ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΜΣ “ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ -
ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΧΝΗΤΗΣ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗΣ”

Σημειώσεις του μαθήματος

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Κ. Μανές - Ι. Τασούλας

Σημειώσεις διαλέξεων 6

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2023

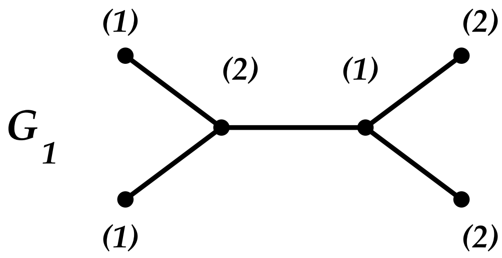
Οι παρούσες σημειώσεις βασίζονται σε προηγούμενες σημειώσεις του μαθήματος που έχουν συγγράψει ο Καθηγητής κ. Αριστείδης Σαπουνάκης και ο Καθηγητής κ. Παναγιώτης-Γεώργιος Τσικούρας.

15. ΧΡΩΜΑΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

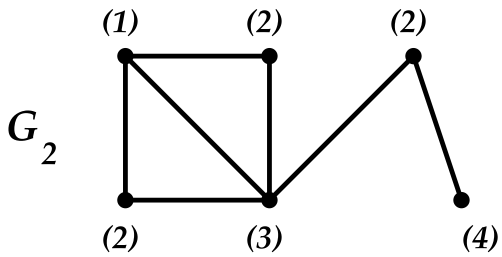
Ένα γράφημα ονομάζεται r-**χρωματικό** (r-chromatic) αν οι κορυφές του μπορούν να "χρωματισθούν" με r διαφορετικά χρώματα, έτσι ώστε κάθε δύο ενωμένες κορυφές να έχουν διαφορετικό χρώμα. Κάθε ανάθεση χρωμάτων στις κορυφές με την παραπάνω ιδιότητα ονομάζεται **(έγκυρος) χρωματισμός** ((proper) coloring) του G.

Ο μικρότερος φυσικός r για τον οποίο το γράφημα είναι r-χρωματικό ονομάζεται **χρωματικός αριθμός** (chromatic number) του G, και συμβολίζεται συνήθως με $\chi(G)$.

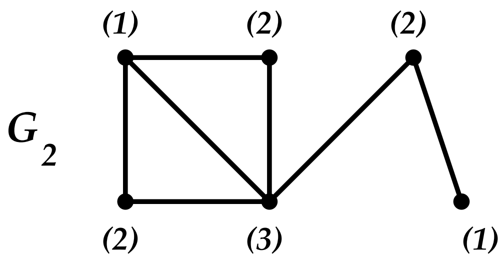
Παράδειγματα :



Το γράφημα G_1 είναι 2-χρωματικό με $\chi(G_1) = 2$.



Το γράφημα G_2 είναι 4-χρωματικό, αλλά $\chi(G_2) = 3$ αφού είναι και 3-χρωματικό (αλλά όχι 2-χρωματικό).



Παρατηρήσεις

(1) Προφανώς, για κάθε γράφημα G με n κορυφές ισχύει ότι $1 \leq \chi(G) \leq n$. Ειδικότερα, για κάθε $n \geq 1$, ισχύει ότι $\chi(K_n) = n$ και $\chi(K_n^c) = 1$.
Επίσης, $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ άρτιος}, \\ 3, & n \text{ περιττός}. \end{cases}$

(2) Αν H είναι υπογράφημα του G τότε $\chi(H) \leq \chi(G)$.
Η παρατήρηση αυτή είναι προφανής αλλά χρησιμοποιείται για να βρίσκουμε κάτω φράγματα για τον χρωματικό αριθμό. Για παράδειγμα, αν το G περιέχει

ένα πλήρες υπογράφημα τάξης k, τότε $\chi(G) \geq k$. Επίσης, αν το G περιέχει ένα κύκλο περιττού μήκους, τότε $\chi(G) \geq 3$.

Πρόταση 36. *Ένα γράφημα G έχει χρωματικό αριθμό 2 ανν είναι διμερές.*

Παρατήρηση. Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις γνωρίζουμε πότε ένα γράφημα έχει χρωματικό αριθμό 1, 2 και n. Δεν γνωρίζουμε όμως κάποια αντίστοιχη πρόταση που να χαρακτηρίζει τα γραφήματα με χρωματικό αριθμό 3. Επίσης, στην γενική περίπτωση, ο υπολογισμός του χρωματικού αριθμού ενός γραφήματος είναι υπολογιστικά δύσκολος. Το πρόβλημα του χρωματισμού στην γενική περίπτωση είναι NP-complete.

Στην επόμενη πρόταση δίνεται ένα άνω φράγμα για τον χρωματικό αριθμό ενός γραφήματος G με βάση τον μέγιστο βαθμό $\Delta(G)$ των κορυφών του.

Πρόταση 37. *Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

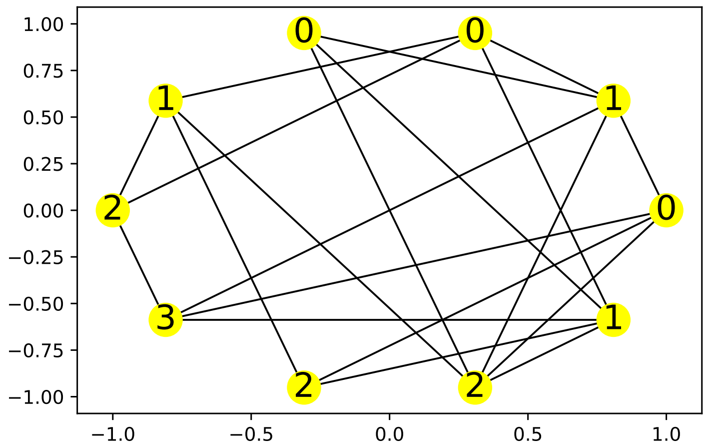
Απόδειξη. Έστω $|V(G)| = n$. Αριθμούμε τις κορυφές του G με οποιαδήποτε σειρά. Χρωματίζουμε την κορυφή v_1 με το χρώμα 1. Στην συνέχεια, αν η v_2 είναι γειτονική με την v_1 την χρωματίζουμε με το χρώμα 2, αλλιώς την χρωματίζουμε με το χρώμα 1. Γενικότερα, έστω ότι έχουμε ήδη χρωματίσει τις κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_k$, όπου $1 \leq k < n$, με χρώματα από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$. Χρωματίζουμε την κορυφή v_{k+1} με το ελάχιστο χρώμα που δεν έχει χρησιμοποιηθεί για τους γείτονές της. Επειδή, $d(v_{k+1}) \leq \Delta(G)$ τουλάχιστον ένα χρώμα είναι διαθέσιμο για την v_{k+1}. Άρα, οι κορυφές του G μπορούν να χρωματισθούν χρησιμοποιώντας το πολύ $\Delta(G)+1$ χρώματα. □

Η απόδειξη της Πρότασης 37 δίνει έναν άπληστο αλγόριθμο για τον χρωματισμό ενός γραφήματος G χρησιμοποιώντας το πολύ $\Delta(G) + 1$ χρώματα. Η βιβλιοθήκη `networkx` διαθέτει την μέθοδο `greedy_color(G,strategy='largest_first')` η οποία υλοποιεί την παραπάνω ιδέα ταξινομώντας τις κορυφές με βάση κάποια στρατηγική, π.χ. σε φθίνουσα σειρά με βάση τους βαθμούς τους, και επιστρέφει ένα λεξικό που περιέχει έναν χρωματισμό. Μια ανεξάρτητη υλοποίηση δίδεται παρακάτω:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G = nx.gnm_random_graph(10,20)

#finds the mininum excluded value of a SET of integers
def mex(X):
    for i in range(0,len(X)):
        if i not in X:
            return i
    return len(X)

#empty dictionary
colors = {}
#assign a large default (to be updated) color to all nodes
for u in G:
    colors[u] = len(G)
```

```
#greedy algorithm for coloring using at most D(G) + 1 colors
for u in G:
    nbrs = list(G[u])
    nbrs_colors = set([colors[v] for v in nbrs])
    colors[u] = mex(nbrs_colors)

print(colors.keys())
print(colors.values())

pos = nx.layout.circular_layout(G)
nx.draw_networkx(G,pos,with_labels=True,labels=colors,font_size=18,node_color='yellow
    ')
plt.show()
```

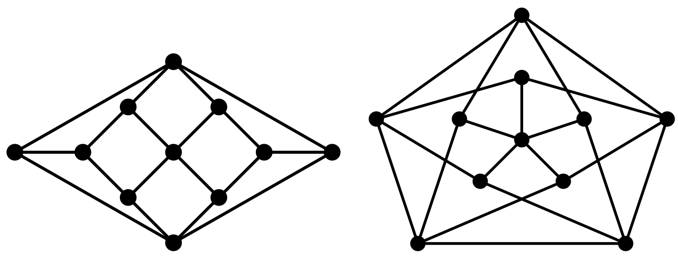
Output:



Όπως είδαμε, υπάρχουν γραφήματα για τα οποία $\chi(G) = \Delta(G)+1$. Για παράδειγμα $\chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$, και $\chi(C_r) = 3 = \Delta(C_r) + 1$ όπου $r \geq 3$ περιττός. Ο Rowland Leonard Brooks απέδειξε ότι αυτά είναι τα μόνα συνεκτικά γραφήματα που έχουν αυτή την ιδιότητα.

Πρόταση 38 (Brooks, 1941). *Αν G είναι ένα συνεκτικό γράφημα με $G \neq K_n$ και $G \neq C_r$, όπου $r \geq 3$ περιττός, τότε $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Άσκηση 1. *Να βρεθεί ο χρωματικός αριθμός των παρακάτω γραφημάτων:*



γράφημα Herschel *γράφημα Grotzsch*

Το πρόβλημα του χρωματισμού των κορυφών ενός γραφήματος ανακύπτει με φυσικό τρόπο κάθε φορά που προσπαθούμε να αντιστοιχίσουμε πόρους υπό την παρουσία διενέξεων.[3]

(1) (Προγραμματισμός διεργασιών) Υποθέστε ότι έχουμε μια συλλογή n διεργασιών σε ένα σύστημα που μπορεί να εκτελεί πολλές εργασίες ταυτόχρονα, όμως ορισμένα ζευγάρια διεργασιών δεν μπορούν να προγραμματισθούν για την ίδια χρονική περίοδο επειδή χρειάζονται και τα δύο ένα συγκεκριμένο πόρο του συστήματος. Για τα επόμενα k χρονικά βήματα του συστήματος, θα θέλαμε να προγραμματίσουμε κάθε διεργασία ώστε να εκτελεστεί σε τουλάχιστον έναν από αυτούς τους πόρους. Είναι δυνατόν αυτό; Αν κατασκευάσουμε ένα γράφημα G με κορυφές τις διεργασίες, συνδέοντάς τις με δεσμό όταν παρουσιάζουν διένεξη, τότε ένας χρωματισμός με k χρώματα του G αντιπροσωπεύει ένα χρονοδιάγραμμα των διεργασιών χωρίς διενέξεις. Όλες οι κορυφές που έχουν το χρώμα j μπορούν να προγραμματισθούν στο βήμα j, και δεν θα υπάρξει ποτέ ανταγωνισμός για κανένα πόρο.

(2) (Μεταγλώττιση κώδικα) Υποθέστε ότι μεταγλωττίζουμε ένα πρόγραμμα και προσπαθούμε να αποδώσουμε κάθε μεταβλητή σε ένα από k καταχωρητές (registers). Αν δύο μεταβλητές είναι ταυτόχρονα σε χρήση μια δεδομένη χρονική στιγμή, τότε δεν μπορούν να αντιστοιχιστούν στον ίδιο καταχωρητή. (Διαφορετικά, η μια θα καταλήξει να αντικαταστήσει την άλλη.) Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα γράφημα G με κορυφές τις μεταβλητές, συνδέοντας τις μεταβλητές με ένα δεσμό αν χρησιμοποιούνται και οι δύο την ίδια χρονική στιγμή. Ένας χρωματισμός του G με k χρώματα αντιστοιχεί σε έναν ασφαλή τρόπο αντιστοίχισης μεταβλητών στους καταχωρητές. Όλες οι κορυφές που έχουν το χρώμα j μπορούν να αντιστοιχιστούν στον καταχωρητή j, αφού ανά δύο δεν χρησιμοποιούνται την ίδια χρονική στιγμή.

(3) (Απόδοση συχνοτήτων σε συσκευές ασύρματης επικοινωνίας) Υποθέστε ότι θέλουμε να αποδώσουμε ένα από τα k διαθέσιμα μήκη κύματος μετάδοσης σε κάθε μια από n συσκευές. Αν όμως δύο συσκευές είναι αρκετά κοντά η μία στην άλλη, τότε θα πρέπει να τους αποδοθούν διαφορετικά μήκη κύματος (συχνοτήτων) ώστε να αποφευχθούν οι παρεμβολές. Για να το αντιμετωπίσουμε κατασκευάζουμε ένα γράφημα G με κορυφές τις συσκευές, συνδέοντας δύο κορυφές αν είναι αρκετά κοντά ώστε να παρεμβάλλεται η μια στην άλλη. Ένας χρωματισμός του G με k χρώματα είναι μια απόδοση συχνοτήτων έτσι ώστε κάθε κόμβος στον οποίο αποδίδεται το ίδιο μήκος κύματος να είναι αρκετά μακριά ώστε να μην δημιουργεί πρόβλημα παρεμβολών.

[3] Τα παραδείγματα προέρχονται από την ελληνική έκδοση του βιβλίου [;].

Άσκηση 2. *Οκτώ χημικές ουσίες $c_1, c_2, \ldots, c_8$ πρόκειται να μεταφερθούν με αεροπλάνο από μια τοποθεσία σε μια άλλη. Το κόστος μεταφοράς εξαρτάται από τον αριθμό των συσκευασιών που θα χρησιμοποιηθούν για την αποστολή. Το κόστος αποστολής μια συσκευασίας είναι 100 ευρώ. Για κάθε επιπλέον συσκευασία το κόστος προσαυξάνεται κατά 70 ευρώ. Κάποιες χημικές ουσίες αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και είναι επικίνδυνο να μεταφερθούν στην ίδια συσκευασία. Οι χημικές ουσίες που αλληλεπιδρούν είναι οι εξής:*

$$\begin{array}{lll} c_1 : c_2, c_5, c_6 & c_2 : c_1, c_3, c_5, c_7 & c_3 : c_2, c_4, c_7 \\ c_4 : c_3, c_6, c_7, c_8 & c_5 : c_1, c_2, c_6, c_7, c_8 & c_6 : c_1, c_4, c_5, c_8 \\ c_7 : c_2, c_3, c_4, c_5, c_8 & c_8 : c_4, c_5, c_6, c_7. & \end{array}$$

Ποιό είναι το ελάχιστο κόστος αποστολής των οκτώ χημικών ουσιών και με ποιά τοποθέτηση στις συσκευασίες επιτυγχάνεται αυτό;

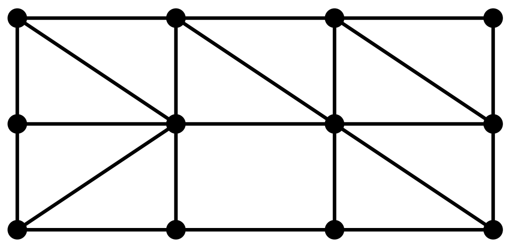
Χρωματικός αριθμός επίπεδων γραφημάτων.

Μετά από περισσότερο από 100 χρόνια προσπαθειών αποδείχθηκε η επόμενη πρόταση σχετικά με τον χρωματικό αριθμό των επίπεδων γραφημάτων.

Πρόταση 39 (Appel, Haken, Koch, 1976). *Αν G είναι επίπεδο γράφημα, τότε $\chi(G) \leq 4$.*

Η απόδειξη των Appel, Haken και Koch δημιούργησε διαμάχες στην εποχή της: Ενώ η δομή της απόδειξης είναι μια απλή επαγωγή ως προς τον αριθμό των εδρών του γραφήματος, το βήμα της επαγωγής περιλαμβάνει σχεδόν δύο χιλιάδες πολύπλοκες περιπτώσεις και η επαλήθευση αυτών των περιπτώσεων έπρεπε να πραγματοποιηθεί από υπολογιστή. Αυτό δεν ήταν ικανοποιητικό αποτέλεσμα για τους περισσότερους μαθηματικούς διότι ενώ έλπιζαν για μια απόδειξη που θα τους εξηγούσε γιατί ισχύει το αποτέλεσμα, αντί γι' αυτό πήραν μια ανάλυση περιπτώσεων με τεράστια πολυπλοκότητα. Το πρόβλημα της εύρεσης μια σχετικά σύντομης και κατανοητής απόδειξης είναι ακόμα ανοιχτό.

Άσκηση 3. *Να βρεθεί ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος*



(Υπόδειξη: Να δειχθεί ότι 3 χρώματα δεν επαρκούν για να χρωματίσουν το γράφημα.)

Χρωματικό πολυώνυμο.

Έστω G ένα γράφημα δεσμών. Ο αριθμός των διαφορετικών χρωματισμών του G με λ χρώματα συμβολίζεται με $\chi_G(\lambda)$ ή $\chi(G;\lambda)$.

Για παράδειγμα, $\chi(K_n;\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)$. Επίσης, $\chi(K_n^c;\lambda) = \lambda^n$. Προφανώς, για κάθε $\lambda < \chi(G)$ ισχύει ότι $\chi(G;\lambda) = 0$.

Αποδεικνύεται ότι για κάθε γράφημα G με n κορυφές και m δεσμούς ο αριθμός $\chi(G;\lambda)$ είναι πολυώνυμο του λ με βαθμό n. Ο συντελεστής του λ^n ισούται με 1, ο συντελεστής του λ^{n-1} ισούται με $-m$, ο συντελεστής του λ^{n-2} είναι ίσος με $m(m-1)/2$ μείον τον αριθμό των τριγώνων του G και ότι το πολυώνυμο δεν έχει σταθερό όρο.

Άμεσα προκύπτει ότι αν ένα γράφημα G αποτελείται από k συνεκτικές συνιστώσες G_1, G_2, …, G_k τότε $\chi(G;\lambda) = \chi(G_1;\lambda)\chi(G_2;\lambda)\cdots\chi(G_k;\lambda)$.

Πρόταση 40. *Να δειχθεί ότι για κάθε δένδρο*[4] *T με n κορυφές ισχύει ότι*

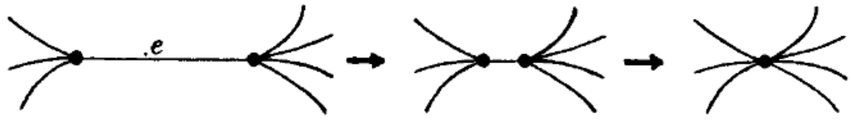
$$\chi(T;\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς τον αριθμό n των κορυφών του T. Για $n = 1$ ο τύπος ισχύει, αφού $\chi(T;\lambda) = \lambda$. Έστω ότι ισχύει για κάθε δένδρο T με $n-1$ κορυφές δηλαδή $\chi(T;\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-2}$.

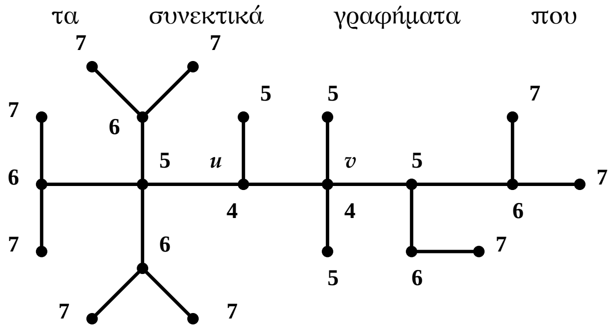
Κάθε δένδρο T με n κορυφές περιέχει τουλάχιστον μια κορυφή βαθμού 1 (φύλλο). Σβήνοντας την κορυφή αυτή προκύπτει ένα δένδρο T' με $n-1$ κορυφές το οποίο μπορεί να χρωματισθεί με $\lambda(\lambda-1)^{n-2}$ τρόπους. Αν προσθέσουμε ξανά την κορυφή που σβήσαμε τότε αυτή έχει $\lambda-1$ τρόπους να χρωματισθεί, οπότε συνολικά έχουμε $\lambda(\lambda-1)^{n-1}$ τρόπους χρωματισμού του T. □

Παρατηρήστε ότι όλα τα δένδρα με n κορυφές, ανεξάρτητα από τον τρόπο που συνδέονται αυτές, έχουν τον ίδιο αριθμό χρωματισμών με λ χρώματα.

Έστω $G = (V, E)$ και $e \in E$. Ορίζουμε δύο γραφήματα G'_e και G''_e με σύνολο δεσμών $E(G) \setminus \{e\}$. Το πρώτο γράφημα G'_e προκύπτει από το G αφαιρώντας τον δεσμό e. Το δεύτερο γράφημα G''_e προκύπτει από το G ταυτίζοντας τα άκρα του δεσμού e και αφαιρώντας τον e. Η πράξη αυτή ονομάζεται **σύνθλιψη** (contraction) του δεσμού e.



[4] Δένδρα ονομάζονται τα συνεκτικά γραφήματα που δεν έχουν κύκλους.



Θα μελετήσουμε τα δένδρα αναλυτικά σε επόμενες διαλέξεις.

Μπορούμε να υπολογίσουμε το χρωματικό πολυώνυμο ενός γραφήματος αναδρομικά χρησιμοποιώντας την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 41. *Έστω G ένα γράφημα δεσμών και $e \in E(G)$. Τότε*

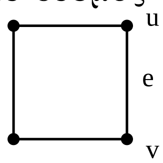
$$\chi(G;\lambda) = \chi(G'_e;\lambda) - \chi(G''_e;\lambda).$$

Απόδειξη. Αν e είναι ένας δεσμός του G μπορούμε να διαμερίσουμε τους χρωματισμούς του G'_e σε δύο κατηγορίες: Αυτούς που τα δύο άκρα του έχουν διαφορετικά χρώματα (οπότε είναι και έγκυροι χρωματισμοί του G) και σ' αυτούς που τα δύο άκρα του έχουν το ίδιο χρώμα (οπότε είναι έγκυροι χρωματισμοί του G''_e). Άρα, $\chi(G'_e;\lambda) = \chi(G;\lambda) + \chi(G''_e;\lambda)$ □

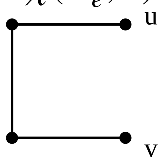
Άσκηση 4. *Να υπολογισθεί το χρωματικό πολυώνυμο του γραφήματος C_4.*

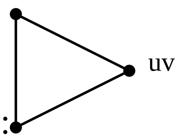
Απάντηση. $\chi(C_4;\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda$.

Λύση. Έστω e ένας οποιοσδήποτε δεσμός του C_4



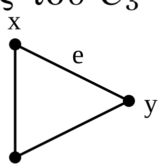
τότε έχουμε ότι $\chi(C_4;\lambda) = \chi(G'_e;\lambda) - \chi(G''_e;\lambda)$ όπου

G'_e: 

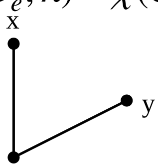
και $G''_e = C_3$: 

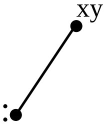
Επειδή το G'_e είναι δένδρο με 4 κορυφές έπεται ότι $\chi(G'_e;\lambda) = \lambda(\lambda-1)^3$.

Έστω e ένας οποιοσδήποτε δεσμός του C_3



τότε έχουμε ότι $\chi(C_4;\lambda) = \chi(G'_e;\lambda) - \chi(G''_e;\lambda)$ όπου

G'_e: 

και G''_e: 

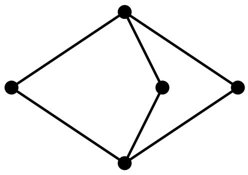
Επειδή τα G'_e και G''_e είναι δένδρα με 3 και 2 κορυφές αντίστοιχα έπεται ότι $\chi(G'_e;\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2$ και $\chi(G''_e;\lambda) = \lambda(\lambda-1)$.

Άρα, τελικά, έχουμε ότι

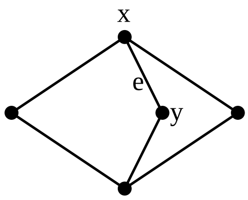
$$\begin{aligned}\chi(C_4;\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^3 - (\lambda(\lambda-1)^2 - \lambda(\lambda-1)) = \lambda(\lambda-1)\left((\lambda-1)^2 - (\lambda-1-1)\right)\\ &= \lambda(\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)\\ &= \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda\end{aligned}$$

Επομένως, υπάρχουν $\chi(C_4;10) = 10^4 - 4\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 - 3\cdot 10 = 6570$ τρόποι χρωματισμού του C_4 με 10 χρώματα. □

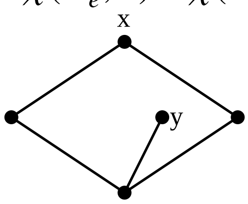
Άσκηση 5. *Να υπολογισθεί το χρωματικό πολυώνυμο του γραφήματος G*

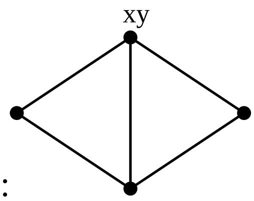


Λύση. Έστω e ο παρακάτω δεσμός του γραφήματος G



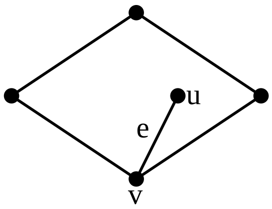
τότε έχουμε ότι $\chi(G;\lambda) = \chi(G'_e;\lambda) - \chi(G''_e;\lambda)$ όπου

$G_1 = G'_e$: 

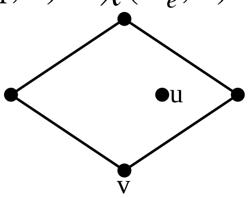
και $G_2 = G''_e$: 

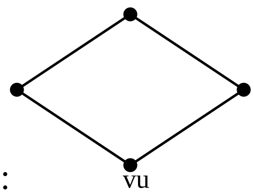
Για καθένα από τα παραπάνω δύο γραφήματα G_1, G_2 έχουμε αντίστοιχα:

- Έστω e ο παρακάτω δεσμός του γραφήματος G_1



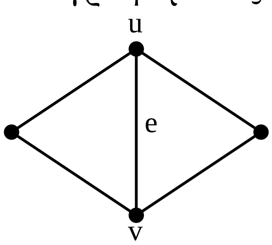
τότε έχουμε ότι $\chi(G_1;\lambda) = \chi(G'_e;\lambda) - \chi(G''_e;\lambda)$ όπου

$G'_e = C_4 \cup K_1$: 

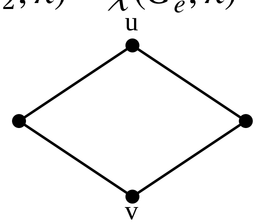
και $G''_e = C_4$: 

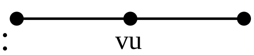
οπότε $\chi(G_1;\lambda) = \chi(K_1;\lambda)\chi(C_4;\lambda) - \chi(C_4;\lambda) = (\lambda - 1)\chi(C_4;\lambda)$

- Έστω e ο παρακάτω δεσμός του γραφήματος G_2



τότε έχουμε ότι $\chi(G_2;\lambda) = \chi(G'_e;\lambda) - \chi(G''_e;\lambda)$ όπου

$G'_e = C_4$: 

και G''_e: 

οπότε $\chi(G_2;\lambda) = \chi(C_4;\lambda) - \lambda(\lambda - 1)^2$.

Άρα, τελικά, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\chi(G;\lambda) &= (\lambda-1)\chi(C_4;\lambda) - \chi(C_4;\lambda) + \lambda(\lambda-1)^2 \\
&= (\lambda-2)\lambda(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+3) + \lambda(\lambda-1)^2
\end{aligned}
$$

Για παράδειγμα, υπάρχουν $\chi(G;10) = 8\cdot 10\cdot 9\cdot(10^2 - 10\cdot 10 + 3) + 10\cdot 9^2 = 53370$ τρόποι χρωματισμού του G με 10 χρώματα. □

Άσκηση 6 (*). *Να υπολογισθεί το χρωματικό πολυώνυμο του κύκλου C_n, $n \geq 3$.*

Απάντηση. $\chi(C_n;\lambda) = (\lambda-1)^n + (-1)^n(\lambda-1)$, $n \geq 3$.

Άσκηση 7. *Να δειχθεί ότι για κάθε γράφημα G ισχύει ότι*

$$\chi(K_1 + G;\lambda) = \lambda\cdot\chi(G;\lambda-1).$$

Άσκηση 8. *Να υπολογισθεί το χρωματικό πολυώνυμο του "τροχού" W_n, $n \geq 3$, (ο οποίος προκύπτει από το C_n προσθέτοντας μια νέα κορυφή η οποία ενώνεται με όλες τις κορυφές του κύκλου C_n).*
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις προηγούμενες δύο ασκήσεις)

Απάντηση. $\chi(W_n;\lambda) = \lambda(\lambda-2)^n + (-1)^n\lambda(\lambda-2)$, $n \geq 3$.

Άσκηση 9. *Να δειχθεί ότι για κάθε ζεύγος γραφημάτων G, H ισχύει ότι*

$$\chi(G \cup H;\lambda) = \chi(G;\lambda)\chi(H;\lambda).$$

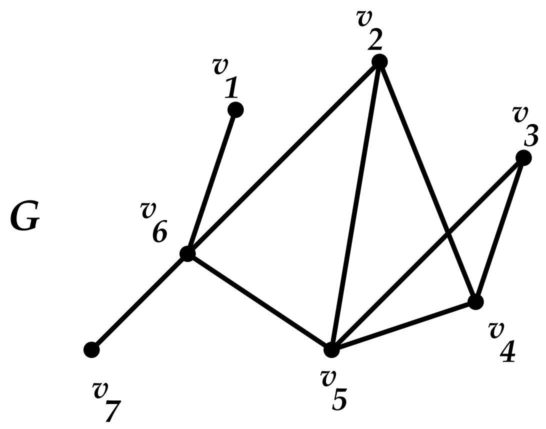
16. ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ - ΚΑΛΥΨΗ

Ένα σύνολο κορυφών $A \subseteq V$ σε ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται **ανεξάρτητο** (independent) ανν

$$\text{για κάθε } v, u \in A \text{ ισχύει ότι } \{v, u\} \notin E$$

(δηλαδή αν οποιεσδήποτε δύο κορυφές του δεν συνδέονται μεταξύ τους). Τα στοιχεία του A λέγονται **ανεξάρτητες** κορυφές. Ο μέγιστος αριθμός ανεξάρτητων κορυφών του G λέγεται **δείκτης ανεξαρτησίας κορυφών** του G.

Παράδειγμα: Έστω το γράφημα



Το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ δεν είναι ανεξάρτητο, διότι οι κορυφές v_3, v_4 συνδέονται στο G. Το σύνολο $\{v_1, v_5, v_7\}$ είναι ανεξάρτητο, αλλά ο δείκτης ανεξαρτησίας κορυφών του G είναι 4, αφού και το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3, v_7\}$ είναι ανεξάρτητο, (ενώ δεν υπάρχει ανεξάρτητο υποσύνολο του V με περισσότερα στοιχεία).

Πρόταση 42. *Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών και $A \subseteq V$.*

i). Το A είναι ανεξάρτητο στο G αν και μόνο αν τα στοιχεία του αποτελούν τις κορυφές μιας κλίκας του G^c.

ii). Ο δείκτης ανεξαρτησίας κόμβων του G είναι ίσος με το μέγιστο μέγεθος κλίκας του G^c.

Απόδειξη.

i). Αν το A είναι ανεξάρτητο τότε για κάθε $v, u \in A$ ισχύει ότι $\{v, u\} \notin E(G)$ επομένως $\{v, u\} \in E(G^c)$. Άρα, το σύνολο A αποτελεί κλίκα του G^c, και αντιστρόφως.

ii). Αφού κάθε ανεξάρτητο σύνολο κορυφών A του G είναι κλίκα του G^c και αντιστρόφως, προφανώς κάθε μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο κορυφών του G αποτελεί μέγιστη κλίκα του G^c. □

Κάλυμμα από κορυφές (vertex cover) ενός γραφήματος δεσμών $G = (V, E)$ ονομάζεται ένα σύνολο κορυφών $B \subseteq V$, ανν

$$\text{για κάθε } e \in E, \text{ υπάρχει } v \in B \text{ τέτοια ώστε } v \in e,$$

δηλαδή κάθε δεσμός του G καλύπτεται από (τουλάχιστον) μια κορυφή του B. Ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων σε ένα κάλυμμα από κορυφές ονομάζεται **δείκτης κάλυψης** του G.

Παράδειγμα: Για το προηγούμενο γράφημα G, το σύνολο $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ δεν είναι κάλυμμα από κορυφές, αφού ο δεσμός $\{v_6, v_7\}$ δεν καλύπτεται από καμία κορυφή του B_1.

Το σύνολο $B_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_6\}$ είναι ένα κάλυμμα από κορυφές, αλλά ο δείκτης κάλυψης του G είναι 3, αφού και το σύνολο $\{v_4, v_5, v_6\}$ είναι ένα κάλυμμα από κορυφές του G με 3 στοιχεία, (ενώ δεν υπάρχει κάλυμμα από κορυφές του G με λιγότερα στοιχεία).

Πρόταση 43. *Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών και $A \subseteq V$.*

i) Το A είναι ανεξάρτητο αν και μόνο αν το $V \setminus A$ είναι κάλυμμα από κορυφές του G.

ii) Το άθροισμα του δείκτη ανεξαρτησίας και του δείκτη κάλυψης του G ισούται με $|V|$.

Απόδειξη.

i) Έστω A ένα ανεξάρτητο σύνολο κορυφών του G, τότε κανένας δεσμός του G δεν περιέχει και τα δύο άκρα του στο A, άρα κάθε δεσμός του G έχει τουλάχιστον ένα από τα δύο άκρα του στο σύνολο $V \setminus A$, δηλαδή το σύνολο $V \setminus A$ είναι κάλυμμα από κορυφές του G. Αντίστροφα, αν το σύνολο B είναι κάλυμμα από κορυφές του G, τότε δεν υπάρχει δεσμός του G που να έχει και τα δύο άκρα του στο $V \setminus B$, διότι τότε δεν θα καλύπτονταν από το B, άρα το σύνολο $V \setminus B$ είναι ανεξάρτητο σύνολο κορυφών του G.

ii) Αν A είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο κορυφών του G τότε το $V \setminus A$ είναι ένα κάλυμμα κορυφών του G και αντιστρόφως. Άρα, σε κάθε μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο κορυφών του G αντιστοιχεί ένα ελάχιστο κάλυμμα κορυφών του G.

□

Παρατήρηση: Η εύρεση ενός μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου κορυφών του G ονομάζεται πρόβλημα ανεξάρτητου συνόλου (IndependentSet problem). Η εύρεση μια μέγιστης κλίκας σε ένα γράφημα ονομάζεται πρόβλημα κλίκας (Clique problem). Η εύρεση ενός ελάχιστου καλύμματος κορυφών του G ονομάζεται πρόβλημα καλύμματος από κορυφές (VertexCover problem). Οι προτάσεις 42 και 43 αποτελούν παραδείγματα αναγωγής (reduction) ή μετασχηματισμού (transformation) ενός προβλήματος σε άλλο ισοδύναμο πρόβλημα. Δείχνουν ότι μπορούμε να λύσουμε οποιοδήποτε από τα τρία προβλήματα IndependentSet, Clique και VertexCover χρησιμοποιώντας αλγορίθμους που λύνουν το ένα από τα αυτά. Επίσης, δείχνουν ότι τα τρία προβλήματα έχουν την ίδια υπολογιστική δυσκολία.

Τα προβλήματα IndependentSet, Clique και VertexCover ανήκουν σε μια κλάση προβλημάτων τα οποία θεωρούνται υπολογιστικά δύσκολα και ονομάζονται NP-Complete. Η κλάση αυτή αποτελείται από δύσκολα[5] υπολογιστικά προβλήματα για τα οποία υπάρχουν αναγωγές από το ένα στο άλλο, έτσι ώστε αν κάποιο από αυτά λυθεί με γρήγορο τρόπο να μπορούν να λυθούν με γρήγορο τρόπο όλα τα υπόλοιπα προβλήματα της κλάσης.

[5] Οι γνωστοί αλγόριθμοι επίλυσης απαιτούν εκθετικό αριθμό βημάτων σε σχέση με το μέγεθος εισόδου.

Η ανάγκη επίλυσης αυτών των προβλημάτων δημιούργησε πολλές νέες ιδέες, τεχνικές και μεθοδολογίες λύσης προβλημάτων. Ενδεικτικά αναφέρονται οι έννοιες των προσεγγιστικών αλγορίθμων, ευρετικών τεχνικών, τυχαιοποιημένων αλγορίθμων, παραμετρικής πολυπλοκότητας. Οι ιδέες αυτές φάνηκαν χρήσιμες και σε άλλα απλούστερα προβλήματα και δημιούργησαν μια άνθηση στον κλάδο της σχεδίασης αλγορίθμων.

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται, μέσω παραδειγμάτων, δύο από τις τεχνικές που δημιουργήθηκαν για την αντιμετώπιση τέτοιων δύσκολων προβλημάτων.

Προσεγγιστικοί αλγόριθμοι. Η πρώτη τεχνική ονομάζεται προσεγγιστικός αλγόριθμος. Οι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι δημιουργήθηκαν ως συμβιβαστική λύση στην αδυναμία να λύσουμε ένα δύσκολο πρόβλημα. Το βασικό τους χαρακτηριστικό είναι ότι αν και δεν υπολογίζουν πάντα την βέλτιστη λύση, εν τούτοις εξασφαλίζουν ότι η λύση που βρίσκουμε θα είναι χειρότερη από την βέλτιστη το πολύ κατά κάποιο ποσοστό, το οποίο είναι γνωστό εκ των προτέρων. Για παράδειγμα, αν και δεν μπορούμε να βρούμε το ελάχιστο κάλυμμα κορυφών σε ένα γράφημα μήπως μπορούμε να βρούμε ευκολότερα ένα κάλυμμα κορυφών που να μην είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με το ελάχιστο;

Έστω ότι για ένα πρόβλημα η βέλτιστη λύση έχει μέγεθος ή τιμή OPT. Ένας ϵ-**προσεγγιστικός αλγόριθμος** για το πρόβλημα αυτό είναι ένας αλγόριθμος που βρίσκει μια λύση με μέγεθος ή τιμή a όπου

$$\frac{|a - \mathrm{OPT}|}{|\mathrm{OPT}|} \leq \epsilon,$$

δηλαδή η προσεγγιστική λύση που βρίσκουμε έχει **σχετικό σφάλμα** το πολύ ϵ από την πραγματική λύση. (**Προσοχή!** Υπάρχουν πολλοί συγγραφείς για τους οποίους ο συμβολισμός ϵ-προσεγγιστικός αλγόριθμος σημαίνει ότι $\frac{a}{OPT} \leq \epsilon$ αν πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης και $\frac{OPT}{a} \leq \epsilon$ αν πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης. Επίσης, υπάρχουν αρκετές ακόμα παραλλαγές στους συμβολισμούς.)

Σε προβλήματα ελαχιστοποίησης ισχύει ότι $a \geq \mathrm{OPT}$, ενώ σε προβλήματα μεγιστοποίησης ισχύει ότι $a \leq \mathrm{OPT}$.

Για παράδειγμα ένας 2-προσεγγιστικός αλγόριθμος για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης βρίσκει μια λύση με μέγεθος a όπου

$$\frac{a - \mathrm{OPT}}{\mathrm{OPT}} \leq 2 \Leftrightarrow a - \mathrm{OPT} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT} \Leftrightarrow a \leq 3 \cdot \mathrm{OPT},$$

δηλαδή βρίσκει μια λύση που έχει μέγεθος το πολύ τριπλάσιο από την βέλτιστη ελάχιστη λύση που έχει μέγεθος OPT.

Γενικότερα, ένας ϵ-προσεγγιστικός αλγόριθμος για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης βρίσκει μια λύση που έχει μέγεθος μικρότερο ή ίσο από $(1+\epsilon)$ της βέλτιστης ελάχιστης λύσης OPT. Πράγματι,

$$\frac{a - \mathrm{OPT}}{\mathrm{OPT}} \leq e \Leftrightarrow a - \mathrm{OPT} \leq e \cdot \mathrm{OPT} \Leftrightarrow a \leq (1+\epsilon)\mathrm{OPT}.$$

Αντίστοιχα, για προβλήματα μεγιστοποίησης ένας ϵ-προσεγγιστικός αλγόριθμος είναι ένας αλγόριθμος που βρίσκει μια λύση με μέγεθος μεγαλύτερο ή ίσο από $(1-\epsilon)$

της βέλτιστης μέγιστης λύσης OPT. Πράγματι, τότε ισχύει

$$\frac{\mathrm{OPT}-a}{\mathrm{OPT}} \leq e \Leftrightarrow \mathrm{OPT}-a \leq e \cdot \mathrm{OPT} \Leftrightarrow a \geq (1-\epsilon)\mathrm{OPT}.$$

Για παράδειγμα, ένας 1/3-προσεγγιστικός αλγόριθμος για ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης βρίσκει μια λύση που έχει μέγεθος μεγαλύτερο ή ίσο από το $1-1/3 = 2/3$ της βέλτιστης μέγιστης λύσης OPT.

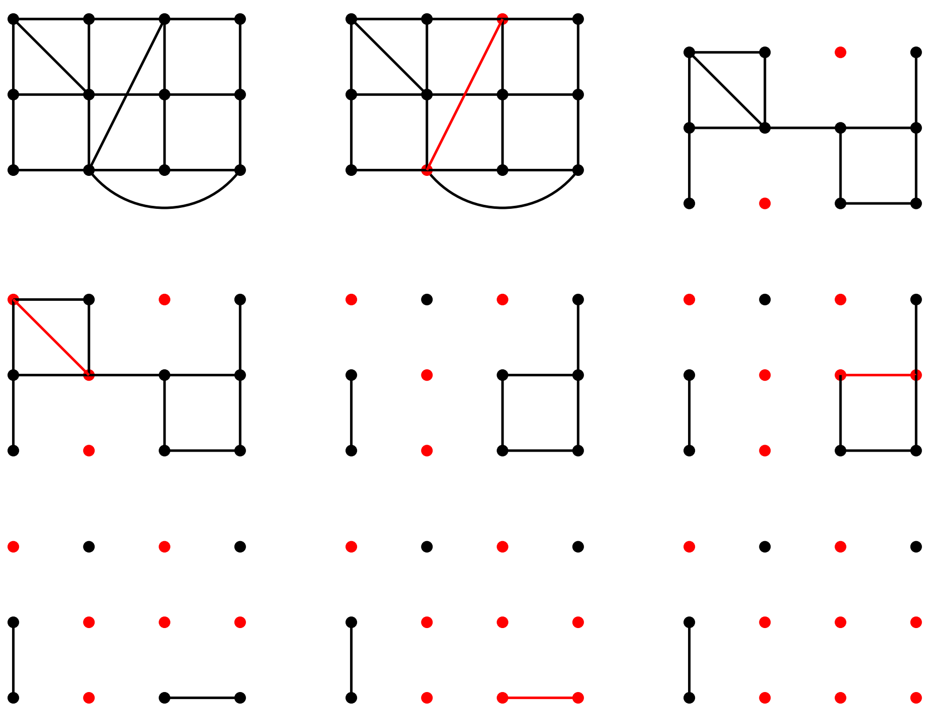
Στην συνέχεια θα δοθεί ένας 1-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα του καλύμματος από κορυφές του G, δηλαδή ένας αλγόριθμος που εξασφαλισμένα βρίσκει μια λύση με μέγεθος μικρότερο ή ίσο από το $(1+1) = 2$-πλάσιο της βέλτιστης ελάχιστης λύσης:

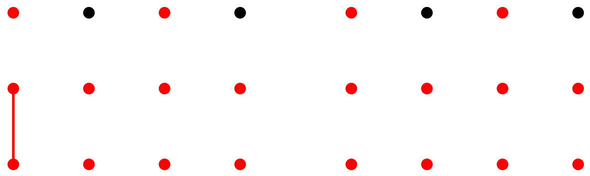
1-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το VertexCover
Είσοδος: Ένα γράφημα δεσμών $G = (V, E)$
Έξοδος: Ένα κάλυμμα κορυφών B του G με $|B| \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}$, όπου OPT το μέγεθος του ελάχιστου καλύμματος από κορυφές.

- Έστω B το ζητούμενο κάλυμμα από κορυφές. Αρχικά $B = \emptyset$.
- Ξεκινάμε από ένα τυχαίο δεσμό $e = \{u, v\}$ του G. Προσθέτουμε τα άκρα του e στο B και διαγράφουμε όλους τους δεσμούς του G που καλύπτονται από τις κορυφές u ή/και v.
  Στην συνέχεια, διαλέγουμε έναν από τους δεσμούς e' που απέμειναν μετά την διαγραφή. Προσθέτουμε και πάλι τα άκρα του e' στο B και διαγράφουμε όλους τους δεσμούς που καλύπτονται από τα άκρα αυτά.
  Συνεχίζουμε μέχρι να διαγράψουμε; όλους τους δεσμούς.
- Το τελικό σύνολο B είναι ένα κάλυμμα από κορυφές του G.

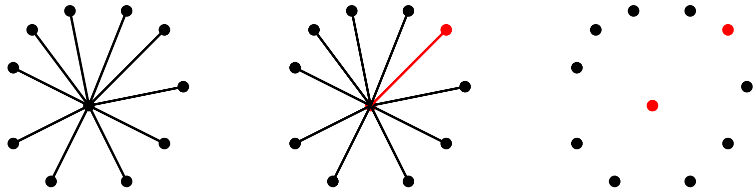
Παραδείγματα

(1)





(2)



Θα αποδείξουμε ότι αν B^* είναι ένα ελάχιστο κάλυμμα από κορυφές του G τότε για το σύνολο B που παράγει ο προηγούμενος αλγόριθμος ισχύει ότι $|B| \leq 2|B^*|$, δηλαδή ο αλγόριθμος είναι ένας 1-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα καλύμματος από κορυφές.

Έστω S το σύνολο των δεσμών που επιλέχθηκαν κατά την διαδικασία σχηματισμού του καλύμματος B. Παρατηρούμε ότι $|B| = 2|S|$. Οποιοδήποτε κάλυμμα από κορυφές του G πρέπει να έχει τουλάχιστον μια κορυφή που να καλύπτει τους δεσμούς του S. Επομένως και κάθε βέλτιστο ελάχιστο κάλυμμα B^* πρέπει να έχει αυτή την ιδιότητα. Επομένως, επειδή οι δεσμοί του S περιέχουν διαφορετικές κορυφές ο καθένας, έπεται ότι

$$|S| \leq |B^*| \Leftrightarrow \frac{|B|}{2} \leq |B^*| \Leftrightarrow |B| \leq 2|B^*| = (1+1)|B^*|$$

δηλαδή ο αλγόριθμος αυτός είναι ένας 1-προσεγγιστικός αλγόριθμος για την εύρεση του ελάχιστου καλύμματος από κορυφές

Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι γραμμική ως προς τον αριθμό των κορυφών του γραφήματος. Παρ όλη την απλότητα του δεν υπάρχει άλλος καλύτερος (γραμμικός ή γρηγορότερος) γνωστός ϵ-προσεγγιστικός αλγόριθμος για το πρόβλημα του καλύμματος από κορυφές με μικρότερο ϵ.

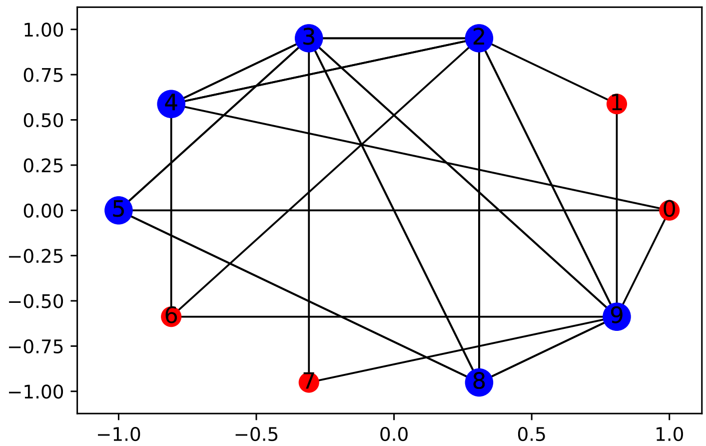
Η βιβλιοθήκη `networkx` διαθέτει την μέθοδο
`algorithms.approximation.min_weighted_vertex_cover(G, weight=None)`
η οποία υλοποιεί τον παραπάνω προσεγγιστικό αλγόριθμο. Μια απλοϊκή υλοποίηση της είναι η επόμενη:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
import random

G = nx.gnm_random_graph(10,20)

vertexcover = []
H = nx.Graph(G) #make a copy of G
while(len(H.edges) > 0):
    [u,v] = random.choice(list(H.edges()))
    vertexcover.append(u)
```

```
    vertexcover.append(v)
    H.remove_node(u)
    H.remove_node(v)
print(vertexcover)

pos = nx.layout.circular_layout(G)
nx.draw_networkx(G,pos,node_color='red', node_size=100.0)
G1 = G.subgraph(vertexcover)
nx.draw_networkx(G1,pos,node_color='blue', node_size=200.0)
plt.savefig("images/vertexcover01a.eps")
plt.show()
```

Output:

```
[2, 4, 3, 9, 5, 8]
```



Οι κορυφές με μπλε χρώμα αποτελούν ένα κάλυμμα από κορυφές των δεσμών του γραφήματος. Το βέλτιστο (ελάχιστο) κάλυμμα κορυφών περιέχει τουλάχιστον $6/2 = 3$ κορυφές.

Πιθανοτική απόδειξη. Η δεύτερη τεχνική ονομάζεται **πιθανοτική μέθοδος απόδειξης** (probabilistic proof method) και χρησιμοποιείται για να δείξουμε ότι κάποιο αντικείμενο υπάρχει χωρίς να χρειάζεται να το βρούμε ή να το κατασκευάσουμε. Ο θεμελιωτής της πιθανοτικής μεθόδου απόδειξης είναι ο Paul Erdős. Η απόδειξη με την πιθανοτική μέθοδο βασίζεται στην παρατήρηση ότι αν ένα ενδεχόμενο έχει θετική πιθανότητα να συμβεί τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του δειγματικού χώρου για το οποίο πραγματοποιείται αυτό το ενδεχόμενο.

Προκειμένου να εφαρμόσουμε αυτή την ιδέα σε ένα πρόβλημα αρχικά δημιουργούμε, με χρήση τυχαίων πειραμάτων, έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο τα στοιχεία του οποίου αποτελούνται από αντικείμενα που μας ενδιαφέρουν και έπειτα αποδεικνύουμε ότι το αντικείμενο που μας ενδιαφέρει έχει θετική πιθανότητα να εμφανισθεί.

Στην επόμενη πρόταση παρουσιάζεται αναλυτικά η χρήση της πιθανοτικής μεθόδου στο πρόβλημα του ανεξάρτητου συνόλου. Το 1941 ο Turan απέδειξε ότι αν ένα γράφημα έχει σχετικά μικρό αριθμό δεσμών τότε διαθέτει ένα αρκετά σχετικά μεγάλο ανεξάρτητο σύνολο κορυφών.

Πρόταση 44 (Turan, 1941). *Αν ένα γράφημα έχει n κορυφές και m δεσμούς, όπου $\frac{n}{2} \leq m \leq \frac{n^2}{4}$, τότε περιέχει ένα ανεξάρτητο σύνολο με μέγεθος τουλάχιστον $\frac{n^2}{4m}$.*

Απόδειξη. Θα δοθεί μια πιθανοτική απόδειξη.

Αρχικά δημιουργούμε με χρήση τυχαίων πειραμάτων έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο τα στοιχεία του οποίου αποτελούνται από αντικείμενα που μας ενδιαφέρουν. Στην απόδειξη αυτή μας ενδιαφέρουν σύνολα κορυφών του γραφήματος.

Θεωρούμε ως τυχαίο πείραμα την επιλογή ενός συνόλου S κορυφών του γραφήματος. Συγκεκριμένα, προκειμένου να κατασκευάσουμε το σύνολο S επιλέγουμε να συμπεριλάβουμε κάθε κορυφή με πιθανότητα p.

Πέρα από το πιθανοτικό κομμάτι, η απόδειξη χρησιμοποιεί την επόμενη σχεδόν "μαγική" προσέγγιση. Επειδή δεν μπορούμε να αποδείξουμε απευθείας την ύπαρξη ενός ανεξάρτητου συνόλου κορυφών, αντί αυτού θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα υποσύνολο S των κορυφών του G το οποίο περιέχει τουλάχιστον $\frac{n^2}{4m}$ παραπάνω κορυφές από ότι δεσμούς. Στην περίπτωση αυτή, αν διαγράψουμε από το S την μία από τις δύο κορυφές κάθε δεσμού που περιέχει, τότε θα προκύψει ένα κορυφών σύνολο S' με τουλάχιστον $\frac{n^2}{4m}$ κορυφές το οποίο δεν θα περιέχει κανένα δεσμό, άρα το S' θα είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο με μέγεθος τουλάχιστον $\frac{n^2}{4m}$.

Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές X και Y που εκφράζουν αντίστοιχα το πλήθος των κορυφών και των δεσμών του S.

Για κάθε κορυφή v_i του G ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η κορυφή } v_i \text{ ανήκει στο } S \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η X_i είναι δείκτρια της ιδιότητας v_i ανήκει στο S.

Επίσης, για κάθε δεσμό e_j ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{αν τα άκρα του } e_j \text{ ανήκουν στο } S \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}.$$

Η Y_j είναι δείκτρια της ιδιότητας e_j ανήκει στο S.

Τότε

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

και

$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m$$

Επειδή οι τυχαίες μεταβλητές X_i και Y_j είναι δείκτριες τυχαίες μεταβλητές που λαμβάνουν μόνο τις τιμές 0 και 1 έπεται ότι η μέση τιμή τους ισούται με την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί η επιθυμητή ιδιότητα που εκφράζουν. Συγκεκριμένα, κάθε κορυφή v_i ανήκει στο S πιθανότητα p, οπότε

$$E(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p.$$

Επίσης, κάθε δεσμός e_j του γραφήματος ανήκει στο S με πιθανότητα p^2, οπότε

$$E(Y_j) = 1 \cdot p^2 + 0 \cdot (1 - p^2) = p^2.$$

Άρα, από την γραμμικότητα της μέσης τιμής προκύπτει ότι

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np$$

και

$$E(Y) = E(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m) = E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_m) = mp^2.$$

Όπως αναφέραμε στην αρχή της απόδειξης μας ενδιαφέρουν σύνολα κορυφών τα οποία έχουν όσο το δυνατόν περισσότερες κορυφές από ότι δεσμούς. Ένα επιχείρημα για αυτή την επιλογή είναι ότι κάθε ανεξάρτητο σύνολο κορυφών του G έχει την ιδιότητα ότι η διαφορά του πλήθους των κορυφών του και του πλήθους των δεσμών του είναι η μέγιστη δυνατή σε σχέση με το μέγεθός του.

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $Z = X - Y$. Πάλι από την γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε ότι $E(Z) = E(X - Y) = E(X) - E(Y) = np - mp^2$.

Στο σημείο αυτό σκεφτόμαστε με τον επόμενο "απρόσμενο" τρόπο. Η μέση τιμή της Z γίνεται μέγιστη όταν

$$\frac{d}{dp}Z = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dp}(np - mp^2) = 0 \Leftrightarrow n - 2mp = 0 \Leftrightarrow p = \frac{n}{2m}.$$

Άρα, αν επιλέξουμε κάθε κορυφή του S με πιθανότητα $p = \dfrac{n}{2m}$ τότε η μέση τιμή $E(Z) = E(X - Y)$ γίνεται μέγιστη και ισούται με

$$E(Z) = n\frac{n}{2m} - m\frac{n^2}{4m^2} = \frac{2n^2 - n^2}{4m} = \frac{n^2}{4m}.$$

Επειδή η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $Z = X - Y$ ισούται με $\dfrac{n^2}{4m}$ έπεται ότι υπάρχει σύνολο κορυφών S του G για το οποίο η διαφορά $X - Y$ είναι μεγαλύτερη ή ίση από $\dfrac{n^2}{4m}$. Επομένως, σύμφωνα με την αρχική παρατήρηση, υπάρχει ένα ανεξάρτητο σύνολο κορυφών του G με μέγεθος τουλάχιστον $\dfrac{n^2}{4m}$. □

Έτσι, για παράδειγμα, σε ένα γράφημα με $n = 100$ κορυφές και $m = 125$ δεσμούς υπάρχει τουλάχιστον ένα ανεξάρτητο σύνολο με $\frac{n^2}{4m} = \frac{100^2}{4 \cdot 125} = \frac{10000}{500} = 20$ κορυφές.

Η πιθανοτική μέθοδος που ακολουθήσαμε στην προηγούμενη απόδειξη μπορεί να συνοψιστεί από τα επόμενα βήματα:

(1) Δημιουργούμε με χρήση τυχαίων πειραμάτων έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο αντικειμένων που μας ενδιαφέρουν.

(2) Ορίζουμε μια τυχαία μεταβλητή X, η οποία αντιστοιχεί στα ποσοτικά χαρακτηριστικά (τον αριθμό ή το μέγεθος) των αντικειμένων που πληρούν την επιθυμητή ιδιότητα.

(3) Εκφράζουμε την τυχαία μεταβλητή X ως άθροισμα τυχαίων μεταβλητών

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

όπου οι X_i, $1 \leq i \leq n$ είναι τυχαίες μεταβλητές της μορφής

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{αν ισχύει η επιθυμητή ιδιότητα} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(4) Υπολογίζουμε την μέση τιμή $E(X_i)$ κάθε τυχαίας μεταβλητής X_i.

(5) Υπολογίζουμε την μέση τιμή $E(X)$ της X βάσει της ιδιότητας της γραμμικότητας της μέσης τιμής:

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

(6) Η απόδειξη της ύπαρξης ολοκληρώνεται με την παρατήρηση ότι μια οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή παίρνει τουλάχιστον μια τιμή μεγαλύτερη ή ίση από την μέση τιμή της και τουλάχιστον μια τιμή μικρότερη ή ίση με την μέση τιμή της, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο (αντικείμενο) του δειγματικού χώρου για το οποίο $X \geq E(X)$ και τουλάχιστον ένα σημείο (αντικείμενο) του δειγματικού χώρου όπου $X \leq E(X)$.