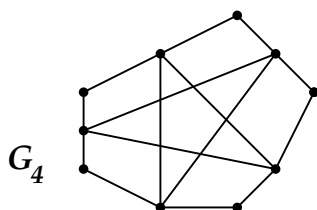
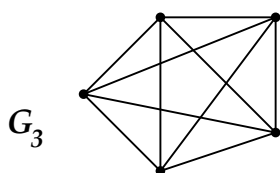
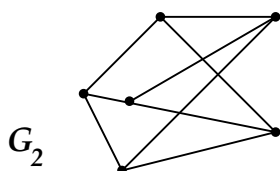
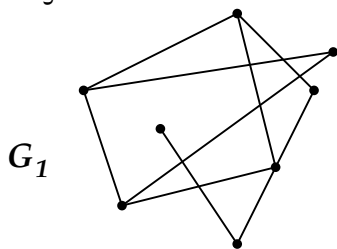
$$|E| \leq 3|V| - 6$$

Επομένως,

$$3|V| \leq 3|V| - 6$$

άτοπο. Άρα,  $\delta(G) \leq 5$ . □

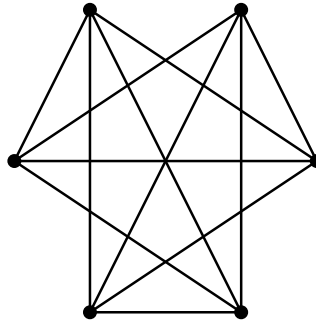
- (6) Να κατασκευασθεί ένα (απλό) επίπεδο γράφημα στο οποίο ο ελάχιστος βαθμός των κορυφών του είναι 5.  
 (7) Να εξετασθεί ποιο από τα παρακάτω γραφήματα είναι επίπεδο.



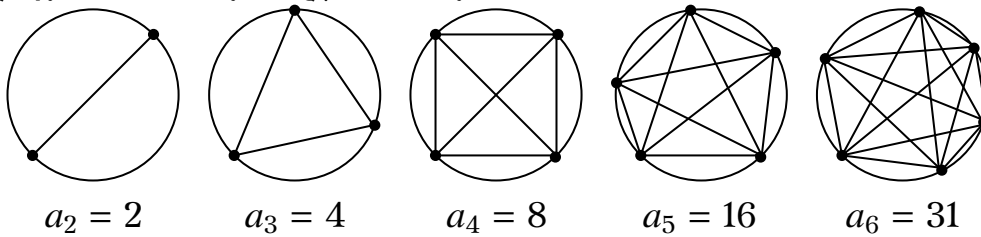
- (8) Να εξετασθεί αν κάποιο από τα παρακάτω γραφήματα είναι επίπεδο.  
 (α)  $K_6$ , (β)  $K_{5,2}$ , (γ)  $K_{4,3}$ .



(9) Να εξετασθεί αν το παρακάτω γράφημα είναι επίπεδο.

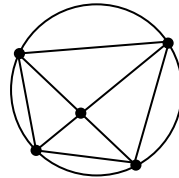


(10) Δίνονται  $n$  σημεία πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου σε γενική θέση,<sup>2</sup> Αν ενώσουμε ανά δύο όλα τα σημεία μεταξύ τους, να βρεθεί ο αριθμός  $a_n$  των περιοχών που δημιουργούνται μέσα στον κύκλο.



Λύση. Προκειμένου να δημιουργήσουμε ένα επίπεδο γράφημα θεωρούμε εκτός από τα  $n$  σημεία της περιφέρειας του κύκλου και τα επιπλέον σημεία που προκύπτουν από τις τομές των ευθύγραμμων τμημάτων που τα ενώνουν. Το γράφημα  $G$  που προκύπτει είναι ένα επίπεδο γράφημα.

Κάθε 4-άδα σημείων στην περιφέρεια του κύκλου ορίζει ένα μοναδικό σημείο τομής στο εσωτερικό του και αντιστρόφως.



Επομένως, ο αριθμός των επιπλέον σημείων ισούται με  $\binom{n}{4}$ .

Άρα,  $|V(G)| = n + \binom{n}{4}$ .

Επιπλέον, ο αριθμός των δεσμών  $|E(G)|$  του  $G$  ισούται με το μισό του αθροίσματος των βαθμών του. Τα  $n$  σημεία που βρίσκονται στην περιφέρεια του κύκλου έχουν το καθένα βαθμό  $n + 1$  (αφού το καθένα συνδέεται με ευθύγραμμο τμήματα με τα υπόλοιπα  $n - 1$  σημεία, καθώς επίσης συνδέεται πάλι με τα γειτονικά του μέσω των 2 τόξων της περιφέρειας του κύκλου). Τα επιπλέον  $\binom{n}{4}$  σημεία έχουν βαθμό 4 το καθένα.

Άρα, το συνολικό άθροισμα των βαθμών του  $G$  ισούται με

$$2|E(G)| = n(n + 1) + 4\binom{n}{4} \Leftrightarrow |E(G)| = \frac{1}{2}n(n + 1) + 2\binom{n}{4}$$

Τέλος, ο ζητούμενος αριθμός περιοχών  $a_n$  ισούται με  $|F(G)| - 1$  (αφαιρούμε την εξωτερική έδρα του γραφήματος  $G$ ).

<sup>2</sup>Υπενθυμίζεται ότι ένα σύνολο σημείων βρίσκεται σε γενική θέση αν τα ευθύγραμμο τμήματα που τα ενώνουν δεν τέμνονται ανά 3 στο ίδιο σημείο.

Άρα, από τον τύπο του Euler έχουμε ότι

$$|F(G)| = |E(G)| - |V(G)| + 2 \Leftrightarrow$$

$$a_n + 1 = \frac{1}{2}n(n+1) + 2\binom{n}{4} - n - \binom{n}{4} + 2 \Leftrightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{2}n(n-1) + \binom{n}{4} + 1$$

Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός  $a_n$  ισούται με

$$a_n = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1.$$

Πράγματι,

$$a_2 = \binom{2}{4} + \binom{2}{2} + 1 = 0 + 1 + 1 = 2$$

$$a_3 = \binom{3}{4} + \binom{3}{2} + 1 = 0 + 3 + 1 = 4$$

$$a_4 = \binom{4}{4} + \binom{4}{2} + 1 = 1 + 6 + 1 = 8$$

$$a_5 = \binom{5}{4} + \binom{5}{2} + 1 = 5 + 10 + 1 = 16$$

$$a_6 = \binom{6}{4} + \binom{6}{2} + 1 = 15 + 15 + 1 = 31$$

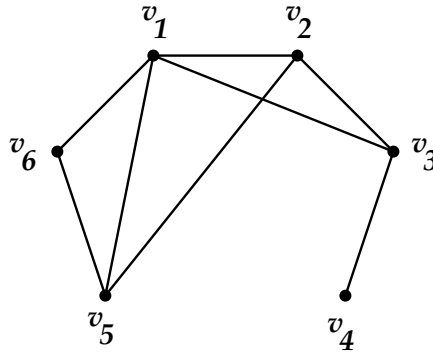
$$a_7 = \binom{7}{4} + \binom{7}{2} + 1 = 35 + 21 + 1 = 57, \text{ κ.ο.κ.} \quad \square$$

- (11) Να βρεθεί ο αριθμός διασταυρώσεων του  $K_6$ . Να επαληθευθεί το αποτέλεσμα.
- (12) (\*) Ναδειχθεί ότι  $cr(K_{3,4}) = 2$ .
- (13) Να γραφεί το γράφημα με μήτρα:

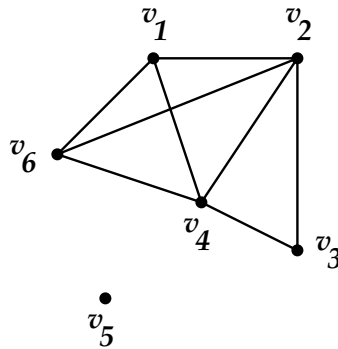
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ςδ δ

(14) Να γραφεί η μήτρα και οι λίστες γειτονικότητας του γραφήματος



(15) Να ορισθεί η μήτρα και η απεικόνιση του γραφήματος



(16) Δίδεται ότι η απεικόνιση του γραφήματος  $G$  είναι η ακόλουθη:  $\Gamma : X \rightarrow X$ , με

$$\Gamma(v_1) = \{v_2, v_5\}$$

$$\Gamma(v_2) = \{v_1, v_5, v_6\}$$

$$\Gamma(v_3) = \{v_4, v_5\}$$

$$\Gamma(v_4) = \{v_3, v_5, v_6, v_7\}$$

$$\Gamma(v_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$\Gamma(v_6) = \{v_2, v_4, v_7\}$$

$$\Gamma(v_7) = \{v_4, v_6\}$$

i) Να βρεθούν τα  $\Gamma^2(v_1)$ ,  $\Gamma^3(v_7)$ .

ii) Να γραφεί η μήτρα του  $G$ .

iii) Να σχεδιασθεί το  $G$ .

(17) Να γραφεί το γράφημα με συνάρτηση κόστους και το το 4-γράφημα δεσμών που έχουν μήτρα:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$