Ασκήσεις για την 1η απαλλακτική πρόοδο

Παρατηρήσεις στις ακολουθίες βαθμών:

- **Βαθμός κορυφής**: Ο αριθμός των δεσμών που ενώνονται με αυτή. (Συμβολισμός $d(v)$).
- **Θεώρημα Havel - Hakimi**: Η φθίνουσα ακολουθία $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ είναι γραφική αν και μόνο αν η ακολουθία $(d_2-1, d_3-1, \ldots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, d_{d_1+3}, \ldots, d_n)$ είναι γραφική.
- **Λήμμα χειραψίας**: Σε κάθε απλό γράφημα δεσμών ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{|V|} d(v_i) = 2|E|$.

  Επομένως, το άθροισμα των βαθμών είναι άρτιος αριθμός.
- Σε κάθε γράφημα με n κορυφές ο **μέγιστος βαθμός** είναι το πολύ $n-1-k$ όπου k ο αριθμός των κορυφών με βαθμό 0.

Άσκηση 1 (Ακολουθίες βαθμών). *Να εξετασθεί, αν υπάρχουν, γραφήματα δεσμών G που έχουν τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών. Στην περίπτωση που υπάρχει, να σχεδιασθεί ένα τέτοιο γράφημα.*

(i) $(4, 4, 3, 3, 2, 2, 1)$.

Λύση. Δεν υπάρχει διότι το άθροισμα των όρων της ακολουθίας είναι περιττός αριθμός. □

(ii) $(5, 3, 2, 2, 2)$.

Λύση. Δεν υπάρχει σε ένα γράφημα με 5 κορυφές ο μέγιστος βαθμός είναι το πολύ 4. □

(iii) $(11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0)$

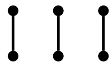
Λύση. Δεν υπάρχει διότι σε ένα γράφημα με 12 κορυφές δεν μπορεί να υπάρχουν ταυτόχρονα οι βαθμοί 11 και 0. □

(iv) $(5, 5, 3, 3, 3, 1)$

Λύση. Δεν υπάρχει, πρέπει ο ελάχιστος βαθμός να είναι 2, αφού υπάρχουν δύο κορυφές που συνδέονται με όλες τις υπόλοιπες κορυφές. □

(v) $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Λύση. Υπάρχει. Είναι το γράφημα: □



(vi) $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

Λύση. Υπάρχει. Για παράδειγμα ο C_7. Ένα άλλο παράδειγμα $C_3 \cup C_4$. □

(vii) $(7, 7, 5, 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$

Λύση. Από το θεώρημα Havel - Hakimi έχουμε ότι υπάρχει τέτοιο γράφημα αν και μόνο αν υπάρχουν γραφήματα με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών: □

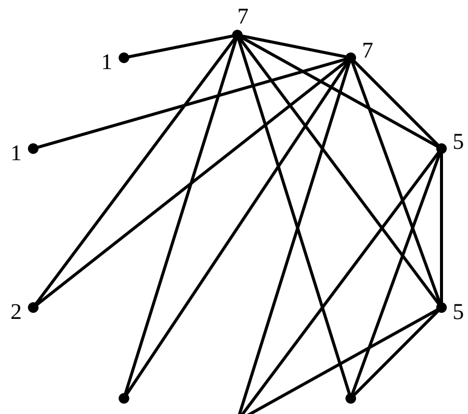
$(7 - 1, 5 - 1, 5 - 1, 3 - 1, 3 - 1, 2 - 1, 2 - 1, 1, 1) = (6, 4, 4, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$

$(4-1, 4-1, 2-1, 2-1, 1-1, 1-1, 1, 1, 1) = (3, 3, 1, 1, 0, 0, 1, 1) = (3, 3, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$

$(3 - 1, 1 - 1, 1 - 1, 1, 1, 0, 0) = (2, 0, 0, 1, 1, 0, 0) = (2, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$

$(1-1, 1-1, 0, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$, (μηδενικό γράφημα με 6 κορυφές)

Επομένως, υπάρχει γράφημα με αυτή την ακολουθία βαθμών. Ένα τέτοιο γράφημα μπορεί κατασκευασθεί με τον αλγόριθμο των Havel - Hakimi και είναι το επόμενο:



(viii) $(7, 7, 7, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$

Λύση. Από το θεώρημα Havel - Hakimi έχουμε ότι υπάρχει τέτοιο γράφημα αν και μόνο αν υπάρχουν γραφήματα με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών:

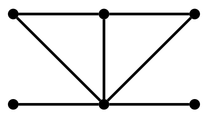
$(7-1, 7-1, 3-1, 3-1, 2-1, 1-1, 1-1, 1) = (6, 6, 2, 2, 1, 0, 0, 1) = (6, 6, 2, 2, 1, 1, 0, 0)$

$(6-1, 2-1-2-1, 1-1, 1-1, 0-1, 0, 0) = (5, 1, 1, 0, 0, -1, 0)$

Επομένως, δεν υπάρχει γράφημα με αυτή την ακολουθία βαθμών. □

(ix) $(5, 3, 2, 2, 1, 1)$.

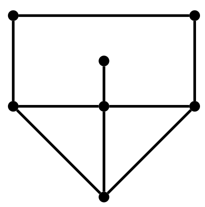
Λύση. Υπάρχει. Είναι το γράφημα:



□

(x) $(4, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$.

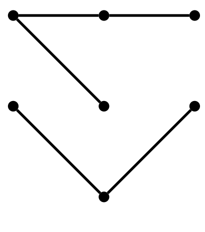
Λύση. Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:



□

(xi) $(2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$

Λύση. Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:



□

Άσκηση 2 (Απαρίθμηση δεσμών γραφήματος).

i) Να βρεθεί ο αριθμός των δεσμών του K_n (πλήρες γράφημα με n κορυφές).

Λύση. Το K_n περιέχει n κορυφές και ο βαθμός κάθε κορυφής του K_n ισούται με $n-1$. Από τον τύπο

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$$

προκύπτει ότι

$$2|E(K_n)| = \sum_{i=1}^{n}(n-1) = n(n-1) \Leftrightarrow |E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

Παρατήρηση: Ο αριθμός των δεσμών του K_n ισούται με τον αριθμό των ζευγών των κορυφών του. Υπάρχουν $\binom{n}{2}$ ζεύγη κορυφών, οπότε $|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. □

ii) Έστω $G = (V, E)$ ένα d-κανονικό γράφημα με $|V| = n$. Να βρεθεί το $|E|$.

Λύση. Από τον τύπο

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$$

προκύπτει ότι

$$2|E| = \sum_{i=1}^{n} d = nd \Leftrightarrow |E| = \frac{dn}{2}$$

□

Άσκηση 3 (Δεσμοί σε τυχαία γραφήματα). *Έστω G ένα τυχαίο γράφημα με $n = 100$ κορυφές, το οποίο κατασκευάζεται σύμφωνα με το μοντέλο των Erdös και Renyi, όπου κάθε πιθανός δεσμός δημιουργείται με πιθανότητα p.*

α) Αν $p = 0.2$ να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός των δεσμών του G.

Ο αναμενόμενος (μέσος) αριθμός των δεσμών του G ισούται με

$$\binom{n}{2}p = \frac{n(n-1)}{2}p = \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 0.2 = 4950 \cdot 0.2 = 990.$$

β) Για ποια τιμή του p ο αναμενόμενος αριθμός δεσμών του γραφήματος G ισούται με 500;

Ο αναμενόμενος (μέσος) αριθμός των δεσμών του G ισούται με

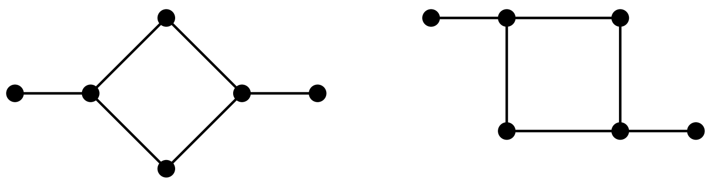
$$\frac{n(n-1)}{2}p = \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 0.2 = 4950p$$

Άρα, πρέπει $4950p = 500$ δηλαδή $p = 500/4950 = 10/99 \simeq 0.1$

Παρατηρήσεις στο πρόβλημα του ισομορφισμού:

- Για να αποδείξουμε ότι δυο γραφήματα είναι ισόμορφα υπάρχει μόνο ένας τρόπος. Να κατασκευάσουμε έναν ισομορφισμό μεταξύ των κορυφών τους (δηλαδή μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση που διατηρεί την σχέση γειτνίασης).

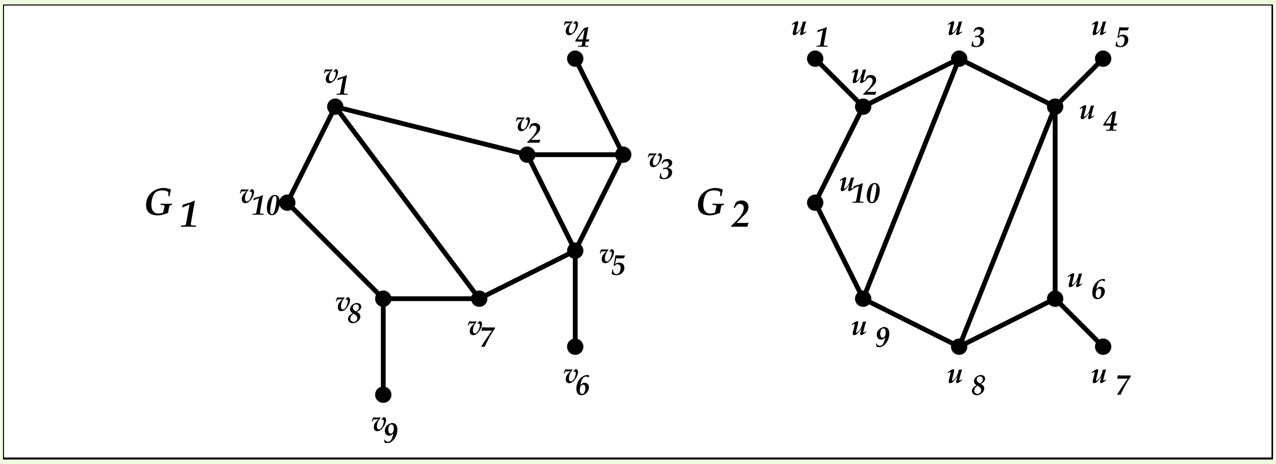
  Μπορεί να υπάρχουν πολλοί τέτοιοι ισομορφισμοί (ανάλογα με τις συμμετρίες που έχει ένα γράφημα). Για παράδειγμα, τα παρακάτω γραφήματα έχουν 4 διαφορετικούς ισομορφισμούς.



- Για να αποδείξουμε ότι δύο γραφήματα **δεν** είναι ισόμορφα υπάρχουν πολλοί τρόποι. Αρκεί να βρούμε ένα χαρακτηριστικό που έχει το ένα από τα δύο γραφήματα και δεν το έχει το άλλο (ενώ θα έπρεπε να το είχε αν ήταν ισόμορφα). Π.χ. κύκλους, αποστάσεις, εκκεντρότητες, κλίκες, μονοπάτια, κ.λπ.

Άσκηση 4 (Ισόμορφα γραφήματα). *Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα τα παρακάτω ζεύγη γραφημάτων.*

(i)

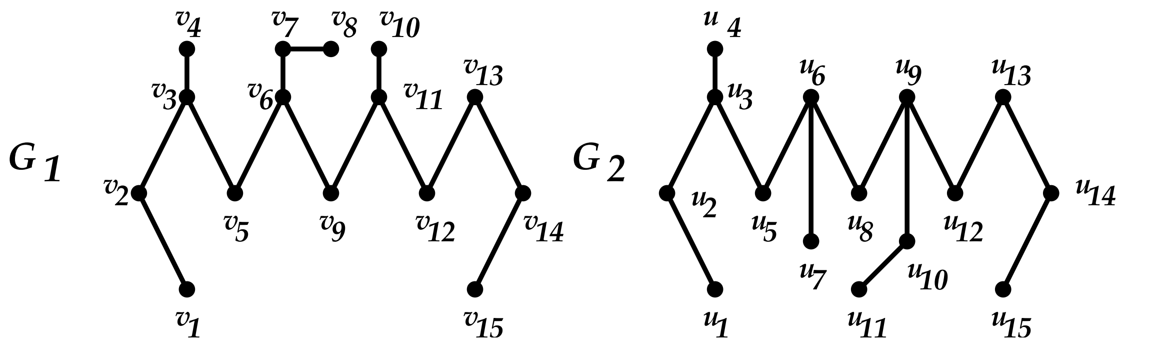


Λύση. Τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα. Ένας ισομορφισμός f είναι ο εξής:

$$
\begin{aligned}
f(v_1) &= u_9\\
f(v_2) &= u_8\\
f(v_3) &= u_6\\
f(v_4) &= u_7\\
f(v_5) &= u_4\\
f(v_6) &= u_5\\
f(v_7) &= u_3\\
f(v_8) &= u_2\\
f(v_9) &= u_1\\
f(v_{10}) &= u_{10}
\end{aligned}
$$

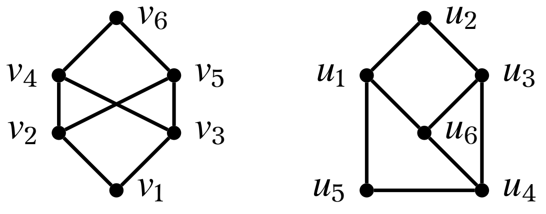
□

(ii)



Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι στο G_2 υπάρχουν κορυφές βαθμού 1 που απέχουν απόσταση 4 (οι u_4 και u_7) ενώ στο G_1 όχι. □

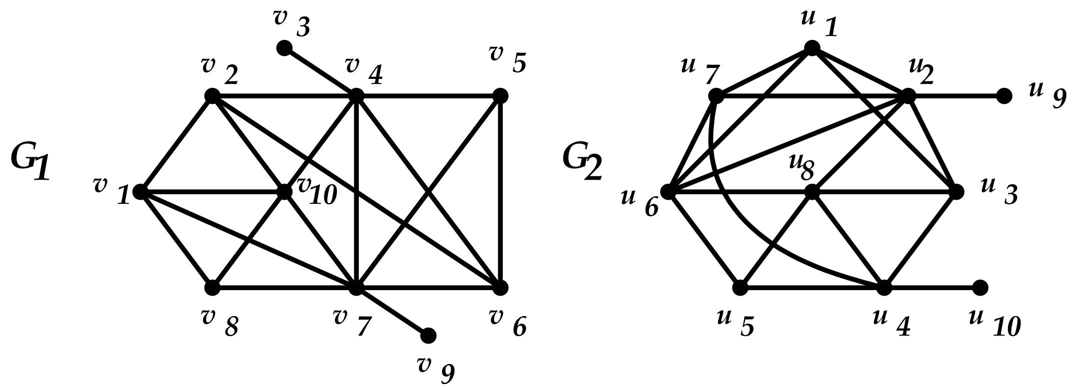
(iii)



G_1 G_2

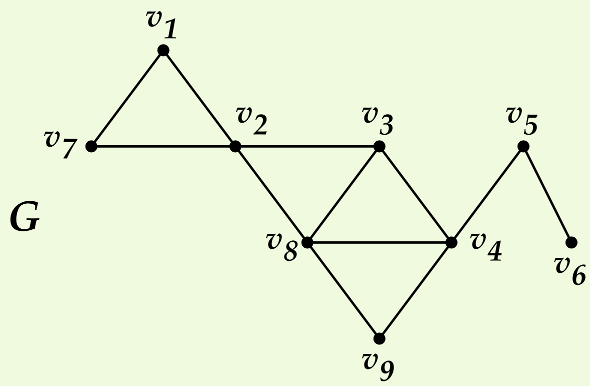
Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι το G_2 περιέχει τρίγωνο (v_3, v_4, v_6), ενώ το G_1 δεν περιέχει τρίγωνα. □

(iv)



Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι στο G_2 υπάρχει κορυφή βαθμού 1 η οποία συνδέεται με κορυφή βαθμού 5, ενώ στο G_1 δεν υπάρχουν τέτοιες κορυφές. □

Άσκηση 5 (Διαδρομές και συνεκτικότητα). *Δίδεται το γράφημα G*



Να ορισθούν:

i) *Μια διαδρομή μήκους 8 από το v_1 στο v_3.*

ii) *Ένας δρόμος μήκους 5 από το v_3 στο v_8.*

iii) *Ένα μονοπάτι μήκους 4 από το v_2 στο v_3.*

iv) *Μια κλειστή διαδρομή μήκους 6 (που να μην είναι δρόμος).*

v) *Ένας κλειστός δρόμος μήκους 6 (που να μην είναι κύκλος).*

vi) *Ένας κύκλος μήκους 5.*

vii) *Ένα συνεκτικό άκυκλο υπογράφημά του H με $V(H) = V(G)$.*

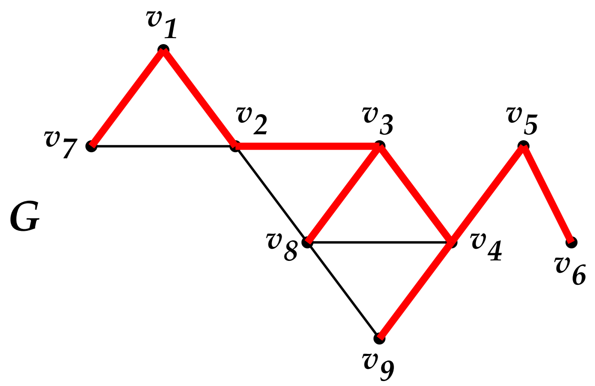
viii) *Να ευρεθούν (αν υπάρχουν) οι κλειδώσεις και οι γέφυρές του.*

ix) *Να ευρεθούν τα μπλοκ του.*

x) *Να βρεθεί ένα μονοπάτι του G με το μεγαλύτερο δυνατό μήκος.*

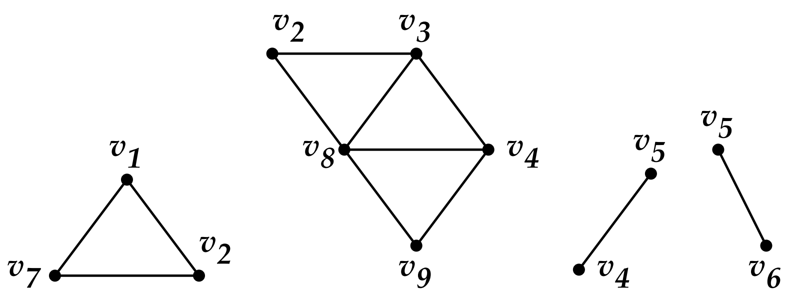
Λύση.

vii) Ένα τέτοιο υπογράφημα είναι το εξής:



viii) Κλειδώσεις: v_2, v_4, v_5.
Γέφυρες: $\{v_4, v_5\}$, $\{v_5, v_6\}$

ix) Μπλοκ:

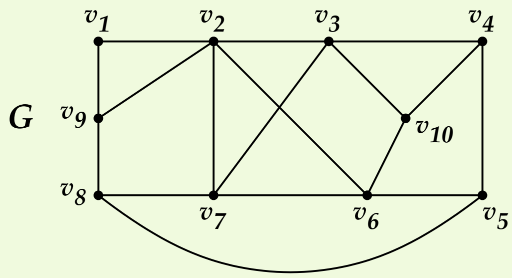


x) Στο G υπάρχει ένα μονοπάτι που διέρχεται από όλες τις κορυφές του και έχει μήκος 8. Είναι το μονοπάτι $v_1 - v_7 - v_2 - v_3 - v_8 - v_9 - v_4 - v_5 - v_6$. □

Άσκηση 6 (Μέγιστος αριθμός block). *Να κατασκευασθεί ένα γράφημα με 7 δεσμούς το οποίο περιέχει τον μέγιστο αριθμό από block.*

Λύση. Ο μέγιστος αριθμός από block που μπορεί να έχει ένα γράφημα με 7 δεσμούς είναι 7 (κάθε δεσμός να είναι ένα μπλοκ). □

Άσκηση 7 (Σύνολο κλειδώσεων). *Δίδεται το γράφημα G*



i) Να εξετασθεί αν είναι μη διαχωρίσιμο.

ii) Να ευρεθεί ένα ελάχιστο σύνολο κλειδώσεών του.

Λύση. i) Το γράφημα δεν περιέχει κλειδώσεις, άρα είναι μη διαχωρίσιμο.

ii) Ένα ελάχιστο σύνολο κλειδώσεων του είναι το σύνολο κορυφών $\{v_2, v_9\}$ το οποίο διαχωρίζει την κορυφή v_1 από τις κορυφές v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{10}. □

Παρατήρηση: Για να διαχωρίσουμε μια κορυφή από τις υπόλοιπες κορυφές του γραφήματος πρέπει να διαγράψουμε όλους τους γείτονές της. Επομένως, το μικρότερο σύνολο κλειδώσεων έχει μέγεθος μεγαλύτερο ή ίσο από τον ελάχιστο βαθμό των κορυφών του γραφήματος.

Άσκηση 8 (3-συνεκτικό γράφημα με ελάχιστο αριθμό δεσμών).

i) Να δειχθεί ότι αν ένα γράφημα G με n κορυφές είναι 3-συνεκτικό, τότε περιέχει τουλάχιστον $3n/2$ δεσμούς.

ii) Να κατασκευασθεί ένα 3-συνεκτικό γράφημα με 8 κορυφές και 12 δεσμούς.

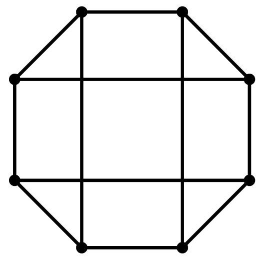
*(Υπενθύμιση: Ένα γράφημα ονομάζεται k-**συνεκτικό** (k-connected) αν κάθε σύνολο κλειδώσεων του περιέχει τουλάχιστον k κορυφές. Με άλλα λόγια, αν το G είναι k-συνεκτικό τότε το γράφημα που προκύπτει από την διαγραφή οποιουδήποτε συνόλου $k-1$ κορυφών του G είναι επίσης συνεκτικό.)*

Λύση.

i) Για να είναι το γράφημα $G = (V, E)$ 3-συνεκτικό πρέπει όλες οι κορυφές του να έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 3.

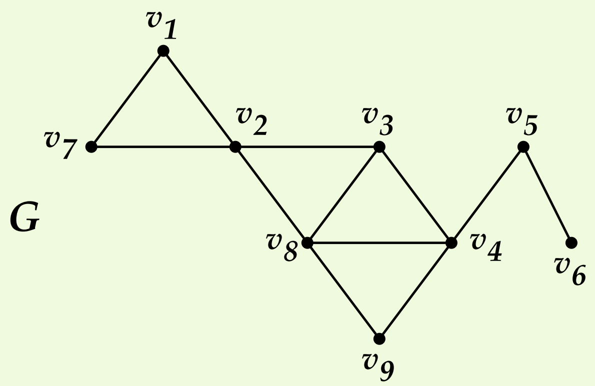
Επομένως,
$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \geqslant \sum_{v \in V} 3 = 3|V| = 3n \Leftrightarrow |E| \geqslant 3n/2$$

ii) Ένα τέτοιο γράφημα είναι ο κύβος:



Ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο ζεύγη κορυφών του υπάρχουν 3 διαφορετικά (ως προς τις εσωτερικές κορυφές) μονοπάτια που τις συνδέουν. □

Άσκηση 9 (Αποστάσεις). *Δίδεται το γράφημα G*



Να ευρεθούν:

i) Η απόσταση $d(v_2, v_5)$.

ii) Δύο γεωδαιτικά μονοπάτια ανάμεσα στους κόμβους v_2 και v_4.

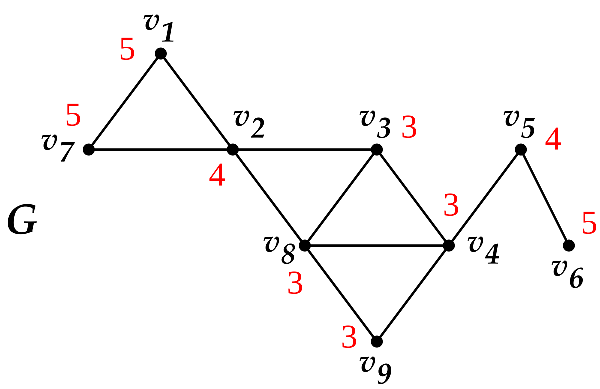
iii) Η διάμετρος $d(G)$.

iv) Η ακτίνα $r(G)$.

v) Το κέντρο του G.

vi) Το περιφερειακό σύνολο του G.

Λύση. Θα υπολογίσουμε τις εκκεντρότητες των κορυφών του G:



iii) Διάμετρος $d(G) = 5$.

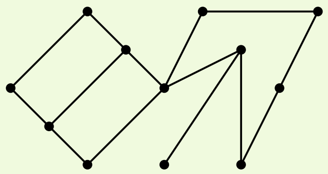
iv) Ακτίνα $r(G) = 3$.

v) Το κέντρο του G αποτελείται από τις κορυφές v_3, v_4, v_8, v_9.

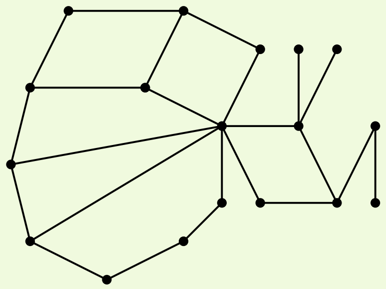
vi) Το περιφερειακό σύνολο του G αποτελείται από τις κορυφές v_1, v_6, v_7. □

Άσκηση 10 (Διμερή γραφήματα). *Να εξετασθεί ποιο από τα παρακάτω γραφήματα είναι διμερές.*

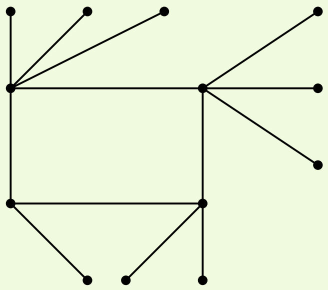
G_1



G_2



G_3



Λύση.
Κριτήριο 1: Ένα γράφημα είναι διμερές ανν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους.
Κριτήριο 2: Ένα γράφημα είναι διμερές ανν είναι 2-χρωματικό.

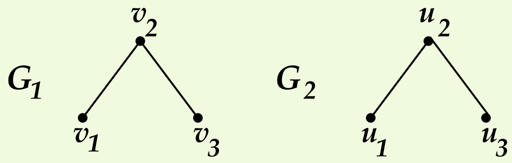
G_1, G_3: διμερή

G_2: όχι διμερές. □

Άσκηση 11 (Πράξεις γραφημάτων). *Για τα γραφήματα*

i)

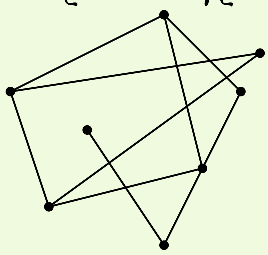
ii)



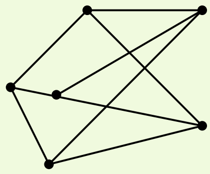
να ορισθούν τα $G_1 \cup G_2$, $G_1 + G_2$, $(G_1 + G_2)^c$, $G_1 \times G_2$.

Άσκηση 12 (Θεώρημα Kuratowski για επίπεδα γραφήματα). *Να εξετασθεί ποιο από τα παρακάτω γραφήματα είναι επίπεδο.*

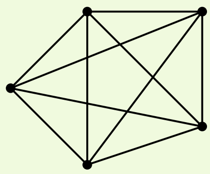
G_1



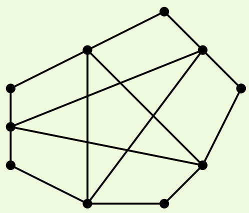
G_2



G_3



G_4



Λύση. Υπενθύμιση: Ένα γράφημα G είναι επίπεδο ανν δεν περιέχει ως υπογράφημα καμία εκλέπτυνση των $K_{3,3}$ και K_5.

G_1: Ναι.

G_2: Όχι, διότι είναι ισόμορφο με το $K_{3,3}$

G_3: Όχι, διότι είναι το K_5.

G_4: Όχι, διότι περιέχει μια εκλέπτυνση του K_5. □

Άσκηση 13 (Θεώρημα Kuratowski για επίπεδα γραφήματα). *Να εξετασθεί αν κάποιο από τα παρακάτω γραφήματα είναι επίπεδο.*

(α) K_6, *(β)* $K_{5,2}$, *(γ)* $K_{4,3}$.

Λύση.

(α) Όχι, διότι περιέχει ως υπογράφημα το K_5 (και το $K_{3,3}$)

(β) Ναι.

(γ) Όχι, διότι περιέχει ως υπογράφημα το $K_{3,3}$. □

Άσκηση 14 (Ανισότητα κορυφών–δεσμών σε επίπεδα γραφήματα).

i) Να δειχθεί ότι κάθε γράφημα G με 8 κορυφές και περισσότερους από 18 δεσμούς δεν είναι επίπεδο.

Λύση. Σε κάθε επίπεδο γράφημα με $|V|$ κορυφές και $|E|$ δεσμούς ισχύει ότι $|E| \leqslant 3|V| - 6$.

Επομένως, αν το γράφημα G που έχει $|E| > 18$ είναι επίπεδο πρέπει $18 < |E| \leqslant 3 \cdot 8 - 6 = 18$, άτοπο. □

ii) Να δειχθεί ότι κάθε διμερές γράφημα B με 12 κορυφές και περισσότερους από 20 δεσμούς δεν είναι επίπεδο.

Λύση. Σε κάθε διμερές επίπεδο γράφημα με $|V|$ κορυφές και $|E|$ δεσμούς ισχύει ότι $|E| \leqslant 2|V| - 4$.

Επομένως, αν το γράφημα B που έχει $|E| > 20$ είναι επίπεδο πρέπει $20 < |E| \leqslant 2 \cdot 12 - 4 = 20$, άτοπο. □

Άσκηση 15 (Μέγιστος αριθμός εδρών σε επίπεδα γραφήματα).

i) Να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός εδρών που μπορεί να έχει ένα επίπεδο γράφημα με 10 κορυφές

Λύση. Από τον τύπο του Euler σε κάθε επίπεδο γράφημα με $|V|$ κορυφές, $|E|$ δεσμούς και $|F|$ έδρες ισχύει ότι $|V| + |F| = |E| + 2$. Επομένως,

$$|F| = |E| - |V| + 2.$$

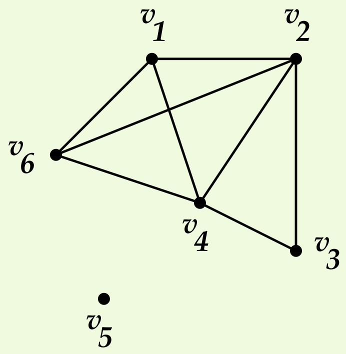
Αν το $|V|$ είναι σταθερό, τότε ο αριθμός των εδρών $|F|$ γίνεται μέγιστος όταν $|E|$ γίνεται μέγιστο. Επειδή $|E| \leqslant 3|V| - 6$, έπεται ότι η μέγιστη τιμή του $|F|$ σε ένα γράφημα με $|V| = 10$ κορυφές προκύπτει όταν $|E| = 3|V| - 6 = 3 \cdot 10 - 6 = 24$ και ισούται με:

$$|F| = 3|V| - 6 - |V| + 2 = 2|V| - 4 = 2 \cdot 10 - 4 = 16.$$

□

ii) Να κατασκευασθεί ένα επίπεδο γράφημα με $n = 10$ κορυφές και τον μέγιστο αριθμό εδρών.

Άσκηση 16 (Μήτρα και απεικόνιση γραφήματος). *Να ορισθεί η μήτρα και η απεικόνιση του γραφήματος*



Λύση.

Μήτρα γειτνίασης γραφήματος:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Απεικόνιση γραφήματος:

$\Gamma(v_1) = \{v_2, v_4, v_6\}$.
$\Gamma(v_2) = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$.
$\Gamma(v_3) = \{v_2, v_4\}$.
$\Gamma(v_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$.
$\Gamma(v_5) = \varnothing$.
$\Gamma(v_6) = \{v_1, v_2, v_4\}$.

□