Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκων: Χ. Κωνσταντόπουλος

Οι διαφάνειες βασίζονται σε αυτές των ακόλουθων πηγών:

Introduction to Algorithms (6-046J), MIT

https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-046j-introduction-to-algorithms-sma-5503-fall-2005/

και

Lecture Slides for Algorithm Design

https://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos/

Αλγόριθμοι
4ο Εξάμηνο

Ανάλυση Αλγορίθμων

Η Θεωρητική μελέτη της απόδοσης των προγραμμάτων υπολογιστή και της χρήσης πόρων

Ασυμπτωτική Απόδοση

Ενδιαφερόμαστε για την ασυμπτωτική απόδοση των προγραμμάτων

Πως, ο αλγόριθμος συμπεριφέρεται καθώς το μέγεθος του προβλήματος γίνεται πολύ μεγάλο;

- Ο χρόνος εκτέλεσης ,
- Οι απαιτήσεις σε χώρο μνήμης ,
- Απαιτήσεις σε εύρος ζώνης, κατανάλωση ενέργειας, πλήθος λογικών πυλών

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Ασυμπτωτικός συμβολισμός (big-O):

- Τι σημαίνει χρόνος εκτέλεσης *O(n)*, *O(n^2)*, *O(n lg n);*
- Πως ο ασυμπτωτικός χρόνος εκτέλεσης σχετίζεται με τη ασυμπτωτική χρήση μνήμης;

Ανάλυση Αλγορίθμων

- Η ανάλυση γίνεται με βάση ένα υπολογιστικό μοντέλο.
- Θα χρησιμοποιήσουμε ένα μονό-επεξεργαστή γενικού σκοπού τυχαίας πρόσβασης (RAM=Random Access Machine)
  - Όλες οι προσβάσεις στη μνήμη κοστίζουν το ίδιο.
  - Δεν εκτελούνται παράλληλα λειτουργίες
  - Όλες οι συνήθεις εντολές απαιτούν σταθερό χρόνο εκτέλεσης με εξαίρεση τις κλήσεις συναρτήσεων
  - Σταθερό μήκος λέξης εκτός αν χειριζόμαστε κατευθείαν δυαδικά ψηφία

Μέγεθος Εισόδου

Πολυπλοκότητα Χρόνου και Χώρου:

- Γενικά, συνάρτηση του μεγέθους εισόδου, π.χ., ταξινόμηση, πολλαπλασιασμός
- Το μέγεθος της εισόδου εξαρτάται από το συγκεκριμένο υπολογιστικό πρόβλημα:
  - Ταξινόμηση: πλήθος των στοιχείων εισόδου
  - Πολλαπλασιασμός: συνολικό πλήθος των δυαδικών ψηφίων
  - Αλγόριθμοι γραφημάτων: πλήθος των κόμβων και ακμών
  - κτλ.

Χρόνος Εκτέλεσης

- Πλήθος των βασικών βημάτων που εκτελούνται
- Με εξαίρεση την εκτέλεση συναρτήσεων, οι περισσότερες εντολές απαιτούν περίπου τον ίδιο χρόνο:

  $y = m * x + b$

  $c = 5 / 9 * (t - 32)$

  $z = f(x) + g(y)$
- Η ανάλυση μπορεί να γίνει πιο ακριβής αν χρειαστεί.

Το πρόβλημα της ταξινόμησης

Είσοδος: ακολουθία $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ αριθμών.

Έξοδος: μετάθεση $\langle a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \rangle$ τέτοια ώστε $a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_n$.

Παράδειγμα:

Είσοδος: 8 2 4 9 3 6

Έξοδος: 2 3 4 6 8 9

Ταξινόμηση Ένθεσης

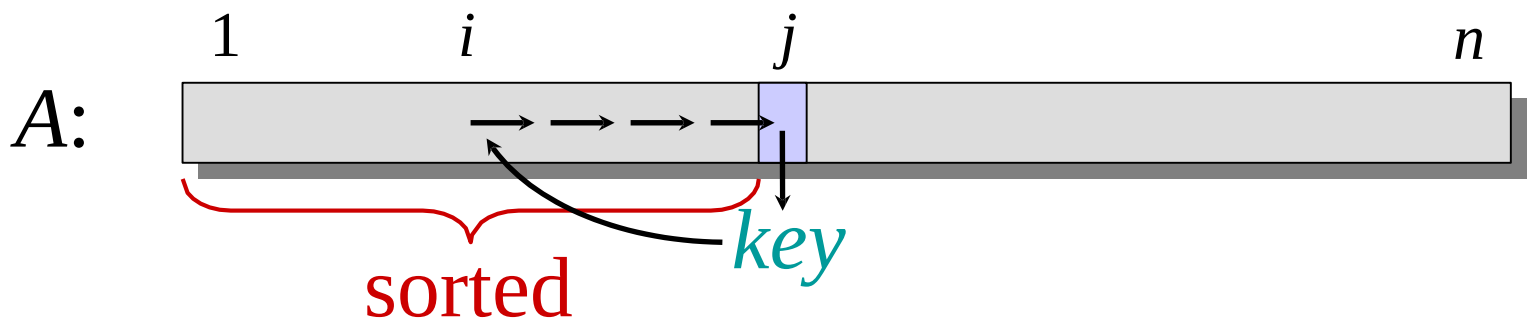
"Ψευδοκώδικας"

```
INSERTION-SORT (A, n)        ⊳ A[1 . . n]
    for j ← 2 to n
        do key ← A[ j]
           i ← j – 1
           while i > 0 and A[i] > key
                 do A[i+1] ← A[i]
                    i ← i – 1
           A[i+1] = key
```

Ταξινόμηση Ένθεσης

"Ψευδοκώδικας"

```
INSERTION-SORT (A, n)        ⊳ A[1 . . n]
    for j ← 2 to n
        do key ← A[ j]
           i ← j – 1
           while i > 0 and A[i] > key
                 do A[i+1] ← A[i]
                    i ← i – 1
           A[i+1] = key
```

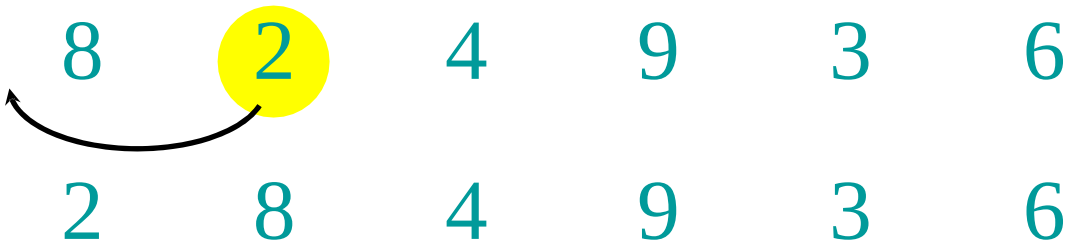


Παράδειγμα της ταξινόμησης ένθεσης

8 2 4 9 3 6

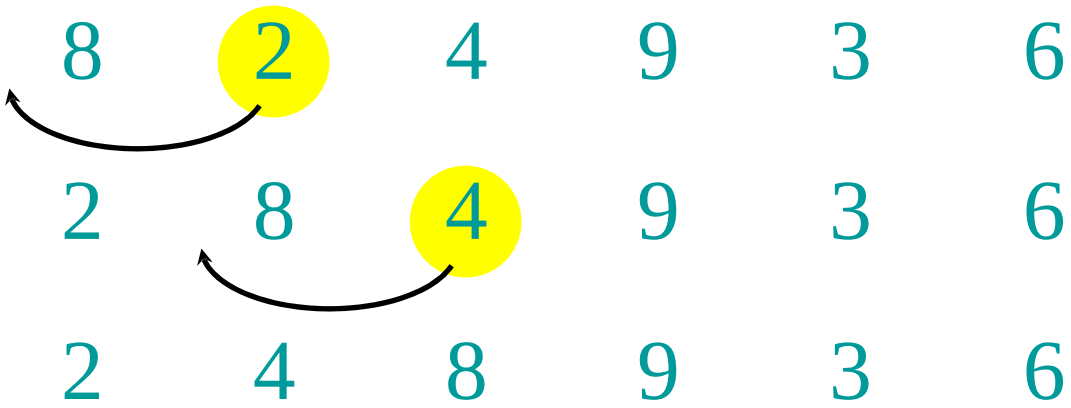
Παράδειγμα της ταξινόμησης ένθεσης

Παράδειγμα της ταξινόμησης ένθεσης

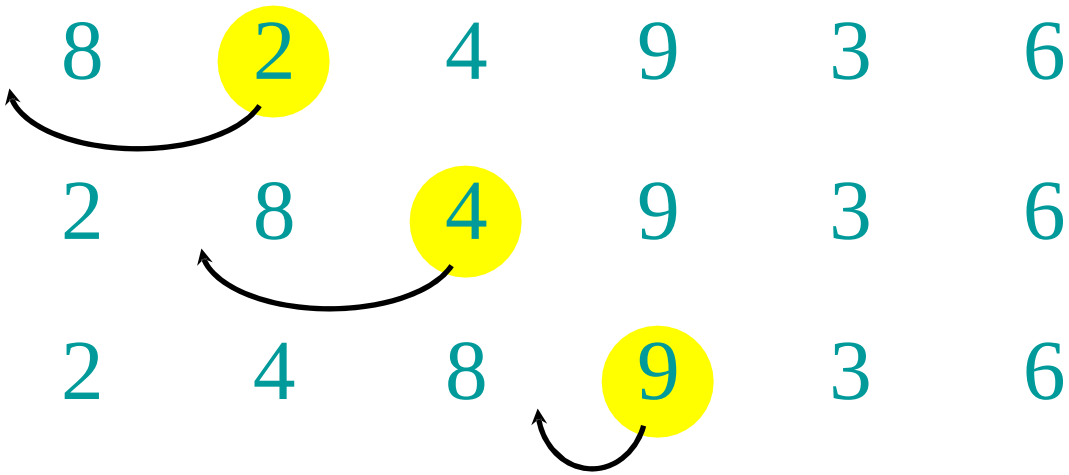


Παράδειγμα της ταξινόμησης ένθεσης

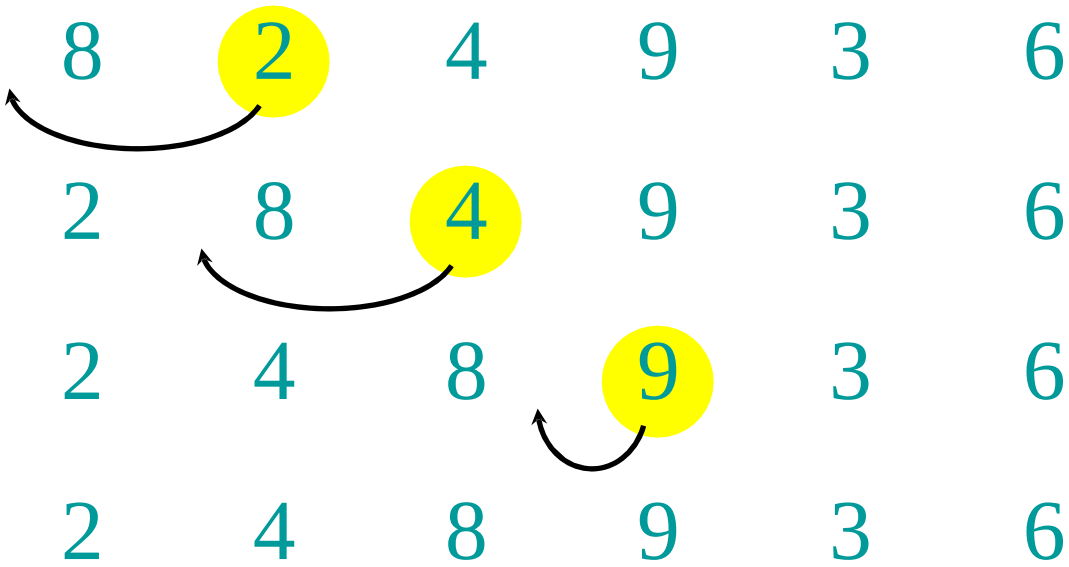
Παράδειγμα της ταξινόμησης ένθεσης



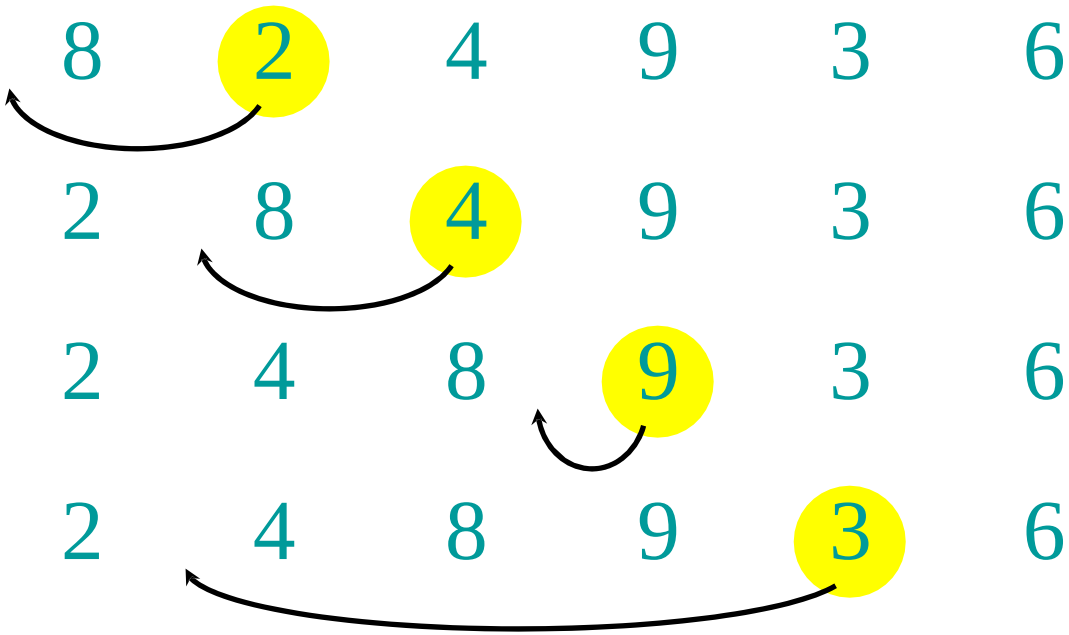
Παράδειγμα της ταξινόμησης ένθεσης



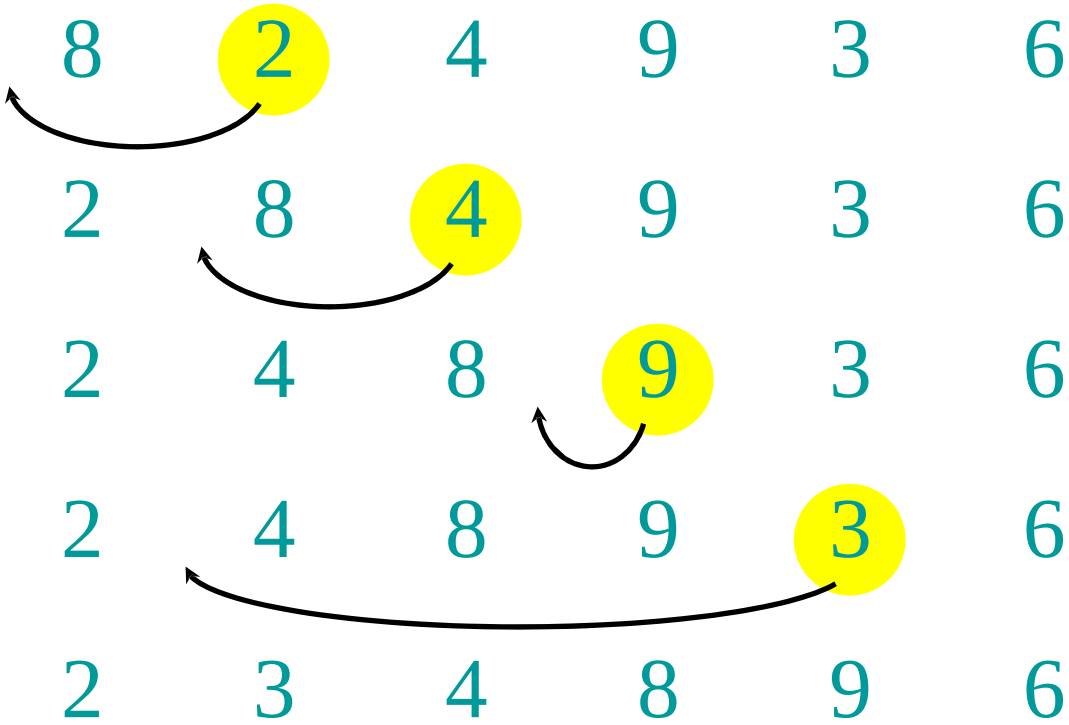
Παράδειγμα της ταξινόμησης ένθεσης



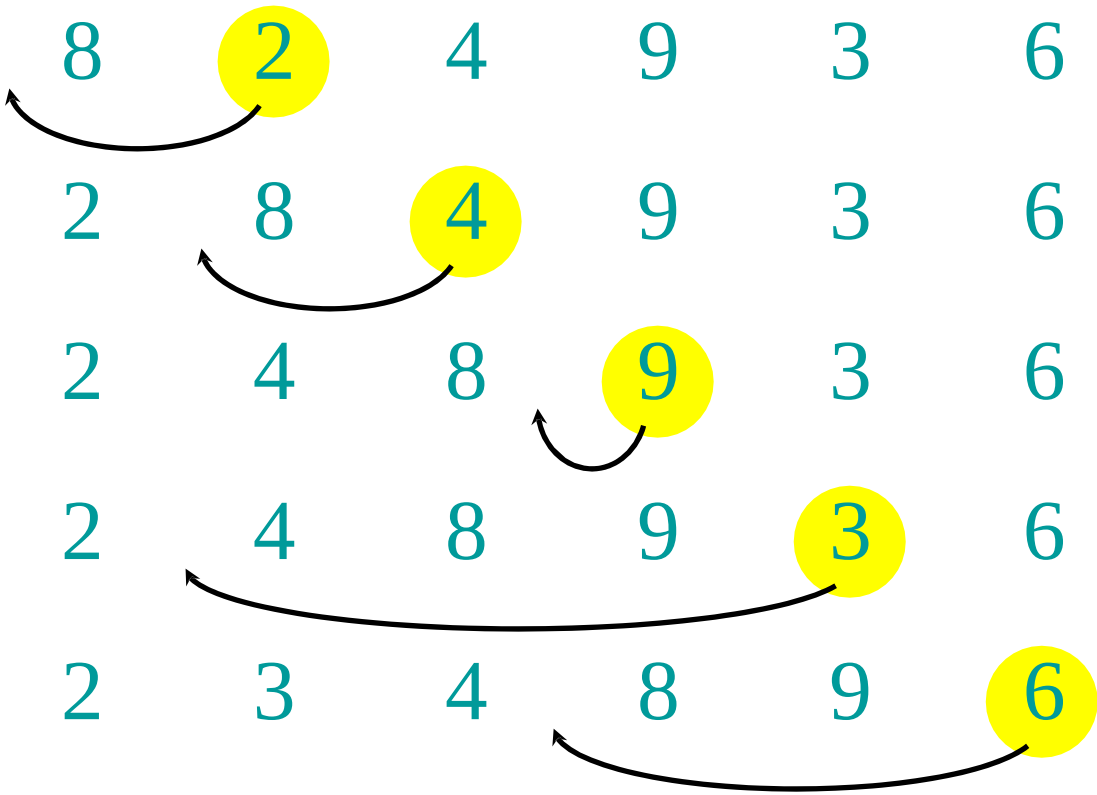
Παράδειγμα της ταξινόμησης ένθεσης



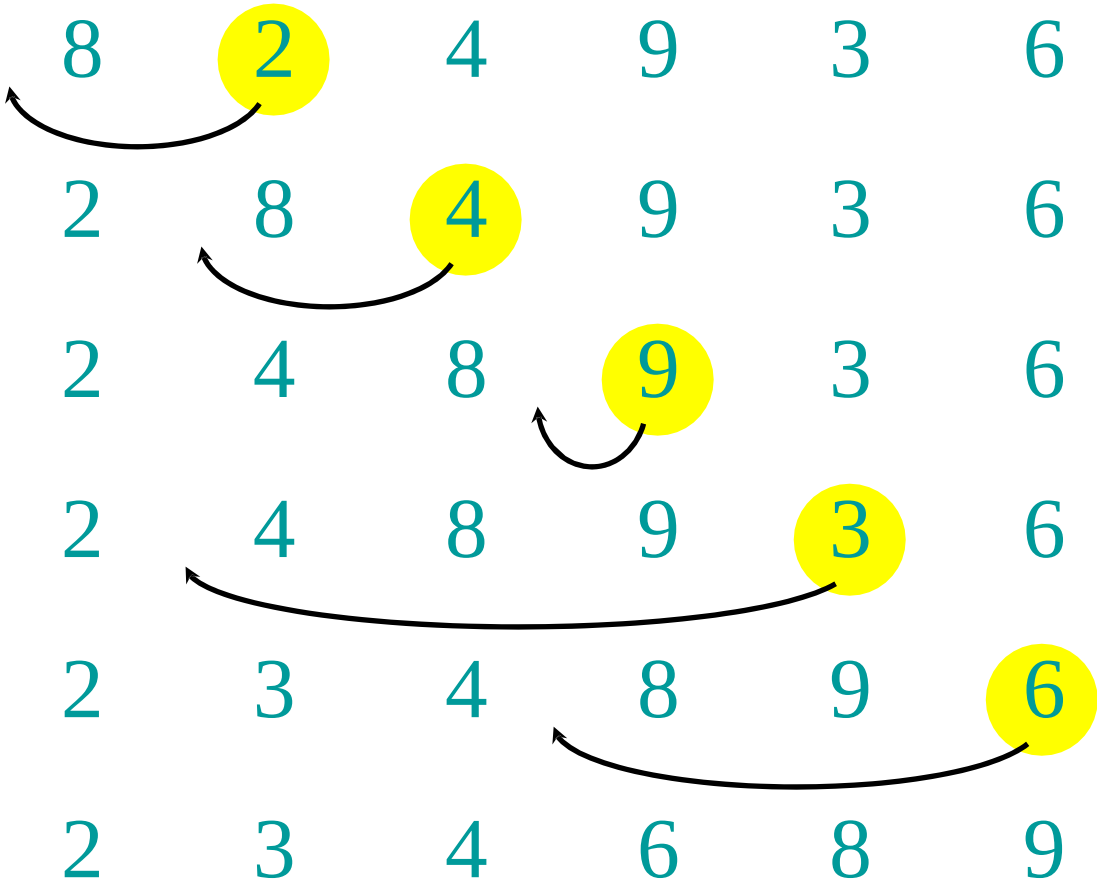
Παράδειγμα της ταξινόμησης ένθεσης



Παράδειγμα της ταξινόμησης ένθεσης



Παράδειγμα της ταξινόμησης ένθεσης



Ο χρόνος εκτέλεσης

- Ο χρόνος εκτέλεσης εξαρτάται από την είσοδο: είναι πιο εύκολο να ταξινομήσεις μία ήδη ταξινομημένη λίστα.
- Εκφράζουμε το χρόνο εκτέλεσης συναρτήσει του μεγέθους εισόδου, αφού είναι πιο εύκολο να ταξινομήσουμε μικρές ακολουθίες σε σχέση με μεγάλες.
- Γενικά, αναζητούμε πάνω όρια στο χρόνο εκτέλεσης, διότι η ύπαρξη εγγυήσεων στην ταχύτητα εκτέλεσης αλγορίθμων είναι επιθυμητή.

INSERTION-SORT (A)	*cost*	*times*
1 **for** $j = 2$ **to** $A.length$	c_1	n
2 $key = A[j]$	c_2	$n-1$
3 // Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1..j-1]$.	0	$n-1$
4 $i = j-1$	c_4	$n-1$
5 **while** $i > 0$ and $A[i] > key$	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
6 $A[i+1] = A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1)$
7 $i = i-1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1)$
8 $A[i+1] = key$	c_8	$n-1$

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + c_6 \sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_7 \sum_{j=2}^{n}(t_j - 1) + c_8(n-1) .$$

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5(n-1) + c_8(n-1) \\ &= (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8) . \end{aligned}$$

$t_j = 1$

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \\ &\quad + c_6\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_7\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_8(n-1) \\ &= \left(\frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2} + \frac{c_7}{2}\right)n^2 + \left(c_1 + c_2 + c_4 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} - \frac{c_7}{2} + c_8\right)n \\ &\quad - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8) . \end{aligned}$$

$t_j = j$

Είδη Ανάλυσης

Χειρότερη περίπτωση: (συνήθως)

- $T(n)$ = ο μέγιστος χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου σε οποιαδήποτε είσοδο μεγέθους n.

Μέση περίπτωση: (μερικές φορές)

- $T(n)$ = αναμενόμενος χρόνος του αλγορίθμου για όλες τις εισόδους μεγέθους n.
- Πρέπει να είναι γνωστή η στατιστική κατανομή των εισόδων.

Καλύτερη περίπτωση: (πιθανή παραπλάνηση)

- Τρέχουμε ένα αργό αλγόριθμο ο οποίος τρέχει γρήγορα σε κάποιες εισόδους.

Χρόνος ανεξάρτητος της αρχιτεκτονικής υπολογιστή

Ποιος είναι ο χρόνος χειρότερης περίπτωσης της ταξινόμησης ένθεσης;

- Εξαρτάται από την ταχύτητα του υπολογιστή μας:
  - Σχετική ταχύτητα(στον ίδιο υπολογιστή),
  - Απόλυτη ταχύτητα (σε διαφορετικές μηχανές).

Η βασική ιδέα:

- Αγνόησε τις σταθερές που εξαρτώνται από την αρχιτεκτονική.
- Κοιτάμε στην αύξηση της $T(n)$ καθώς $n \to \infty$.

“Ασυμπτωτική Ανάλυση”

Συμβολισμός Θ

Ορισμός:

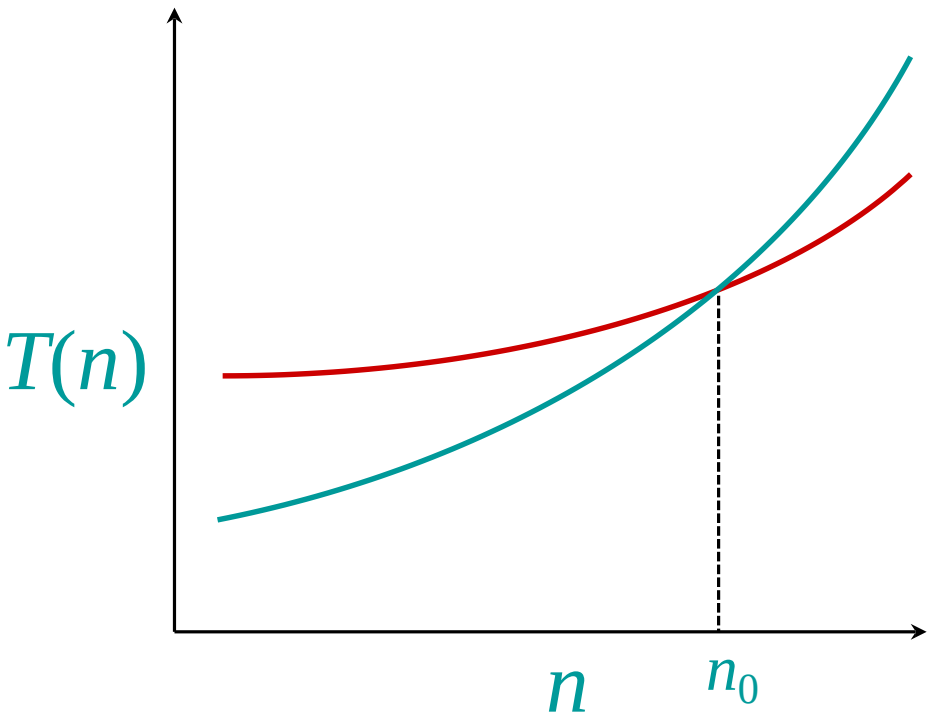
$\Theta(g(n)) = \{\ f(n)$: υπάρχουν θετικές σταθερές , c_1, c_2, και n_0 τέτοιες ώστε $0 \leq c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$ για όλα τα $n \geq n_0\}$

Ουσιαστικά:

- Αγνόησε τους όρους χαμηλότερης τάξης
- Αγνόησε τους συντελεστές στους όρους υψηλότερης τάξης.
- Παράδειγμα: $3n^3 + 90n^2 - 5n + 6046 = \Theta(n^3)$

Ασυμπτωτική απόδοση

Όταν το n γίνει αρκετά μεγάλο, ένας αλγόριθμος πολυπλοκότητας $\Theta(n^2)$ *πάντα* είναι καλύτερος από ένα αλγόριθμο πολυπλοκότητας $\Theta(n^3)$.



- Δεν θα πρέπει να αγνοούμε τους ασυμπτωτικά αργότερους αλγορίθμους
- Ο σχεδιασμός στην πράξη συχνά απαιτεί προσεκτική εξισορρόπηση διαφορετικών συχνά αντικρουόμενων στόχων

Ανάλυση της Ενθετικής Ταξινόμησης

Χειρότερη περίπτωση: Είσοδος ταξινομημένη αντίστροφα.

$$T(n) = \sum_{j=2}^{n} \Theta(j) = \Theta(n^2)$$ [αριθμητική πρόοδος]

Μέση περίπτωση: Όλες οι μεταθέσεις είναι εξίσου πιθανές

$$T(n) = \sum_{j=2}^{n} \Theta(j/2) = \Theta(n^2)$$

Είναι η ενθετική ταξινόμηση ένας γρήγορος αλγόριθμος ταξινόμησης;

- Ισχύει μερικώς, για μικρά n.
- Καθόλου, για μεγάλα n.

Συγχωνευτική ταξινόμηση

MERGE-SORT $A[1 \ldots n]$

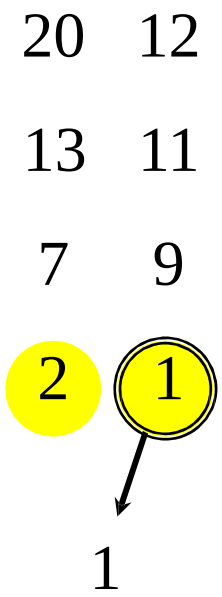
1. If $n = 1$, done.
2. Recursively sort $A[\,1 \ldots \lceil n/2 \rceil\,]$ and $A[\,\lceil n/2 \rceil + 1 \ldots n\,]$.
3. "***Merge***" the 2 sorted lists.

Βασική υπορουτίνα: **MERGE**

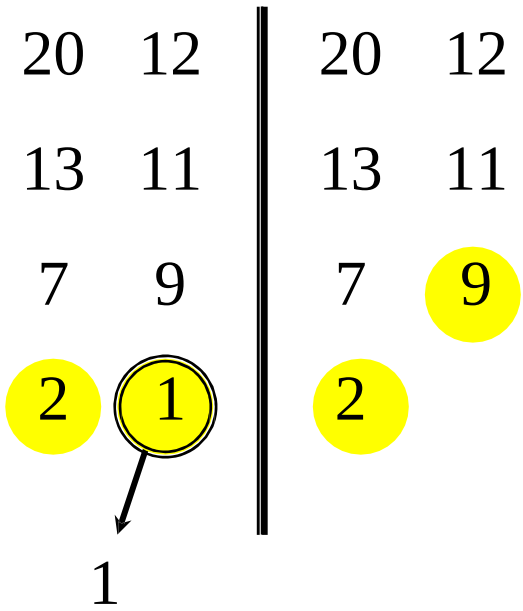
Ταξινόμηση δύο ταξινομημένων συστοιχιών

20	12
13	11
7	9
2	1

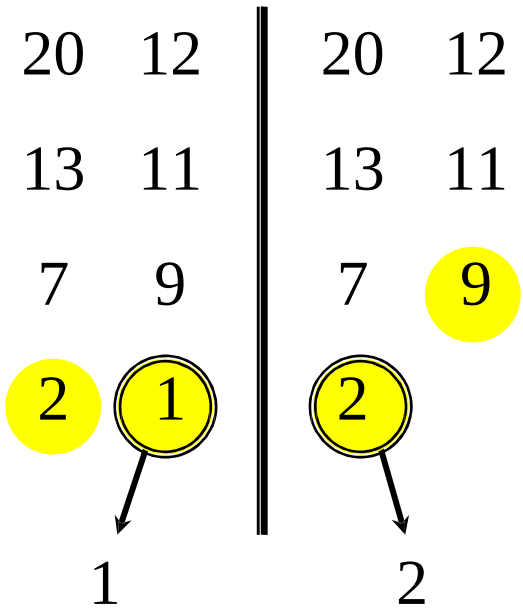
Ταξινόμηση δύο ταξινομημένων συστοιχιών



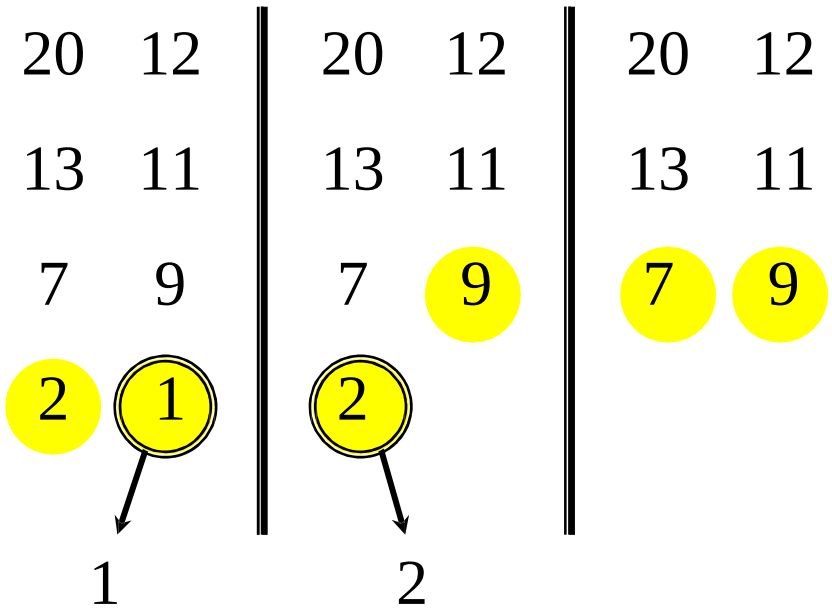
Ταξινόμηση δύο ταξινομημένων συστοιχιών



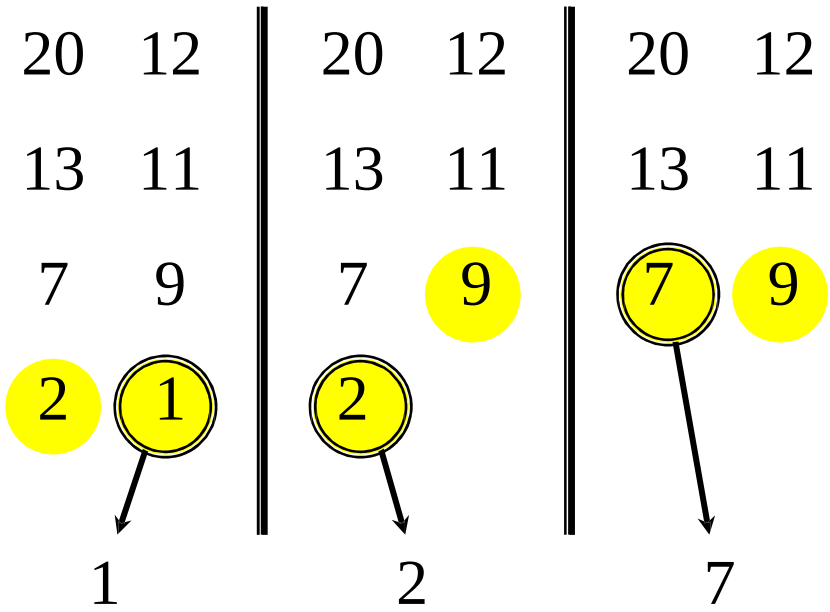
Ταξινόμηση δύο ταξινομημένων συστοιχιών



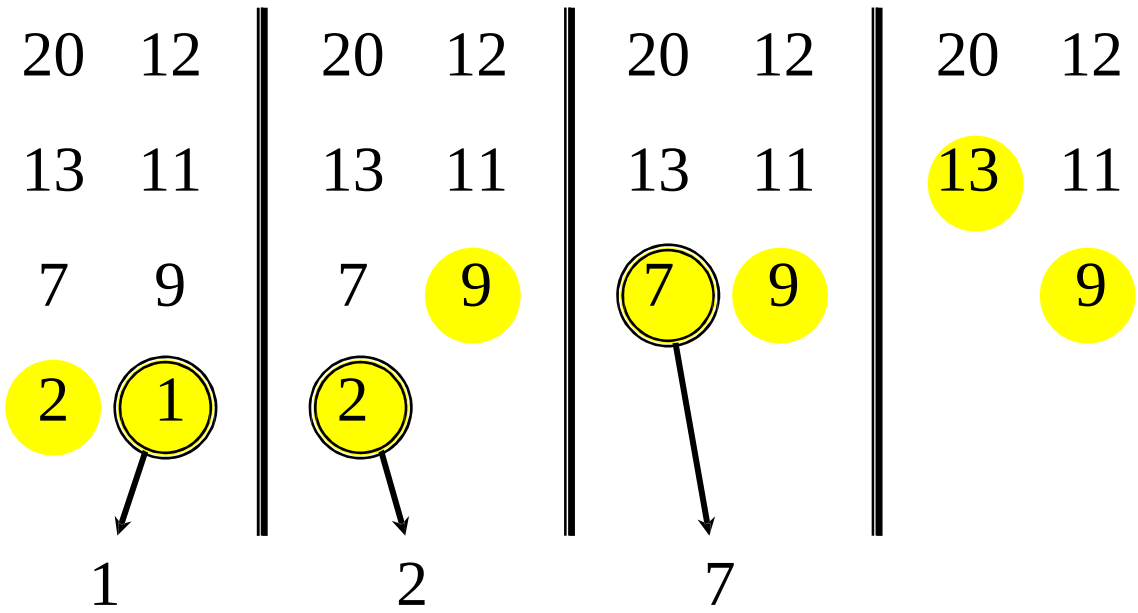
Ταξινόμηση δύο ταξινομημένων συστοιχιών



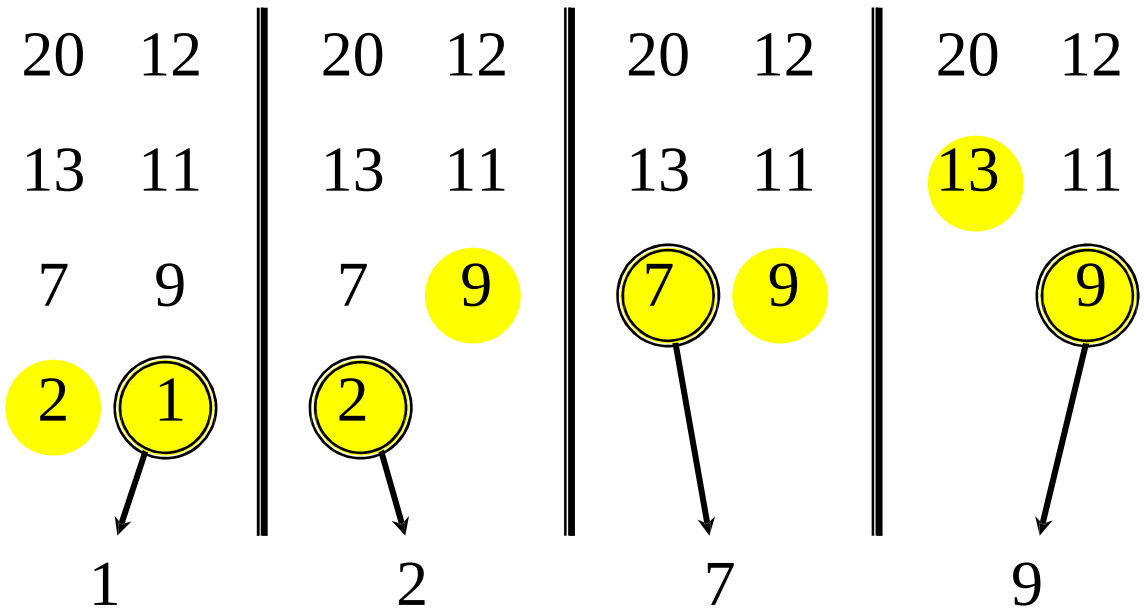
Ταξινόμηση δύο ταξινομημένων συστοιχιών



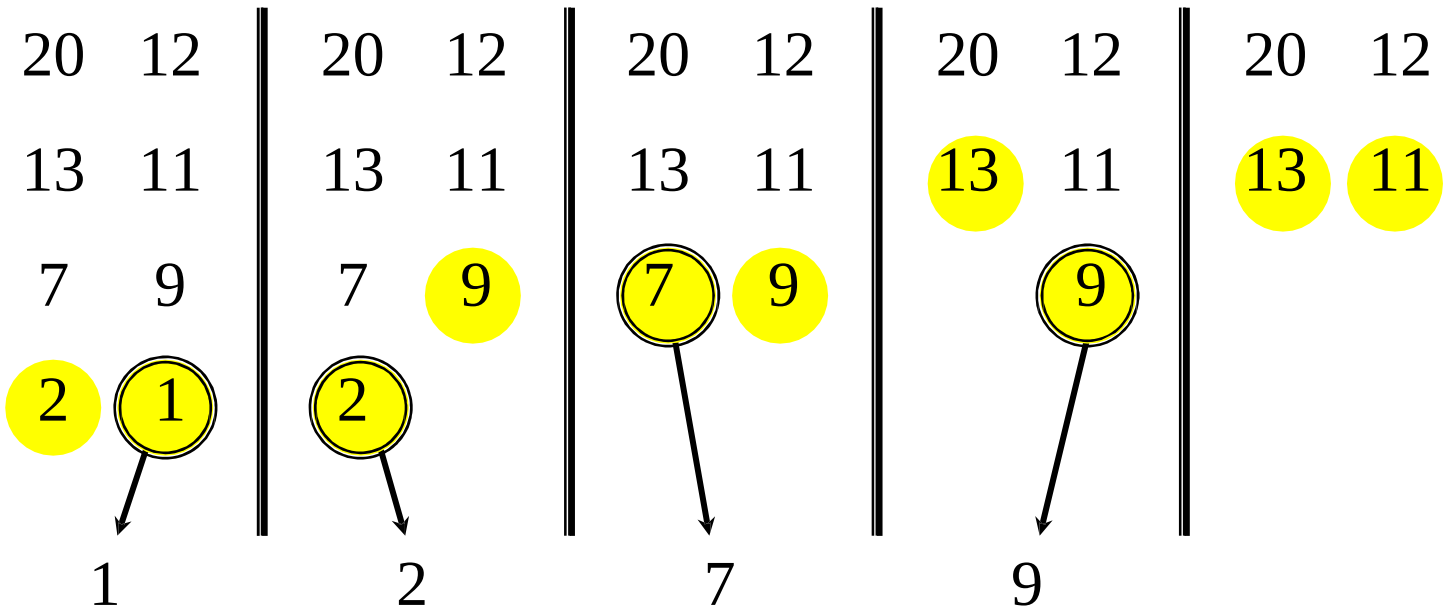
Ταξινόμηση δύο ταξινομημένων συστοιχιών



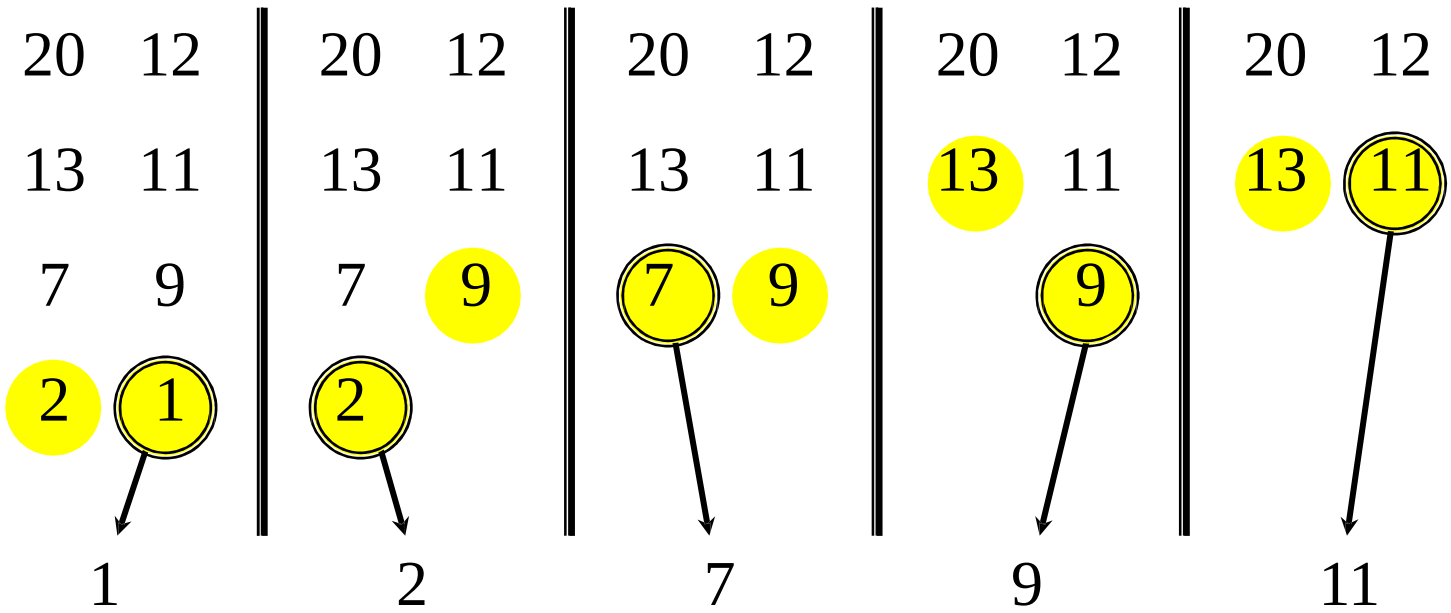
Ταξινόμηση δύο ταξινομημένων συστοιχιών



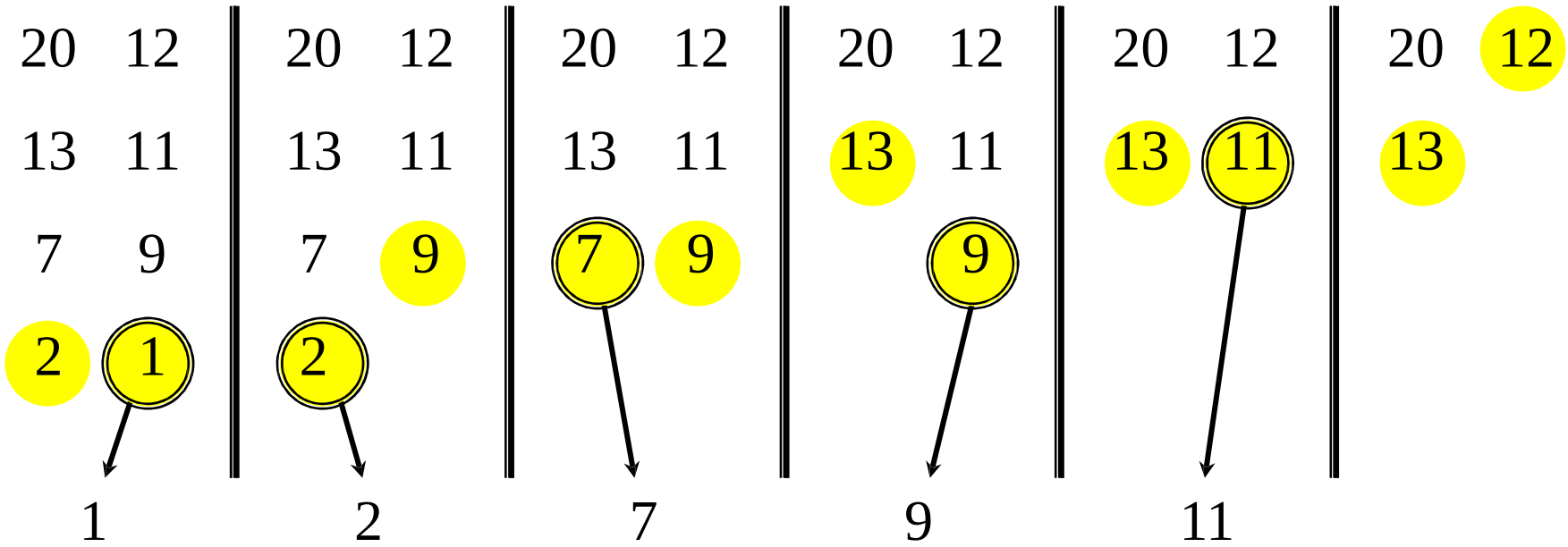
Ταξινόμηση δύο ταξινομημένων συστοιχιών



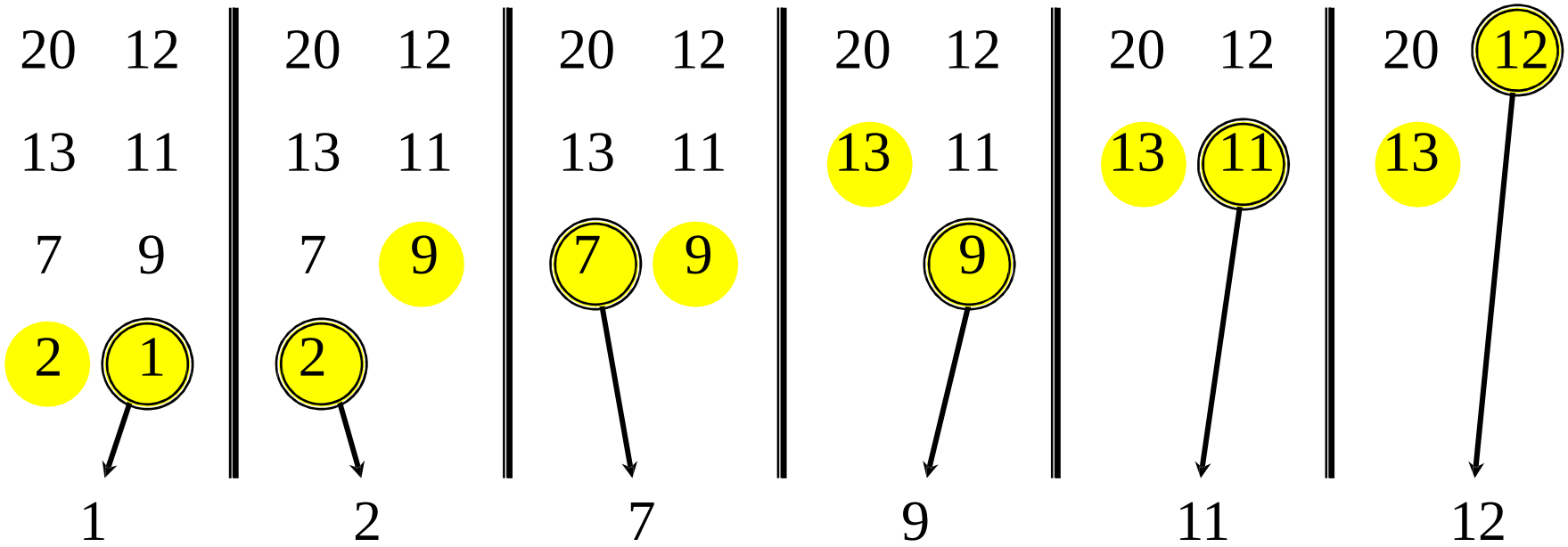
Ταξινόμηση δύο ταξινομημένων συστοιχιών



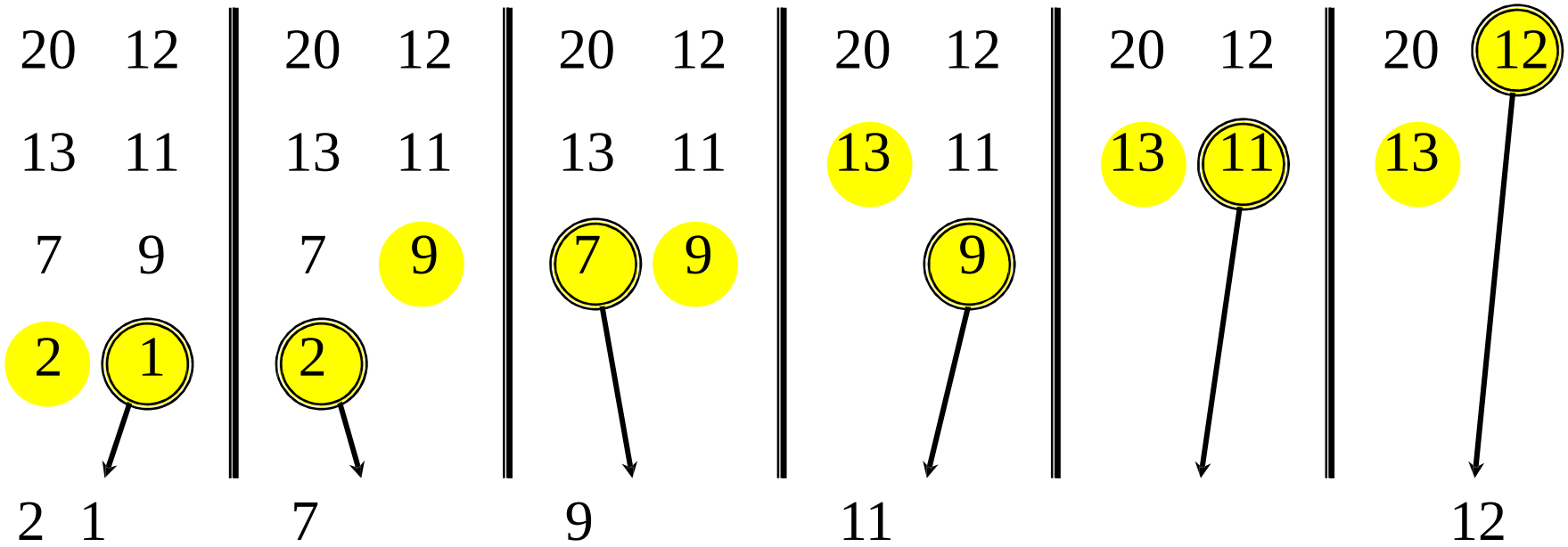
Ταξινόμηση δύο ταξινομημένων συστοιχιών



Ταξινόμηση δύο ταξινομημένων συστοιχιών



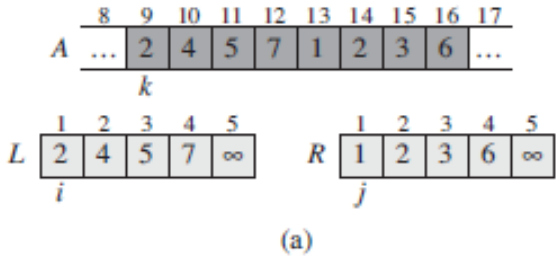
Ταξινόμηση δύο ταξινομημένων συστοιχιών



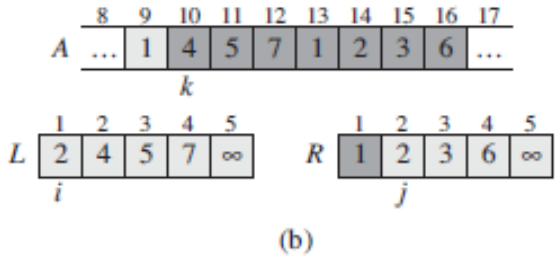
Χρόνος = $\Theta(n)$ για τη συγχώνευση συνολικά n στοιχείων (γραμμικός χρόνος).

```
MERGE(A, p, q, r)
 1  n_1 = q − p + 1
 2  n_2 = r − q
 3  let L[1..n_1 + 1] and R[1..n_2 + 1] be new arrays
 4  for i = 1 to n_1
 5      L[i] = A[p + i − 1]
 6  for j = 1 to n_2
 7      R[j] = A[q + j]
 8  L[n_1 + 1] = ∞
 9  R[n_2 + 1] = ∞
10  i = 1
11  j = 1
12  for k = p to r
13      if L[i] ≤ R[j]
14          A[k] = L[i]
15          i = i + 1
16      else A[k] = R[j]
17          j = j + 1
```

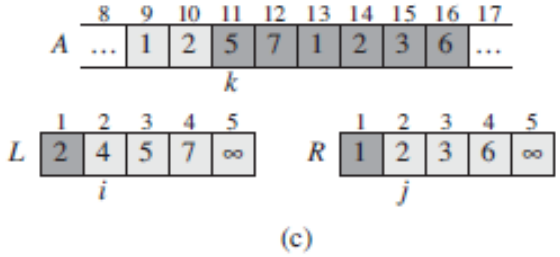
Παράδειγμα:
MERGE(A,9,12,16)



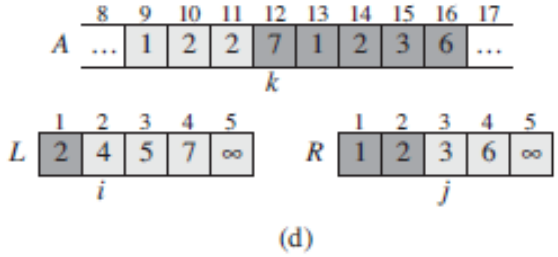
(a)



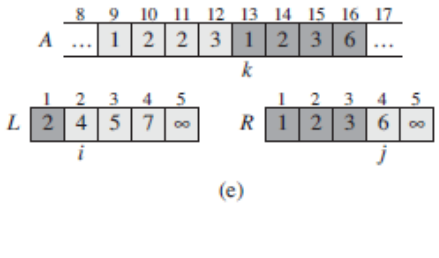
(b)



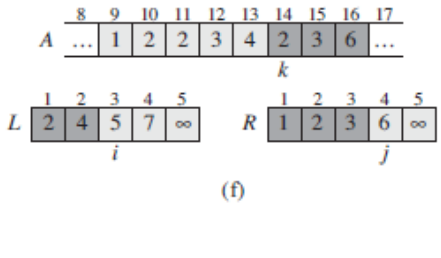
(c)



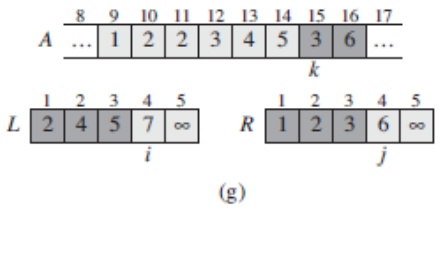
(d)



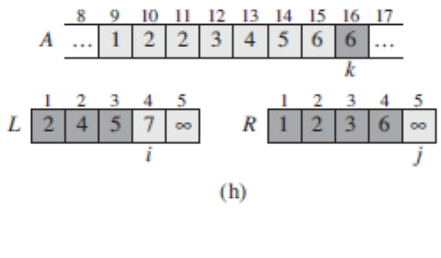
(e)



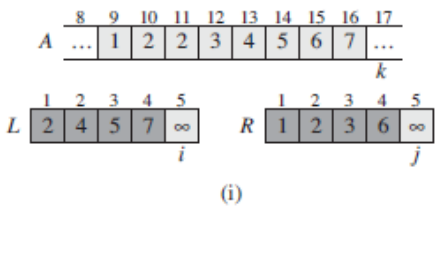
(f)



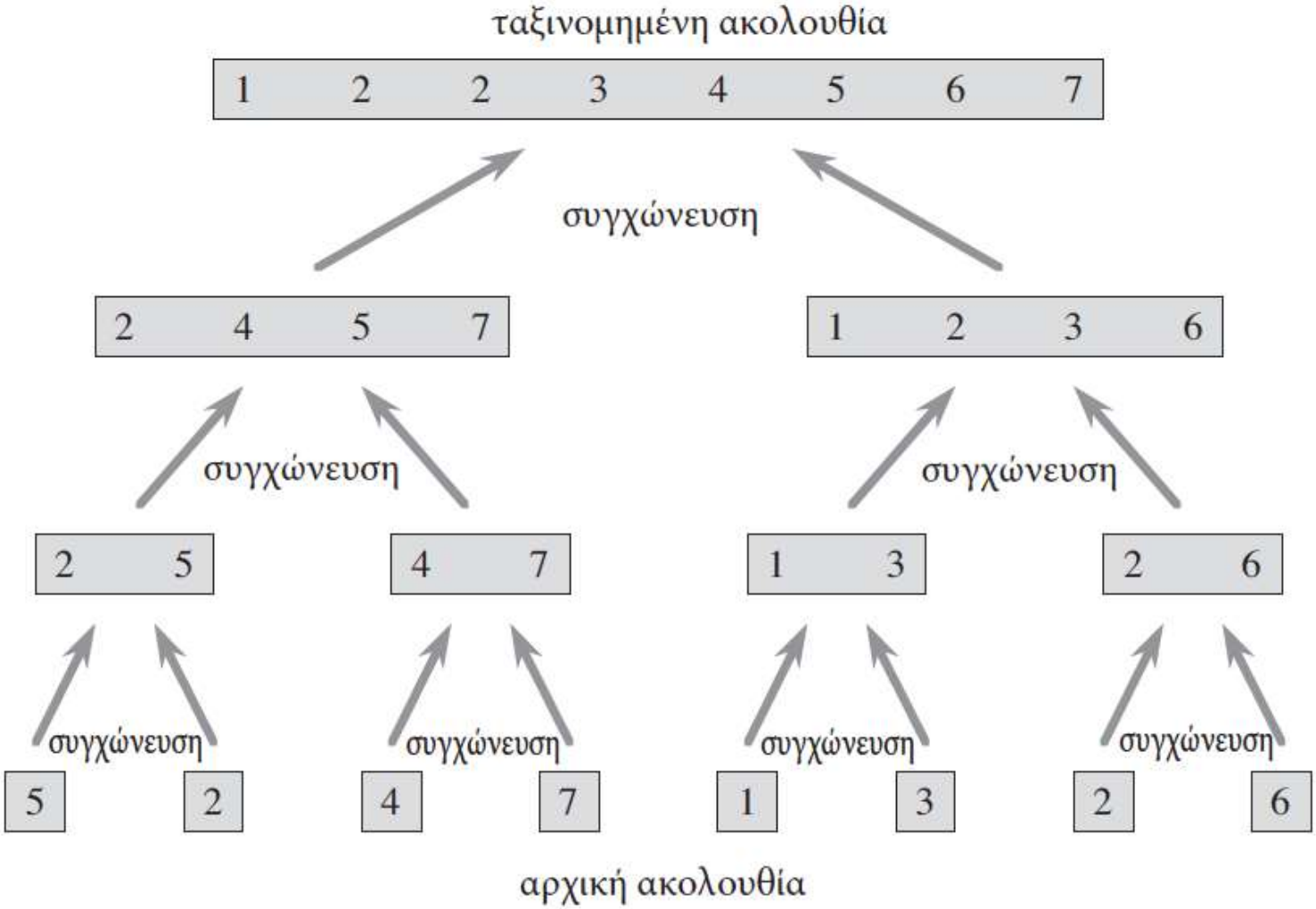
(g)



(h)



(i)



Σχήμα 2.4 Η λειτουργία της συγχωνευτικής ταξινόμησης στη συστοιχία $A = \langle 5, 2, 4, 7, 1, 3, 2, 6 \rangle$. Τα μήκη των συγχωνευόμενων ταξινομημένων ακολουθιών αυξάνονται διαδοχικά καθώς ο αλγόριθμος προχωρά σταδιακά από τη βάση προς την κορυφή.

Ανάλυση Συγχωνευτικής Ταξινόμησης

$T(n)$	**MERGE-SORT** $A[1 \,..\, n]$
$\Theta(1)$	1. If $n = 1$, done.
$2T(n/2)$	2. Recursively sort $A[\,1 \,..\, \lceil n/2 \rceil\,]$ and $A[\,\lceil n/2 \rceil + 1 \,..\, n\,]$.
$\Theta(n)$	3. "***Merge***" the 2 sorted lists.

Κανονικά, $T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor)$

αλλά τελικά προκύπτει ότι δεν έχει σημασία για τον προσδιορισμό της ασυμπτωτικής πολυπλοκότητας.

Αναδρομική σχέση για τη συγχωνευτική ταξινόμηση

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) \text{ αν } n = 1; \\ 2T(n/2) + \Theta(n) \text{ αν } n > 1. \end{cases}$$

- Συνήθως, θα παραλείπουμε να δηλώνουμε την περίπτωση βάσης όταν $T(n) = \Theta(1)$ για επαρκώς μικρό n, αλλά μόνο όταν αυτό δεν έχει επιπτώσεις στην ασυμπτωτική λύση της αναδρομής.
- Αργότερα, θα δούμε αρκετούς τρόπους για να βρούμε ένα καλό πάνω όριο για το χρόνο $T(n)$.

Δένδρο Αναδρομής

Επίλυση της $T(n) = 2T(n/2) + cn$, όταν $c > 0$ είναι σταθερά.

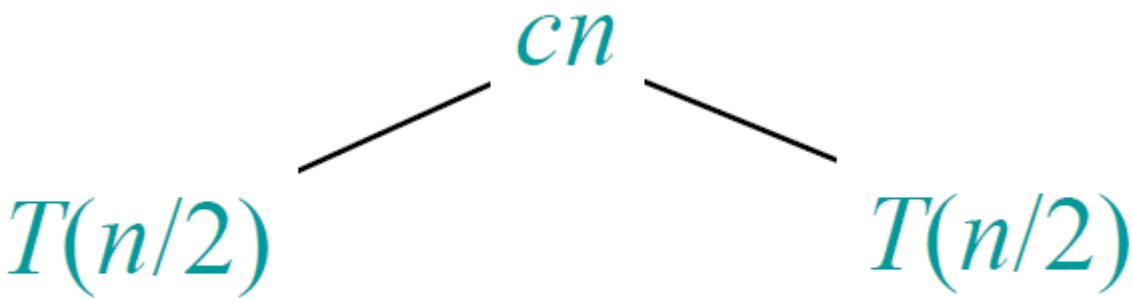
Δένδρο Αναδρομής

Επίλυση της $T(n) = 2T(n/2) + cn$, όταν $c > 0$ είναι σταθερά.

$T(n)$

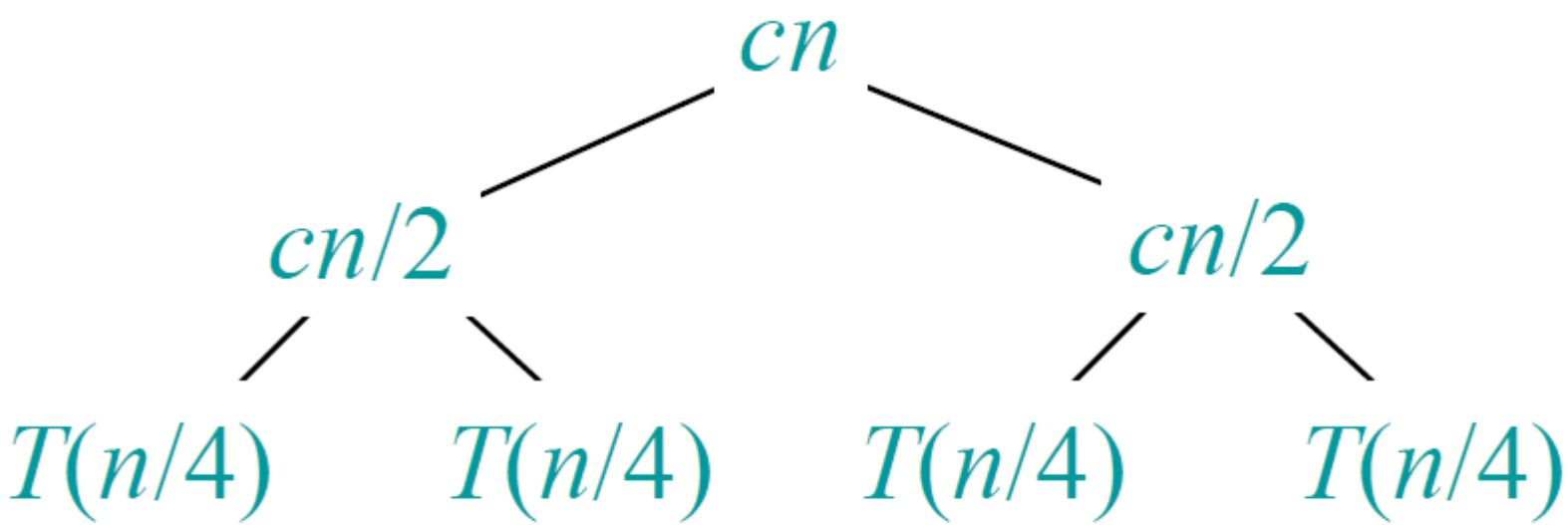
Δένδρο Αναδρομής

Επίλυση της $T(n) = 2T(n/2) + cn$, όταν $c > 0$ είναι σταθερά.



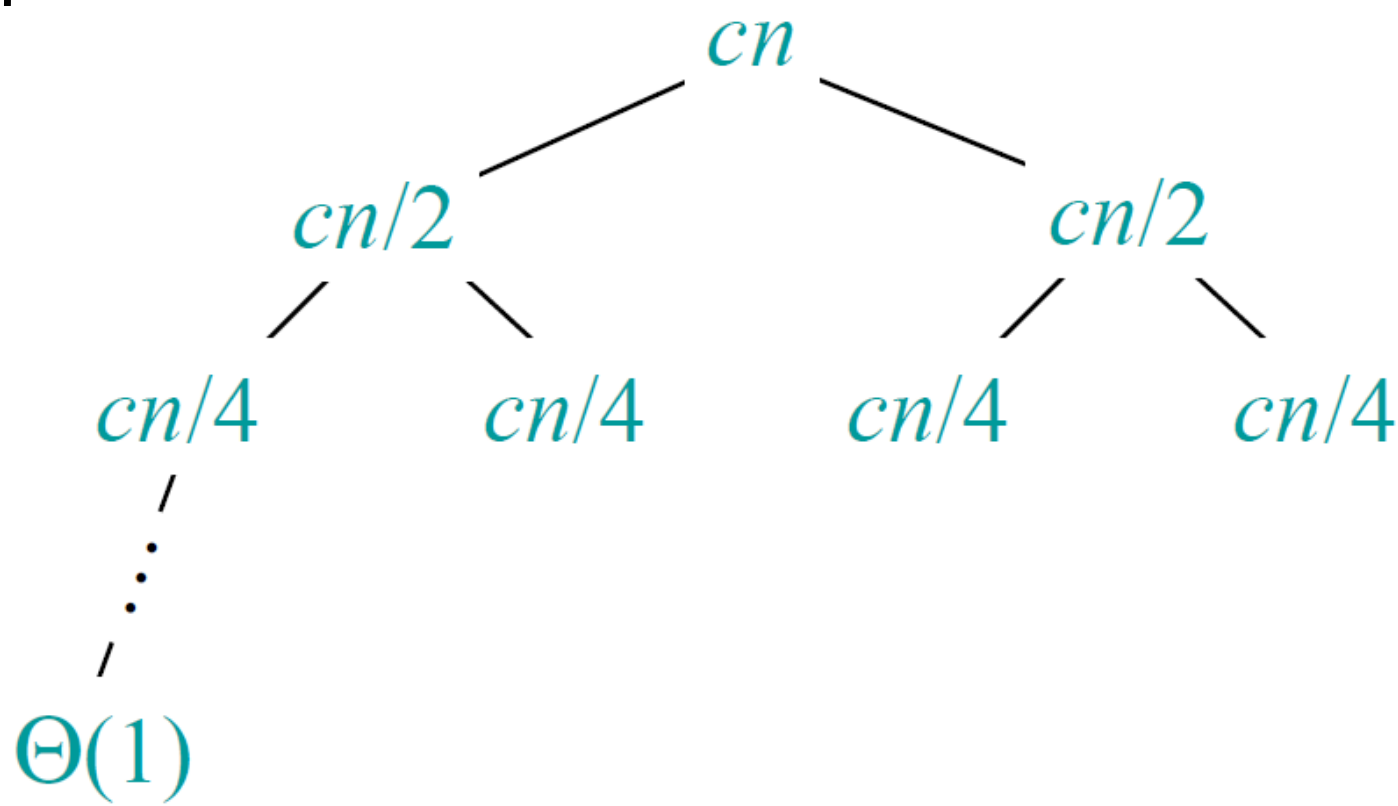
Δένδρο Αναδρομής

Επίλυση της $T(n) = 2T(n/2) + cn$, όταν $c > 0$ είναι σταθερά.



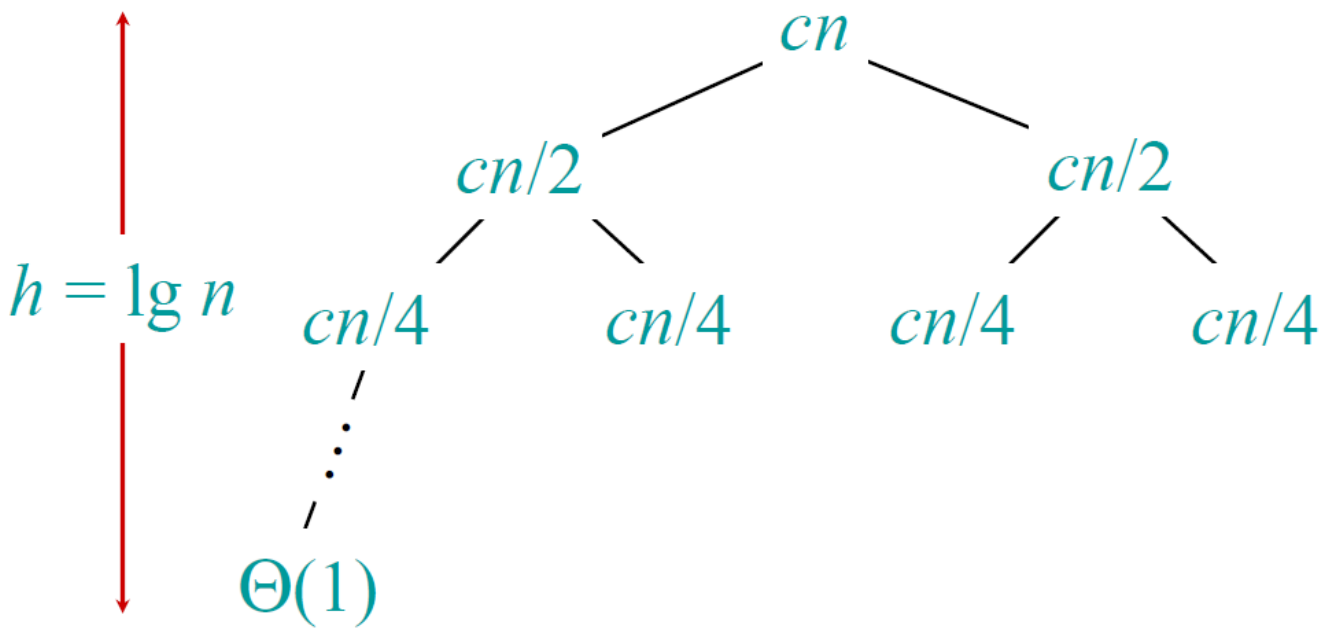
Δένδρο Αναδρομής

Επίλυση της $T(n) = 2T(n/2) + cn$, όταν $c > 0$ είναι σταθερά.

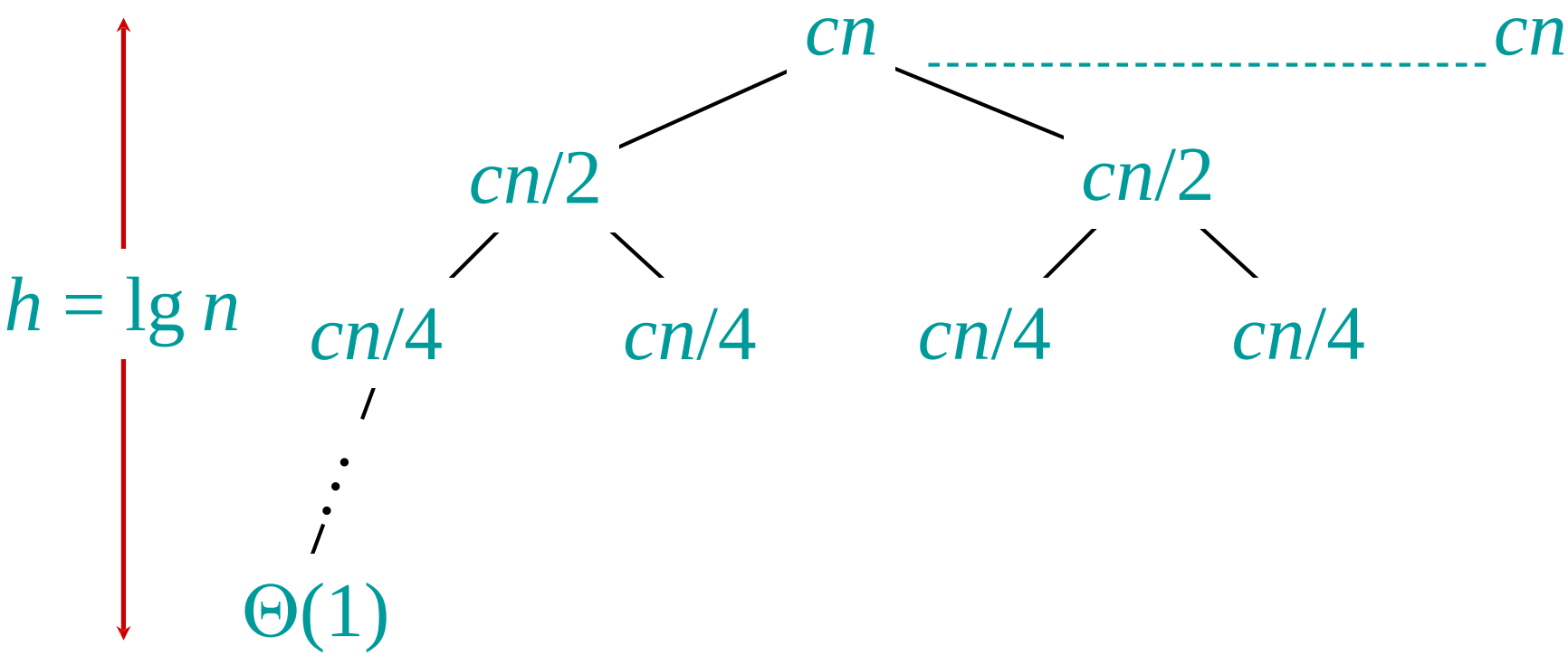


Δένδρο Αναδρομής

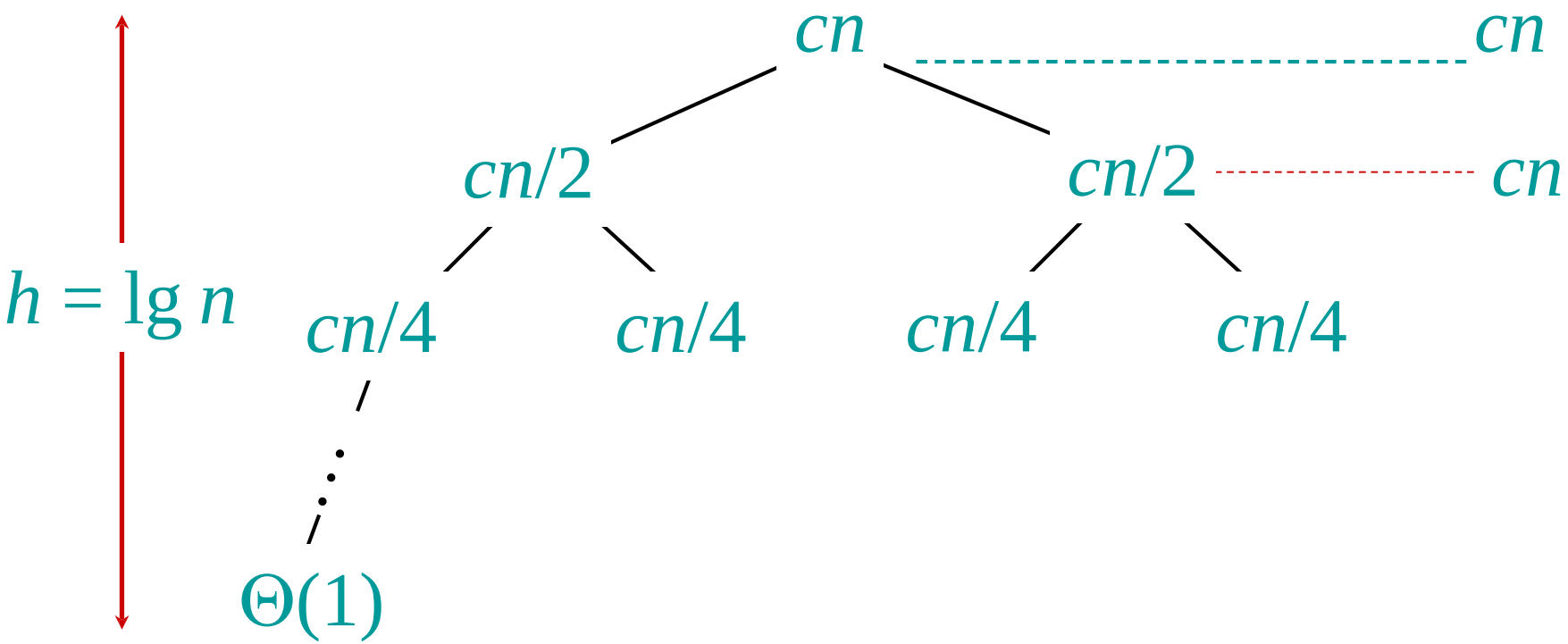
Επίλυση της $T(n) = 2T(n/2) + cn$, όταν $c > 0$ είναι σταθερά.



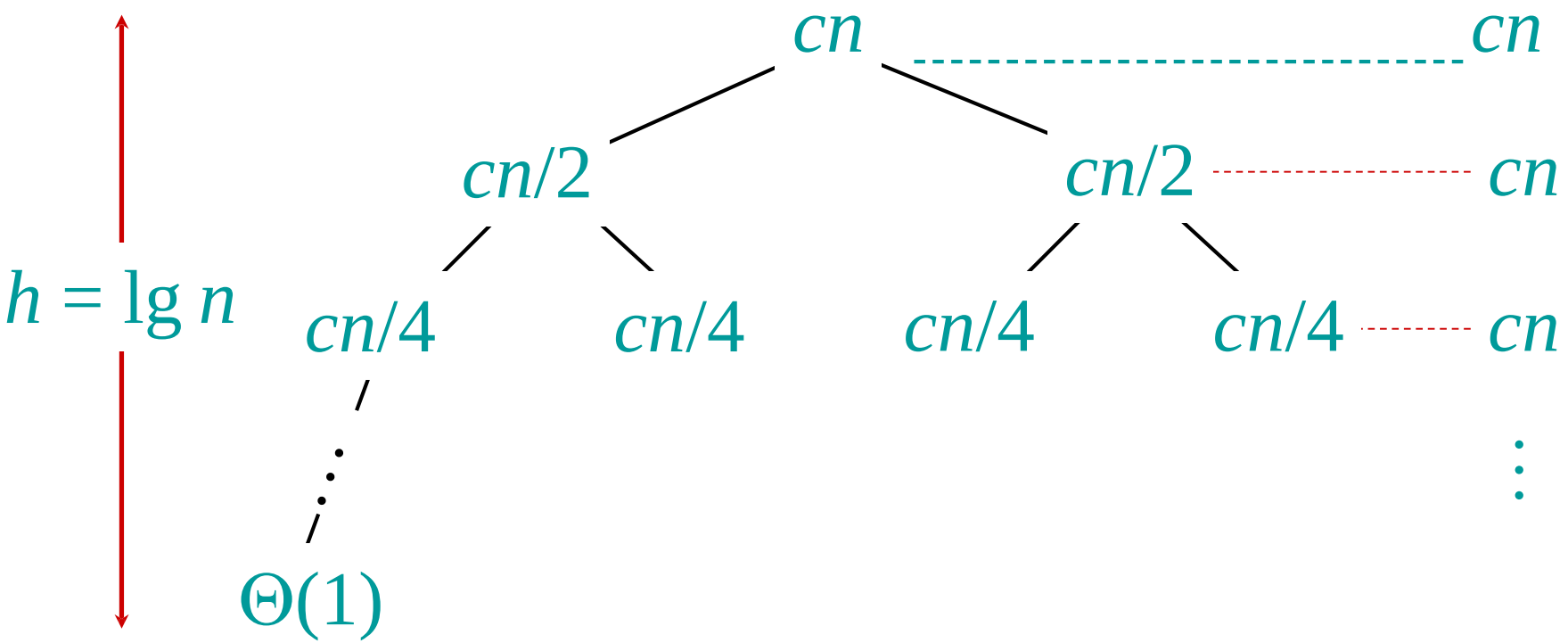
Δένδρο Αναδρομής



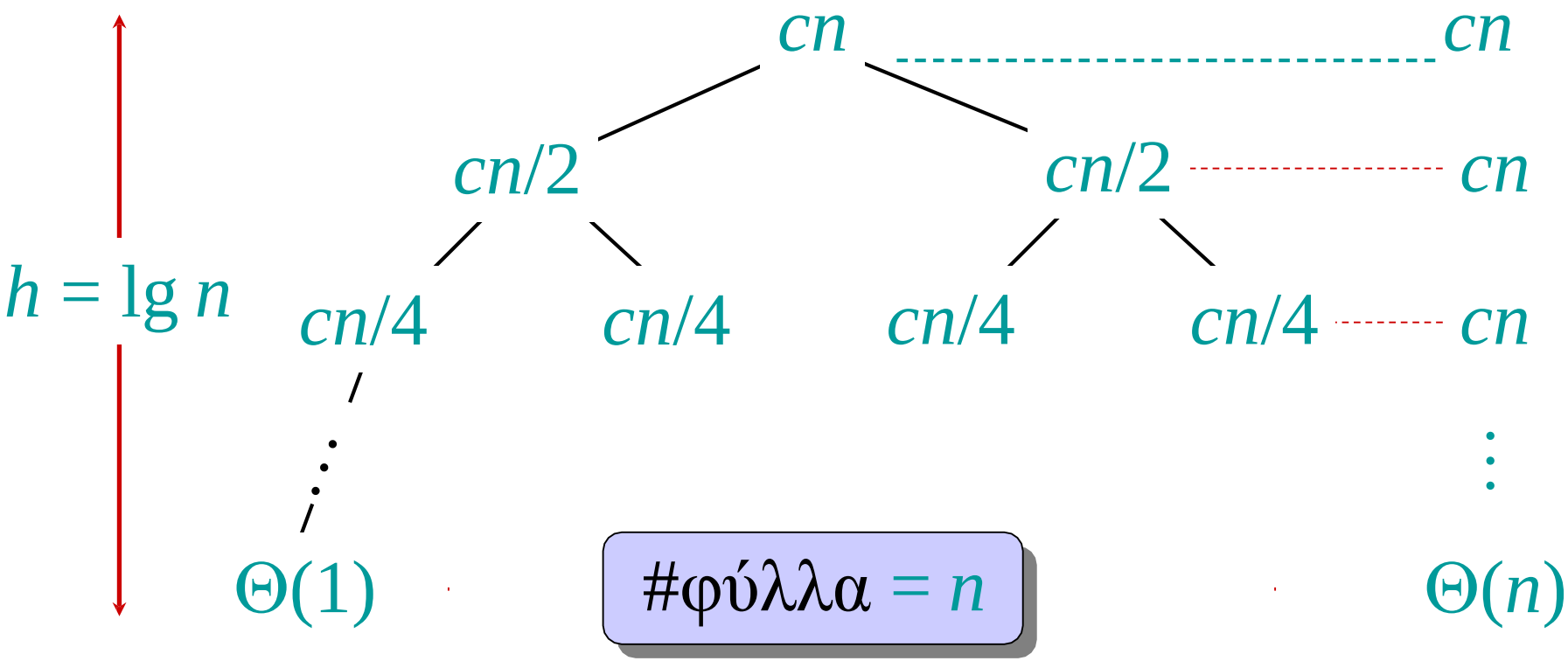
Δένδρο Αναδρομής



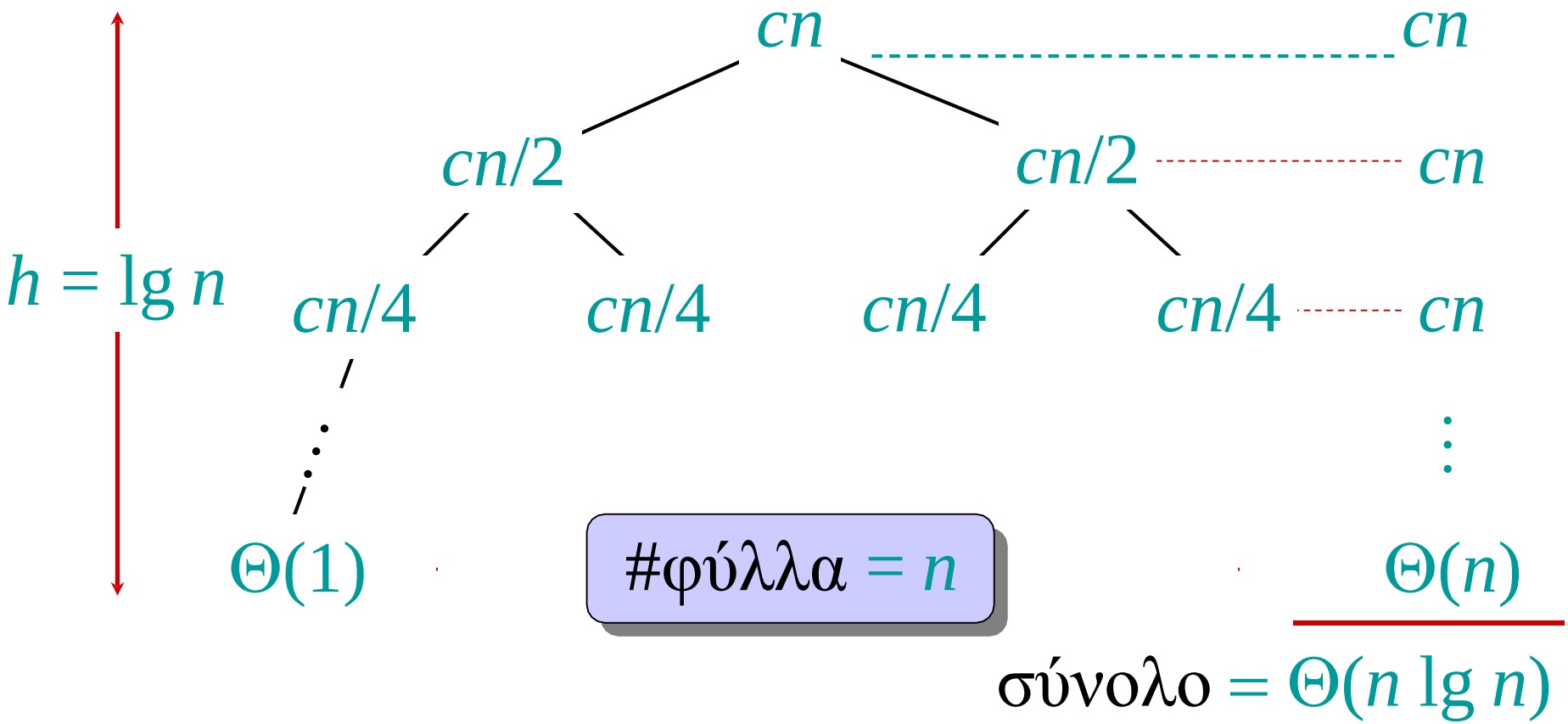
Δένδρο Αναδρομής



Δένδρο Αναδρομής



Δένδρο Αναδρομής



Συμπεράσματα

- $\Theta(n \lg n)$ αυξάνει πιο αργά από το $\Theta(n^2)$.
- Επομένως, η συγχωνευτική ταξινόμηση είναι ασυμπτωτικά καλύτερη από την ενθετική ταξινόμηση στη χειρότερη περίπτωση.
- Στην πράξη, η συγχωνευτική ταξινόμηση είναι καλύτερη από την ενθετική ταξινόμηση για $n > 30$.

	n	$n \log_2 n$	n^2	n^3	1.5^n	2^n	$n!$
$n = 10$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	4 sec
$n = 30$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	18 min	10^{25} years
$n = 50$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	11 min	36 years	very long
$n = 100$	< 1 sec	< 1 sec	< 1 sec	1 sec	12,892 years	10^{17} years	very long
$n = 1{,}000$	< 1 sec	< 1 sec	1 sec	18 min	very long	very long	very long
$n = 10{,}000$	< 1 sec	< 1 sec	2 min	12 days	very long	very long	very long
$n = 100{,}000$	< 1 sec	2 sec	3 hours	32 years	very long	very long	very long
$n = 1{,}000{,}000$	1 sec	20 sec	12 days	31,710 years	very long	very long	very long

- Χρόνοι εκτέλεσης αλγορίθμων σε επεξεργαστή που εκτελεί 1.000.000 εντολές υψηλού επιπέδου
- $>10^{25}$ χρόνια = very long time

Σταθερός Χρόνος

Σταθερός χρόνος. Ο χρόνος εκτέλεσης είναι $O(1)$.

Φράσσεται από μία σταθερά η οποία δεν εξαρτάται από το μέγεθος εισόδου n

Παραδείγματα.

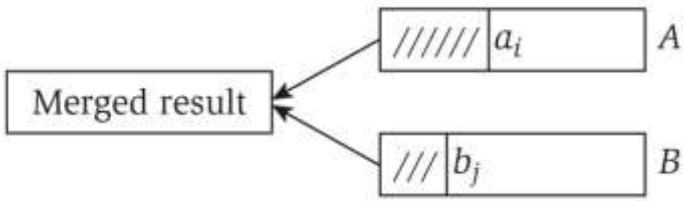
- Υπό συνθήκη διακλάδωση.
- Αριθμητική/Λογική λειτουργία.
- Πρόσβαση στο στοιχείο i στον πίνακα.
- Σύγκριση/ανταλλαγή δύο στοιχείων στον πίνακα.

Γραμμικός χρόνος

Γραμμικός χρόνος. Ο χρόνος εκτέλεσης είναι $O(n)$.

Συγχώνευση δύο ταξινομημένων λιστών. Συνδύασε δύο ταξινομημένες λίστες $A = a_1, a_2, \ldots, a_n$ και $B = b_1, b_2, \ldots, b_n$ σε μία ταξινομημένη λίστα.

$O(n)$ αλγόριθμος. Συγχώνευση στον mergesort.



$i \leftarrow 1$; $j \leftarrow 1$.

WHILE (both lists are nonempty)

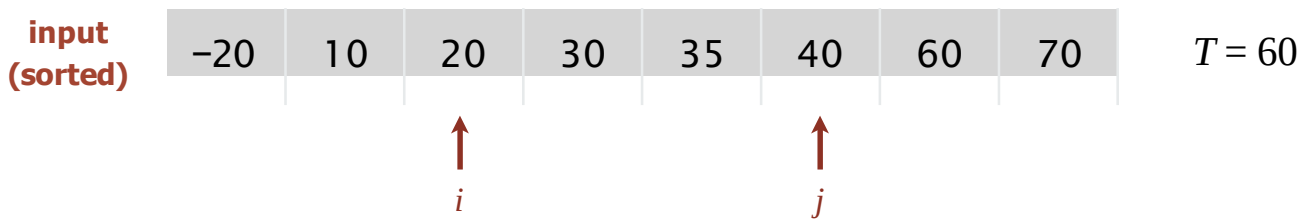
  IF ($a_i \leq b_j$) append a_i to output list and increment i.

  ELSE append b_j to output list and increment j.

Append remaining elements from nonempty list to output list.

TARGET SUM

TARGET-SUM. Δοθέντος ενός ταξινομημένου πίνακα n διαφορετικών ακεραίων και ένα ακέραιο T, βρες δύο με άθροισμα ακριβώς T.



Λογαριθμικός χρόνος

Λογαριθμικός χρόνος. Ο χρόνος εκτέλεση είναι $O(\log n)$.

Αναζήτηση σε ταξινομημένο πίνακα. Δοθέντος ενός ταξινομημένου πίνακα A n διαφορετικών ακεραίων και ένας ακέραιος x, βρες τον δείκτη του x στον πίνακα.

$O(\log n)$ algorithm. Δυαδική αναζήτηση.

Εναπομείναντα στοιχεία

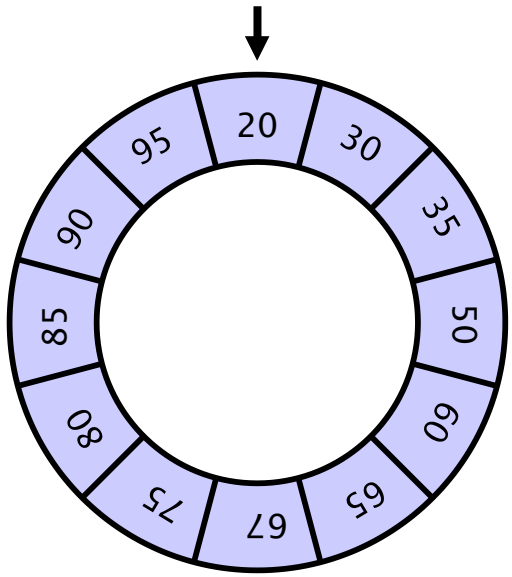
- Invariant: If x is in the array, then x is in $A[lo \,..\, hi]$.
- After k iterations of WHILE loop, $(hi - lo + 1) \le n / 2^k \Rightarrow k \le 1 + \log_2 n$.

```
lo ← 1; hi ← n.
WHILE (lo ≤ hi)
    mid ← ⌊(lo + hi) / 2⌋.
    IF      (x < A[mid]) hi ← mid − 1.
    ELSE IF (x > A[mid]) lo ← mid + 1.
    ELSE RETURN mid.
RETURN −1.
```

Αναζήτηση σε ένα ταξινομημένο περιστρεφόμενο πίνακα

SEARCH-IN-SORTED-ROTATED-ARRAY. Δοθέντος ενός περιστρεφόμενου ταξινομημένου πίνακα n διαφορετικών ακεραίων και ένα στοιχείο x, προσδιόρισε αν το x είναι στον πίνακα.

sorted circular array



sorted rotated array

80	85	90	95	20	30	35	50	60	65	67	75
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Γραμμό-λογαριθμικός χρόνος

Γραμμό-λογαριθμικός χρόνος. Ο χρόνος εκτέλεσης είναι $O(n \log n)$.

Ταξινόμηση. Δοθέντος ενός πίνακα n στοιχείων, αναδιάταξε τα στοιχεία σε αύξουσα σειρά.

$O(n \log n)$ αλγόριθμος. Mergesort.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
M	E	R	G	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
E	M	R	G	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
E	M	G	R	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
E	G	M	R	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
E	G	M	R	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
E	G	M	R	E	S	O	R	T	E	X	A	M	P	L	E
E	G	M	R	E	O	R	S	T	E	X	A	M	P	L	E
E	E	G	M	O	R	R	S	T	E	X	A	M	P	L	E
E	E	G	M	O	R	R	S	E	T	X	A	M	P	L	E
E	E	G	M	O	R	R	S	E	T	A	X	M	P	L	E
E	E	G	M	O	R	R	S	A	E	T	X	M	P	L	E
E	E	G	M	O	R	R	S	A	E	T	X	M	P	L	E
E	E	G	M	O	R	R	S	A	E	T	X	M	P	E	L
E	E	G	M	O	R	R	S	A	E	T	X	E	L	M	P
E	E	G	M	O	R	R	S	A	E	E	L	M	P	T	X
A	E	E	E	E	G	L	M	M	O	P	R	R	S	T	X

LARGEST-EMPTY-INTERVAL. Δοθέντων n χρονικών στιγμών $x_1, \ldots, x_n$ κατά τις οποίες αντίγραφα του ίδιου αρχείου φτάνει σε ένα server, ποιο είναι το μεγαλύτερο διάστημα στο οποίο κανένα αντίγραφο του αρχείου δεν φτάνει;

Τετραγωνικός χρόνος

Τετραγωνικός χρόνος. Ο χρόνος εκτέλεσης είναι $O(n^2)$.

Το πλησιέστερο ζεύγος σημείων. Δοθείσης μίας λίστας n σημείων σε ένα επίπεδο $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, βρες το ζεύγος των σημείων που είναι πιο κοντά σε σχέση με τα υπόλοιπα σημεία.

$O(n^2)$ algorithm. Απαρίθμησε όλα τα ζεύγη των σημείων (με $i < j$).

```
min ← ∞.
FOR i = 1 TO n
    FOR j = i + 1 TO n
        d ← (x_i − x_j)^2 + (y_i − y_j)^2.
        IF (d < min)
            min ← d.
```

Παρατήρηση. $\Omega(n^2)$ φαίνεται αναπόφευκτο, αλλά αυτό δεν είναι αληθές.

Κυβικός χρόνος

Κυβικός χρόνος. Ο χρόνος εκτέλεσης είναι $O(n^3)$.

3-SUM. Δοθέντος ενός πίνακα n διαφορετικών ακεραίων, βρες τρεις αριθμούς που δίνουν άθροισμα 0.

$O(n^3)$ αλγόριθμος. Απαρίθμησε όλες τις τριάδες (with $i < j < k$).

```
FOR i = 1 TO n
   FOR j = i + 1 TO n
      FOR k = j + 1 TO n
      IF (a_i + a_j + a_k = 0)
         RETURN (a_i, a_j, a_k).
```


Παρατήρηση. $\Omega(n^3)$ φαίνεται αναπόφευκτο, but $O(n^2)$ είναι εφικτό.

3-SUM

3-SUM. Δοθέντος ενός πίνακα n διαφορετικών ακεραίων, βρες τρία στοιχεία τα οποία αθροίζουν σε 0.

$O(n^3)$ αλγόριθμος. Δοκίμασε όλες τις τριάδες.

$O(n^2)$ αλγόριθμος.

Πολυωνυμικός Χρόνος

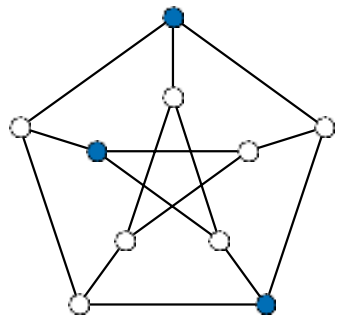
Πολυωνυμικός χρόνος. Ο χρόνος εκτέλεσης είναι $O(n^k)$ για κάποια σταθερά $k > 0$.

Ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k. Δοθέντος ενός γραφήματος, βρες k κόμβοι τέτοιοι ώστε να μην υπάρχουν δύο που να ενώνονται με μία ακμή.

k είναι σταθερά

$O(n^k)$ αλγόριθμος. Απαρίθμησε όλα τα υποσύνολα k κόμβων.

FOREACH subset S of k nodes:
  Check whether S is an independent set.
  IF (S is an independent set)
    RETURN S.



independent set of size 3

- Ο ελεγχος αν S είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k παίρνει χρόνο $O(k^2)$.
- Πλήθος υποσυνόλων k στοιχείων = $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}{k(k-1)(k-2) \times \cdots \times 1} := \frac{n^k}{k!}$
- $O(k^2 n^k / k!) = O(n^k)$.

Πολυωνυμικός χρόνος για $k = 17$, αλλά δεν είναι πρακτικός

Εκθετικός χρόνος

Εκθετικός χρόνος. Ο χρόνος εκτέλεσης είναι $O(2^{n^k})$ για κάποια σταθερά $k > 0$.

Ανεξάρτητο σύνολο. Δοθέντος ενός γραφήματος, βρες ένα ανεξάρτητο σύνολο μέγιστου πλήθους.

$O(n^2\, 2^n)$ αλγόριθμος. Απαρίθμησε όλα τα υποσύνολα των n στοιχείων.

$S^* \leftarrow \varnothing$.

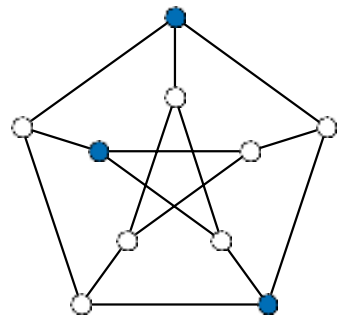
FOREACH subset S of n nodes:

  Check whether S is an independent set.

  IF (S is an independent set and $|S| > |S^*|$)

    $S^* \leftarrow S$.

RETURN S^*.



Ανεξάρτητο σύνολο μεγίστου πλήθους

Εκθετικός χρόνος

Εκθετικός χρόνος. Ο χρόνος εκτέλεσης είναι $O(2^{n^k})$ για κάποια σταθερά $k > 0$.

Ευκλείδειο TSP. Δοθέντων n σημείων στο επίπεδο, βρες μία κυκλική διαδρομή ελαχίστου μήκους.

$O(n \times n!)$ αλγόριθμος. Απαρίθμησε όλες τις μεταθέσεις μήκους n.

$\pi^* \leftarrow \varnothing$.

FOREACH permutation π of n points:

  Compute length of tour corresponding to π.

  IF (length(π) < length(π^*))

    $\pi^* \leftarrow \pi$.

RETURN π^*.