

Οι διαφάνειες βασίζονται σε αυτές του
ακόλουθου μαθήματος:

Introduction to Algorithms (6-046J), MIT

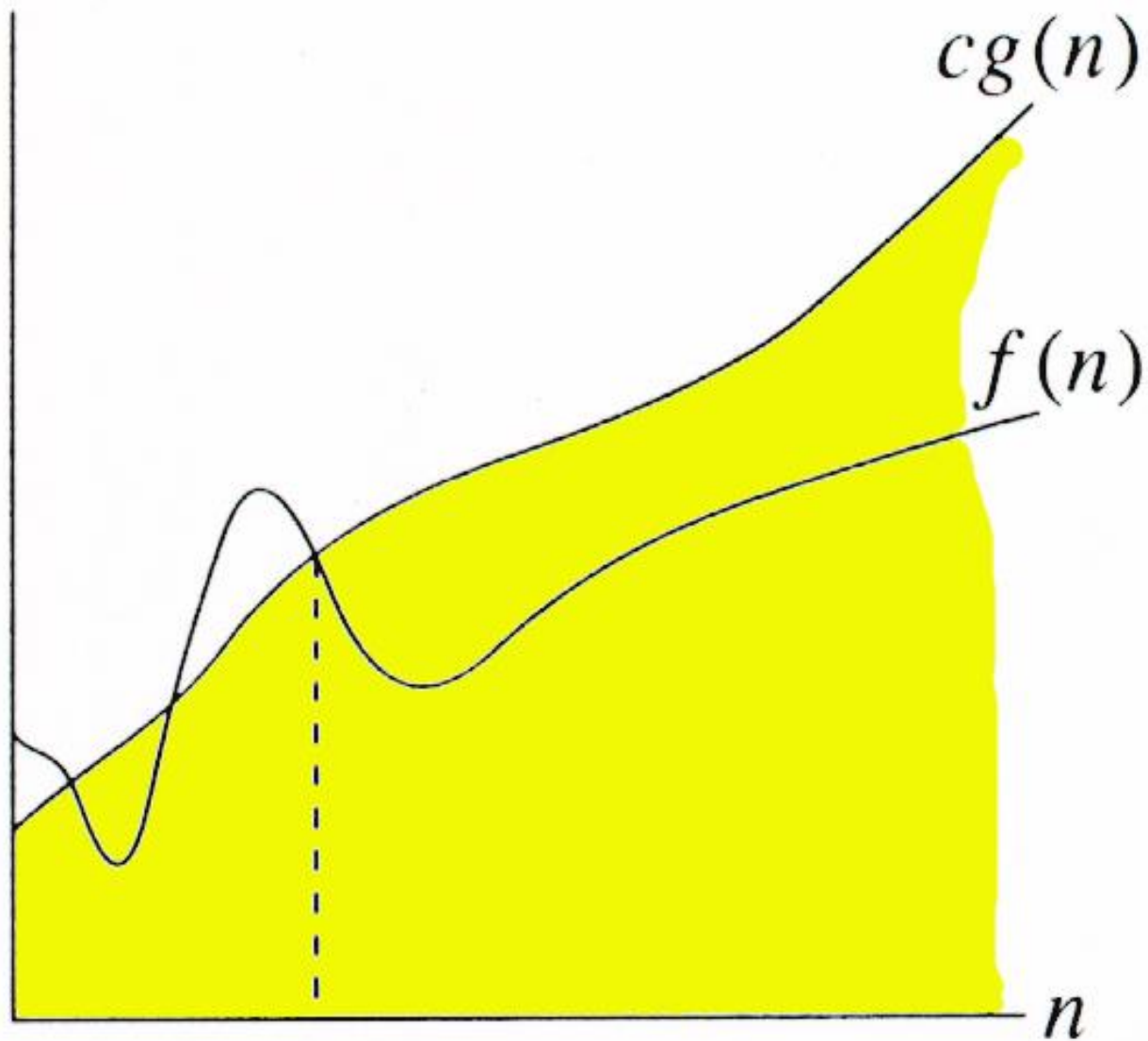
[https://ocw.mit.edu/courses/electrical-
engineering-and-computer-science/6-046j-
introduction-to-algorithms-sma-5503-fall-2005/](https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-046j-introduction-to-algorithms-sma-5503-fall-2005/)

Οι διαφάνειες του ανωτέρω μαθήματος
δίνονται υπό την άδεια «Creative Commons
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0»

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Συμβολισμός O (πάνω όρια):

Γράφουμε $f(n) = O(g(n))$ αν υπάρχουν σταθερές $c > 0, n_0 > 0$ τέτοιες ώστε $0 \leq f(n) \leq c g(n)$
 $n \geq n_0$



$$n_0 \quad f(n) = O(g(n))$$

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Συμβολισμός O (πάνω όρια):

Γράφουμε $f(n) = O(g(n))$ αν υπάρχουν σταθερές $c > 0, n_0 > 0$ τέτοιες ώστε $0 \leq f(n) \leq c g(n)$
 $n \geq n_0$

Παράδειγμα: $2n^2 = O(n^3)$ ($c = 1, n_0 = 2$)

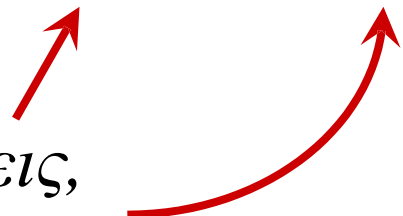
Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Συμβολισμός O (πάνω όρια):

Γράφουμε $f(n) = O(g(n))$ αν υπάρχουν σταθερές $c > 0, n_0 > 0$ τέτοιες ώστε $0 \leq f(n) \leq cg(n)$
 $n \geq n_0$

Παράδειγμα: $2n^2 = O(n^3)$ ($c = 1, n_0 = 2$)

συναρτήσεις,
όχι τιμές



Συμβολισμός O – Ορισμός ως Σύνολο

$O(g(n)) = \{f(n) : \text{υπάρχουν σταθερές } c > 0, n_0 > 0 \text{ τέτοιες ώστε } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ για όλα τα } n > n_0\}$

Παράδειγμα: $2n^2 \in O(n^3)$

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Σύμβαση: Ένα σύνολο σε μια εξίσωση αντιπροσωπεύει μία «ανώνυμη» συνάρτηση από το σύνολο

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Σύμβαση: Ένα σύνολο σε μια εξίσωση αντιπροσωπεύει μία «ανώνυμη» συνάρτηση από το σύνολο

Παράδειγμα: $f(n) = n^3 + O(n^2)$

σημαίνει

$$f(n) = n^3 + h(n)$$

για κάποιο $h(n) \in O(n^2)$.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Σύμβαση: Ένα σύνολο σε μια εξίσωση αντιπροσωπεύει μία «ανώνυμη» συνάρτηση από το σύνολο

Παράδειγμα: $n^2 + O(n) = O(n^2)$

σημαίνει

για οποιαδήποτε $f(n) \in O(n)$:

$$n^2 + f(n) = h(n)$$

για κάποια $h(n) \in O(n^2)$.

Συμβολισμός Ω (κάτω όρια)

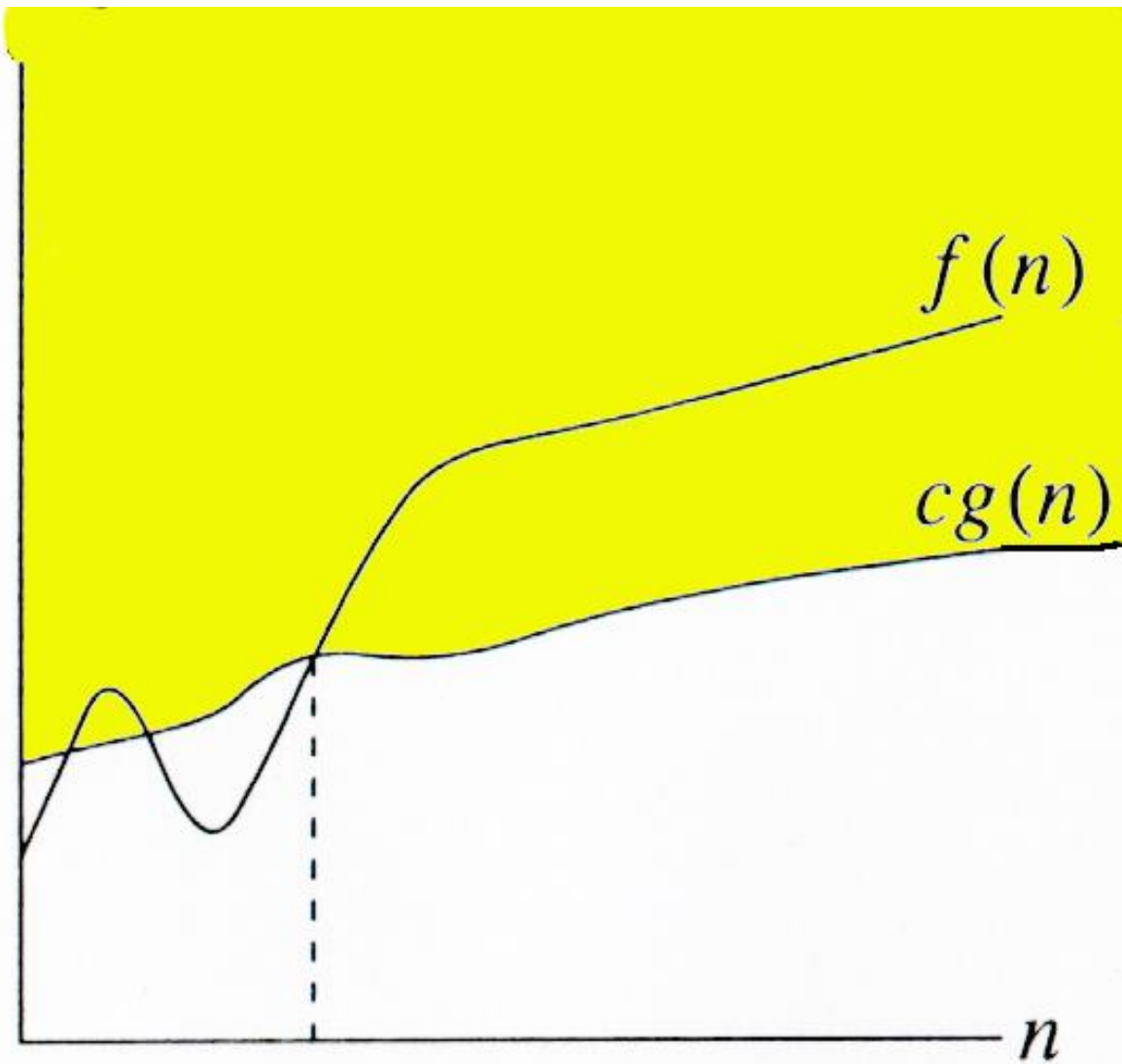
- Ο συμβολισμός O χρησιμοποιείται για να δηλώσει πάνω όρια.
- Δεν έχει νόημα να πούμε ότι η $f(n)$ είναι τουλάχιστον $O(n^2)$.

Συμβολισμός Ω (κάτω όρια)

- Ο συμβολισμός O χρησιμοποιείται για να δηλώσει πάνω όρια.
- Δεν έχει νόημα να πούμε ότι η $f(n)$ είναι τουλάχιστον $O(n^2)$.

$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{υπάρχουν σταθερές } c > 0, n_0 > 0 \text{ τέτοιες ώστε } 0 \leq c g(n) \leq f(n) \text{ για όλα τα } n > n_0\}$

Παράδειγμα: $\sqrt{n} = \Omega(\lg n)$ ($c = 1, n_0 = 16$)

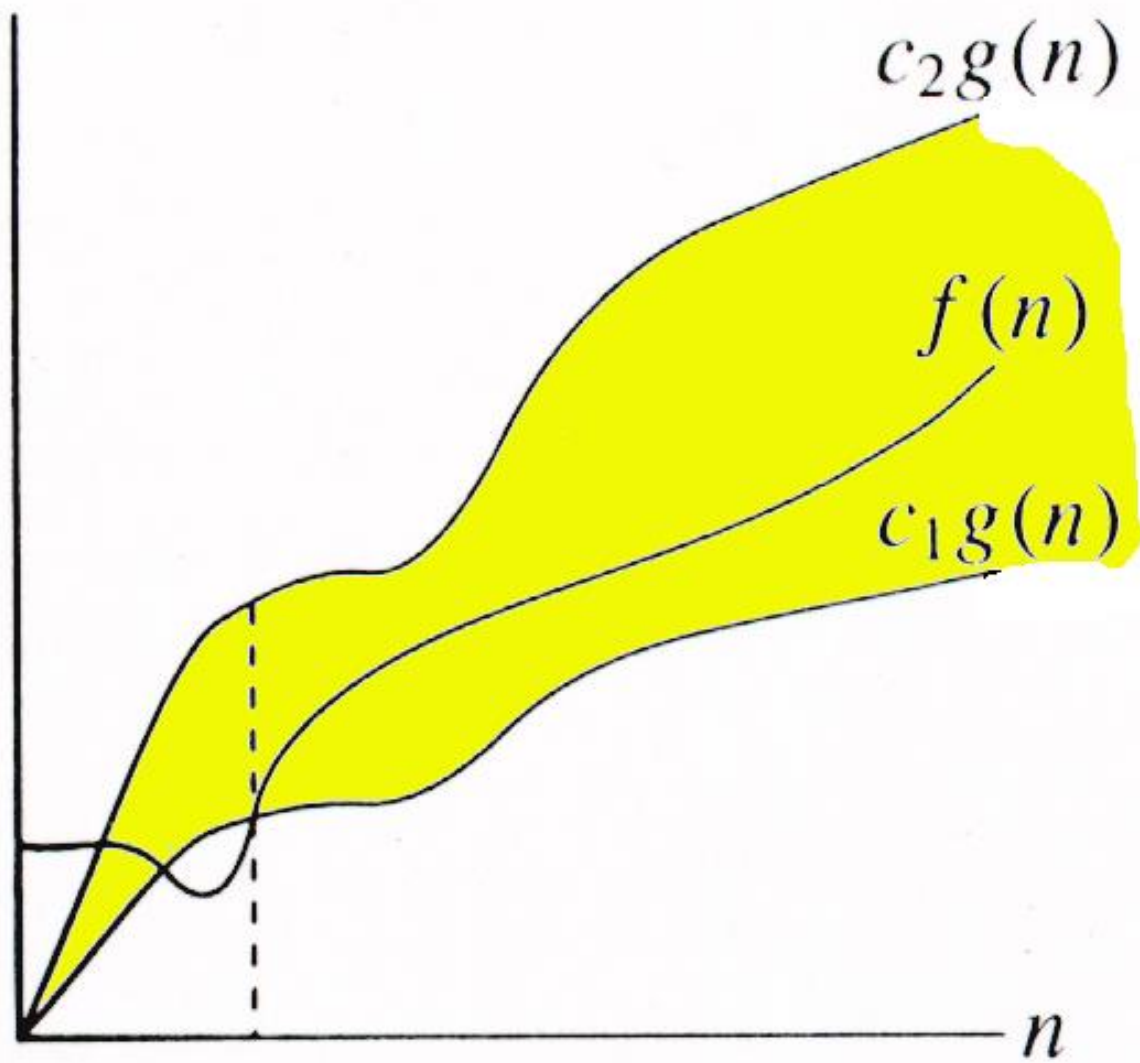


n_0 $f(n) = \Omega(g(n))$

Συμβολισμός Θ («σφιχτά όρια»)

$$\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$$

Παράδειγμα: $\frac{1}{2}n^2 - 2n = \Theta(n^2)$



n_0

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

Συμβολισμός ο και ω

Συμβολισμός O και Ω είναι όπως \leq και \geq .
Συμβολισμός o και ω είναι όπως το $<$ και $>$.

$o(g(n)) = \{f(n) : \text{για οποιαδήποτε σταθερά } c > 0, \text{ υπάρχει μία σταθερά } n_0 > 0 \text{ τέτοια ώστε } 0 \leq f(n) < cg(n) \text{ για όλα τα } n \geq n_0.\}$

Παράδειγμα: $2n^2 = o(n^3)$ ($n_0 = 2/c$)

Συμβολισμός ο και ω

Συμβολισμός O και Ω είναι όπως \leq και \geq .

Συμβολισμός o και ω είναι όπως το $<$ και $>$.

$\omega(g(n)) = \{f(n) : \text{για οποιαδήποτε σταθερά } c > 0, \text{ υπάρχει μία σταθερά } n_0 > 0 \text{ τέτοια ώστε } 0 \leq cg(n) < f(n) \text{ για όλα τα } n \geq n_0.\}$

Παράδειγμα: $\sqrt{n} = \omega(\lg n)$ ($n_0 = 1 + 1/c$)

Επίλυση αναδρομικών εξισώσεων

- Η ανάλυση της συγχωνευτικής ταξινόμησης απαίτησε την επίλυση αναδρομικής εξίσωσης
- Όπως και στην εύρεση των ολοκληρωμάτων ή στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων, χρειάζονται κάποια «κόλπα».
- Εφαρμογή των αναδρομικών εξισώσεων στους αλγορίθμους διαίρει και βασίλευε.

Η μέθοδος της αντικατάστασης

Η πιο γενική μέθοδος:

- 1. Μάντεψε* τον τύπο της λύσης
- 2. Εξακρίβωσε* με επαγωγή.
- 3. Επίλυσε* για σταθερές.

Η μέθοδος της αντικατάστασης

Η πιο γενική μέθοδος:

1. **Μάντεψε** τον τύπο της λύσης
2. **Εξακρίβωσε** με επαγωγή.
3. **Επίλυσε** για σταθερές.

Παράδειγμα: $T(n) = 4T(n/2) + n$

- [Υποθέτουμε ότι $T(1) = \Theta(1)$.]
- Μάντεψε $O(n^3)$.(Απόδειξε O και Ω ξεχωριστά.)
- Υπόθεσε ότι $T(k) \leq ck^3$ για $k < n$.
- Απόδειξε ότι $T(n) \leq cn^3$ με επαγωγή.

Παράδειγμα αντικατάστασης

$$T(n) = 4T(n/2) + n$$

$$\leq 4c(n/2)^3 + n$$

$$= (c/2)n^3 + n$$

$$= cn^3 - ((c/2)n^3 - n) \leftarrow \text{επιθυμητό} - \text{υπόλοιπο}$$

$$\leq cn^3 \leftarrow \text{επιθυμητό}$$

Οποτεδήποτε $(c/2)n^3 - n \geq 0$, για παράδειγμα, αν $c \geq 2$ και $n \geq 1$.

\swarrow
υπόλοιπο

Παράδειγμα (συν.)

- Θα πρέπει να χειριστούμε τις αρχικές συνθήκες.
 - **Βάση:** $T(n) = \Theta(1)$ για όλα τα $n < n_0$, όπου n_0 είναι μία κατάλληλη σταθερά.
 - Για $1 \leq n < n_0$, έχουμε “ $\Theta(1)$ ” $\leq cn^3$, αν διαλέξουμε c αρκετά μεγάλο.
-

Αυτό το όριο δεν είναι «σφιχτό».

Ένα πιο σφιχτό πάνω όριο

Θα αποδείξουμε ότι $T(n) = O(n^2)$.

Υποθέτουμε ότι $T(k) \leq ck^2$ για $k < n$:

$$T(n) = 4T(n/2) + n$$

$$\leq 4c(n/2)^2 + n$$

$$= cn^2 + n$$

$$= \cancel{O(n^2)} \text{ Λάθος!}$$

$$= cn^2 - (-n) \quad [\text{επιθυμητό} - \text{υπόλοιπο}]$$

$$\leq cn^2 \quad \text{Δεν ισχύει για καμία επιλογή } c > 0.$$

Ένα πιο σφιχτό πάνω όριο

ΙΔΕΑ: Ενισχύουμε την υπόθεση επαγωγής.

- Αφαιρούμε ένα χαμηλότερης τάξης όρο.

Υπόθεση επαγωγής: $T(k) \leq c_1k^2 - c_2k$ για $k < n$.

Ένα πιο σφιχτό πάνω όριο

ΙΔΕΑ: Ενισχύουμε την υπόθεση επαγωγής.

- Αφαιρούμε ένα χαμηλότερης τάξης όρο.

Υπόθεση επαγωγής: $T(k) \leq c_1 k^2 - c_2 k$ για $k < n$.

$$\begin{aligned} T(n) &= 4T(n/2) + n \\ &= 4(c_1(n/2)^2 - c_2(n/2)) + n \\ &= c_1 n^2 - 2c_2 n + n \\ &= c_1 n^2 - c_2 n - (c_2 n - n) \\ &\leq c_1 n^2 - c_2 n \quad \text{αν } c_2 \geq 1. \end{aligned}$$

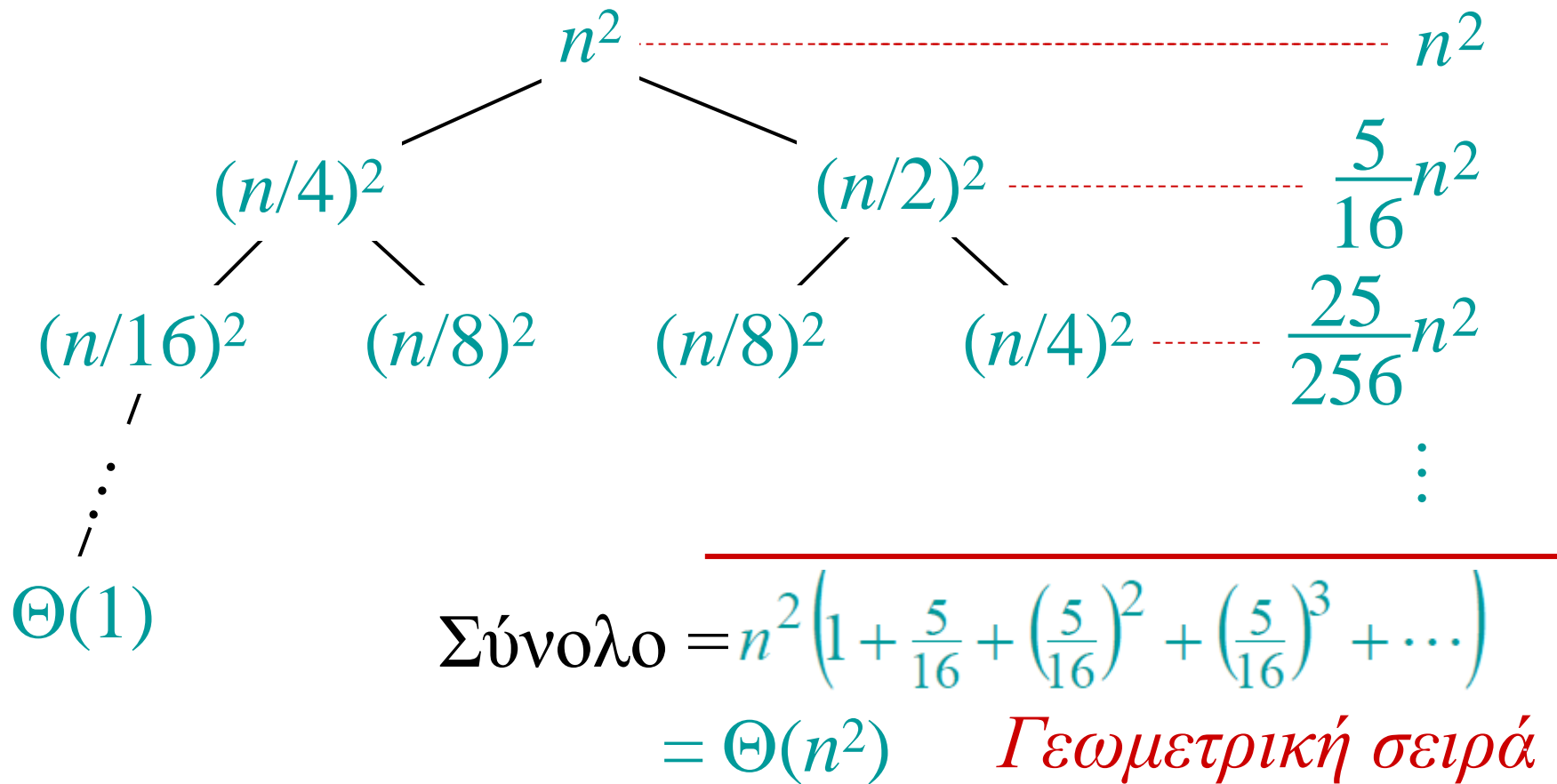
Διάλεξε το c_1 αρκετά μεγάλο για να χειριστείς τις αρχικές συνθήκες.

Μέθοδος δένδρου Αναδρομής

- Ένα δένδρο αναδρομής μοντελοποιεί τα κόστη (χρόνος) μίας αναδρομικής εκτέλεσης του αλγορίθμου.
- Το δένδρο αναδρομής είναι καλό για να μαντεύει κανείς τον τελικό τύπο για τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Παράδειγμα δένδρου αναδρομής

Επίλυση της $T(n) = T(n/4) + T(n/2) + n^2$:



Η μέθοδος του κυρίαρχου όρου

Η μέθοδος του κυρίαρχου όρου εφαρμόζεται στις αναδρομικές σχέσεις της μορφής

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) ,$$

όπου $a \geq 1$, $b > 1$, και f είναι ασυμπτωτικά θετική.

Τρεις συχνές περιπτώσεις

Σύγκρινε $f(n)$ με $n^{\log_b a}$:

1. $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ για κάποια σταθερά $\varepsilon > 0$.

- $f(n)$ αυξάνει αργότερα σε σχέση με το $n^{\log_b a}$ (κατά ένα όρο n^ε).

Λύση: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ για κάποια σταθερά $k \geq 0$.

- $f(n)$ και $n^{\log_b a}$ αυξάνονται με τον ίδιο ρυθμό.

Λύση: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$.

Τρεις συχνές περιπτώσεις (συν.)

3. $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ για κάποια σταθερά $\varepsilon > 0$.

- $f(n)$ αυξάνεται γρηγορότερα από την $n^{\log_b a}$ (κατά ένα όρο n^ε),

και η $f(n)$ ικανοποιεί τη **συνθήκη κανονικότητας** ότι $af(n/b) \leq cf(n)$ για κάποια σταθερά $c < 1$.

Λύση: $T(n) = \Theta(f(n))$.

Παραδείγματα

$$T(n) = 4T(n/2) + n$$

$$a = 4, b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2; f(n) = n.$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: $f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$ για $\varepsilon = 1$.

$$\therefore T(n) = \Theta(n^2).$$

$$T(n) = 4T(n/2) + n^2$$

$$a = 4, b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2; f(n) = n^2.$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: $f(n) = \Theta(n^2 \lg^0 n)$, δηλ., $k = 0$.

$$\therefore T(n) = \Theta(n^2 \lg n).$$

Παραδείγματα

$$T(n) = 4T(n/2) + n^3$$

$$a = 4, b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2; f(n) = n^3.$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: $f(n) = \Omega(n^{2+\varepsilon})$ for $\varepsilon = 1$

και $4(n/2)^3 \leq cn^3$ (συνθ. κανον.) for $c = 1/2$.

$$\therefore T(n) = \Theta(n^3).$$

Παραδείγματα

$$T(n) = 4T(n/2) + n^2/\lg n$$

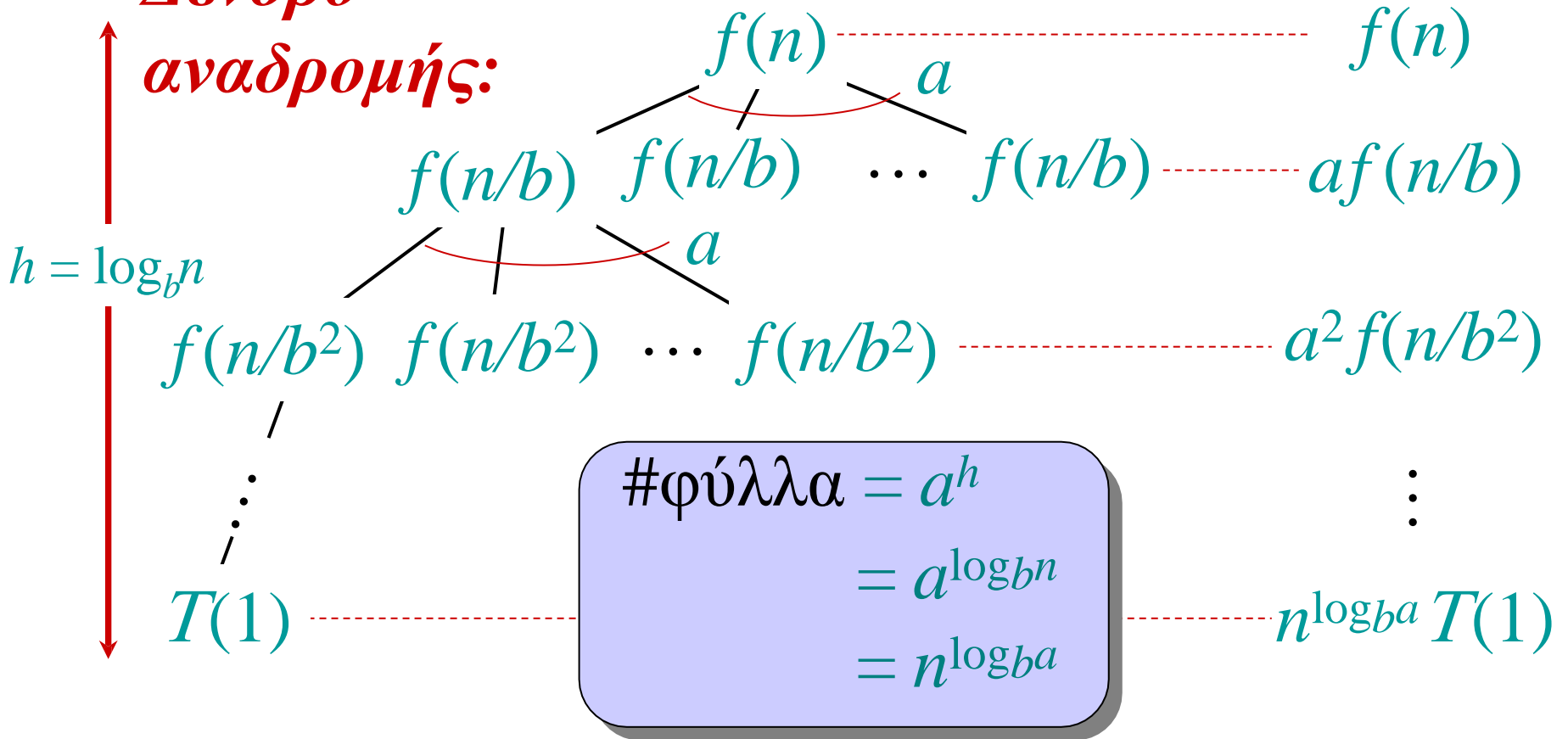
$$a = 4, b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2; f(n) = n^2/\lg n.$$

Η μέθοδος του κυρίαρχου όρου δεν μπορεί να εφαρμοσθεί. Συγκεκριμένα, για κάθε σταθερά $\varepsilon > 0$ έχουμε $n^\varepsilon = \omega(\lg n)$.

Η ιδέα του θεωρήματος κυρίαρχου όρου

Δένδρο

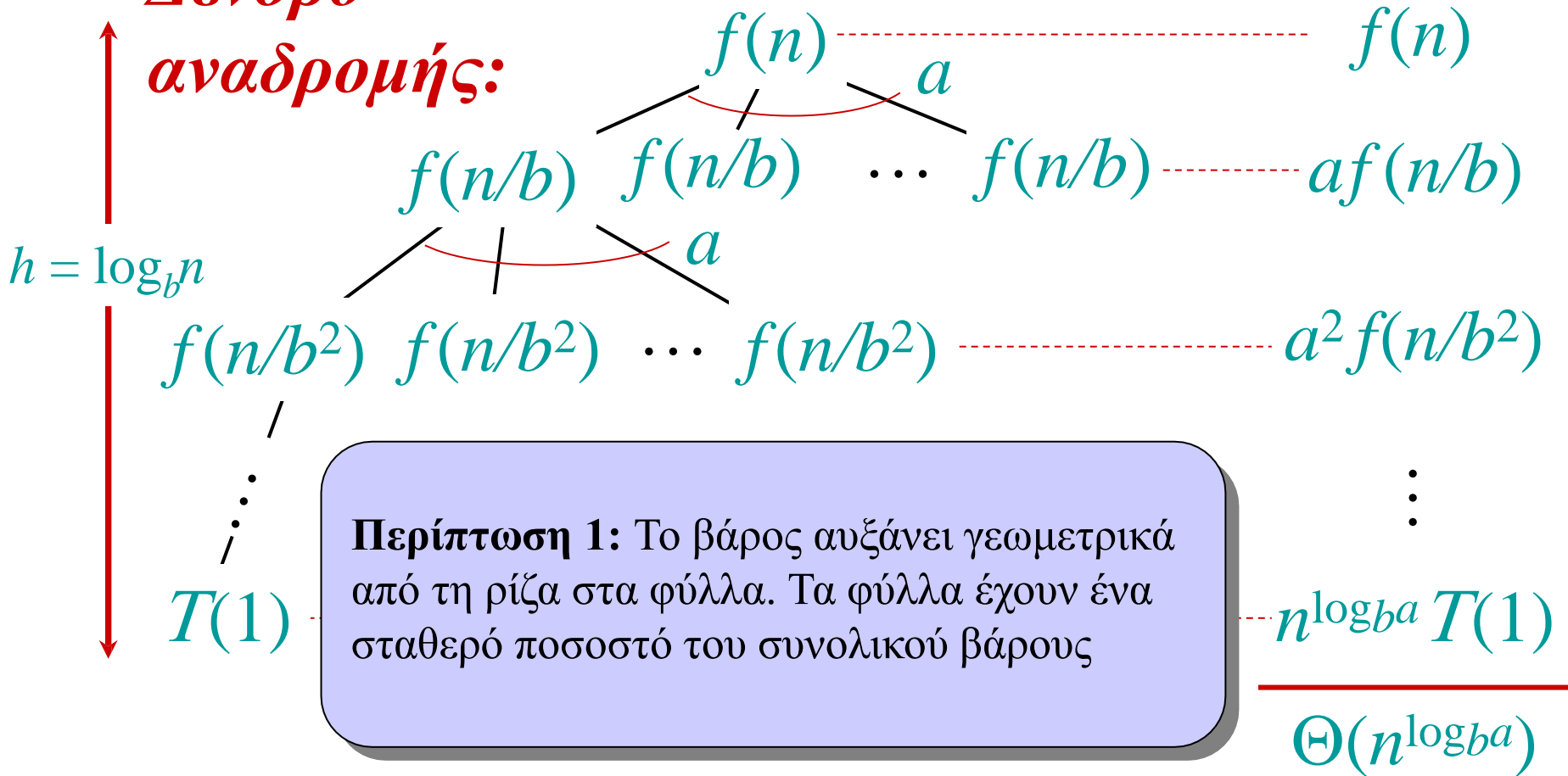
αναδρομής:



Η ιδέα του θεωρήματος κυρίαρχου όρου

Δένδρο

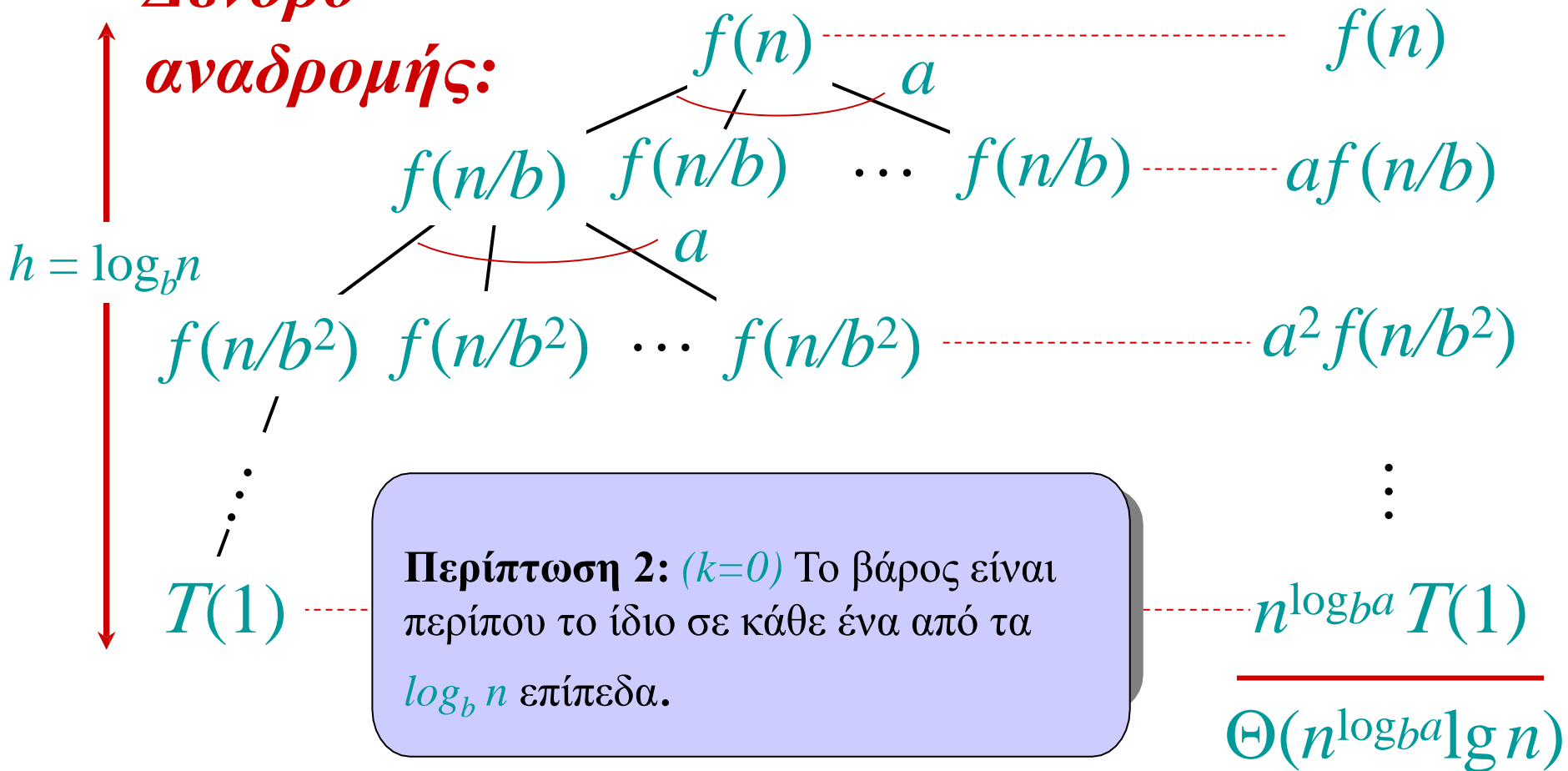
αναδρομής:



Η ιδέα του θεωρήματος κυρίαρχου όρου

Δένδρο

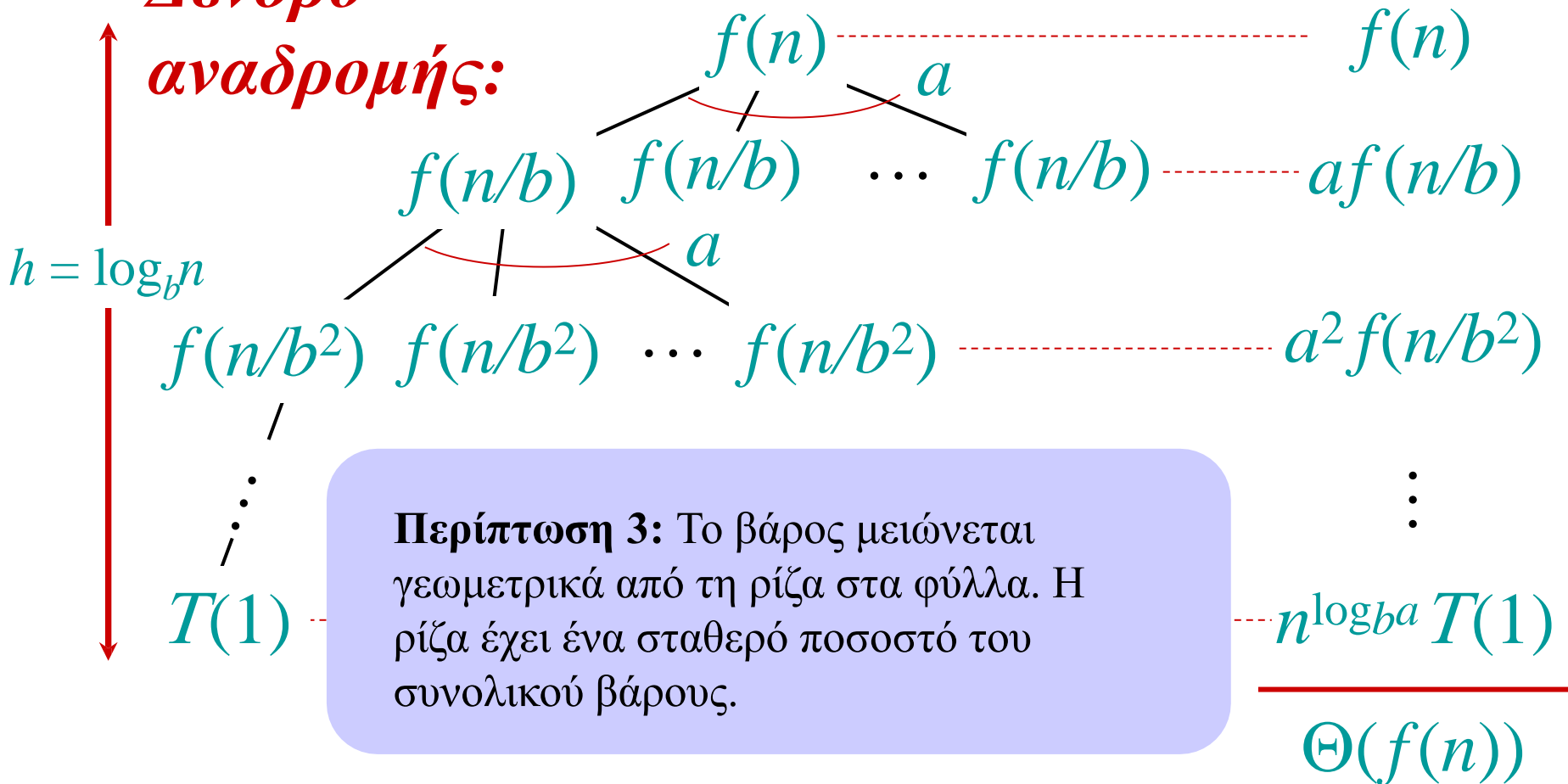
αναδρομής:



Η ιδέα του θεωρήματος κυρίαρχου όρου

Δένδρο

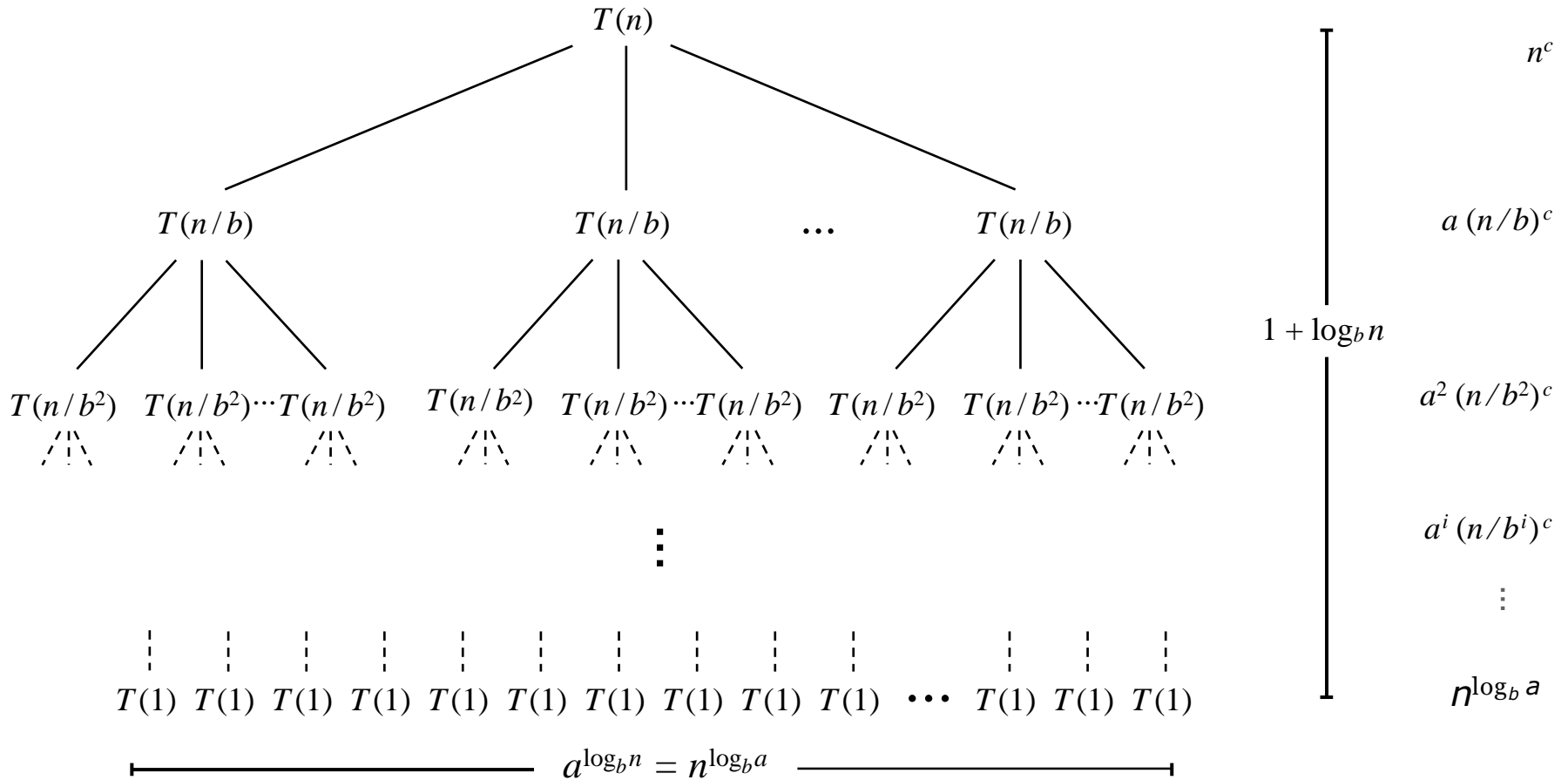
αναδρομής:



Περίπτωση 3: Το βάρος μειώνεται γεωμετρικά από τη ρίζα στα φύλλα. Η ρίζα έχει ένα σταθερό ποσοστό του συνολικού βάρους.

Divide-and-conquer recurrences: recursion tree

Suppose $T(n)$ satisfies $T(n) = a T(n/b) + n^c$ with $T(1) = 1$, for n a power of b .



$$r = a / b^c$$

$$T(n) = n^c \sum_{i=0}^{\log_b n} r^i$$

Divide-and-conquer recurrences: recursion tree analysis

Suppose $T(n)$ satisfies $T(n) = a T(n/b) + n^c$ with $T(1) = 1$, for n a power of b .

Let $r = a/b^c$. Note that $r < 1$ iff $c > \log_b a$.

$$T(n) = n^c \sum_{i=0}^{\log_b n} r^i = \begin{cases} \Theta(n^c) & \text{if } r < 1 & c > \log_b a & \longleftarrow & \text{cost dominated} \\ & & & & \text{by cost of root} \\ \Theta(n^c \log n) & \text{if } r = 1 & c = \log_b a & \longleftarrow & \text{cost evenly} \\ & & & & \text{distributed in tree} \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{if } r > 1 & c < \log_b a & \longleftarrow & \text{cost dominated} \\ & & & & \text{by cost of leaves} \end{cases}$$

Geometric series.

- If $0 < r < 1$, then $1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^k \leq 1 / (1 - r)$.
- If $r = 1$, then $1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^k = k + 1$.
- If $r > 1$, then $1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^k = (r^{k+1} - 1) / (r - 1)$.

Επανάληψη στα αθροίσματα

- Για ακεραίους a και b , $a \leq b$,

$$\sum_{i=a}^b 1 = b - a + 1$$

- Αριθμητική πρόοδος: Για $n \geq 0$,

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Για $n \geq 0$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Επανάληψη στα αθροίσματα

- Για $n \geq 0$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- Γεωμετρική πρόοδος: For real $x \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

For $|x| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Επανάληψη στα αθροίσματα

- Αριθμητική-Γεωμετρική πρόοδος:

– Για $n \geq 0$, πραγματικό $c \neq 1$,

$$\sum_{i=1}^n ic^i = c + 2c^2 + \dots + nc^n = \frac{-(n+1)c^{n+1} + nc^{n+2} + c}{(c-1)^2}$$

- Αρμονική σειρά:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + O(1)$$

Επανάληψη στα αθροίσματα

- Τηλεσκοπική σειρά

$$\sum_{k=1}^n a_k - a_{k-1} = a_n - a_0$$

- Για $|x| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

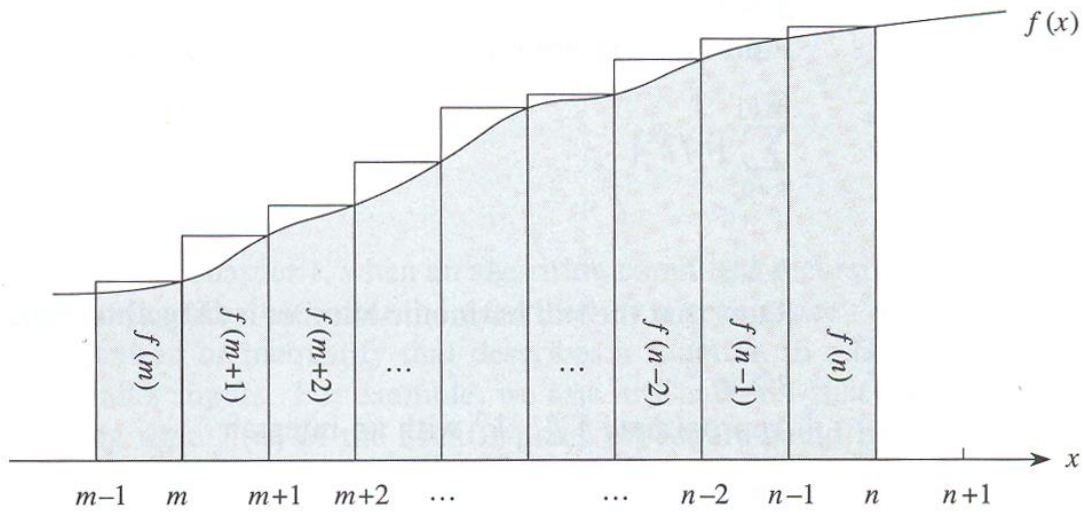
Επανάληψη στα αθροίσματα

- Προσέγγιση με ολοκληρώματα
- Για μονότονα αυξανόμενη συνάρτηση $f(x)$

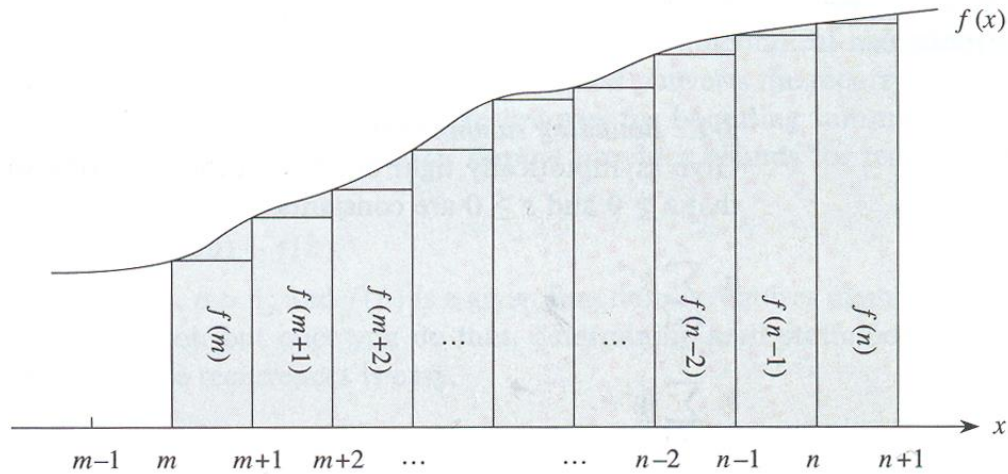
$$\int_{m-1}^n f(x)dx \leq \sum_{k=m}^n f(k) \leq \int_m^{n+1} f(x)dx$$

- Για μονότονα μειωνόμενη συνάρτηση $f(x)$

$$\int_m^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=m}^n f(k) \leq \int_{m-1}^n f(x)dx$$



$$\int_{m-1}^n f(x) dx \leq \sum_{k=m}^n f(k)$$



$$\sum_{k=m}^n f(k) \leq \int_m^{n+1} f(x) dx$$

Επανάληψη στα αθροίσματα

- Ν-οστός αρμονικός αριθμός

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln n + 1$$

Κατώφλι και ανώφλι

- Για κάθε πραγματικό αριθμό x

$$x - 1 < [x] \leq x \leq [x] < x + 1$$

- Για κάθε πραγματικό αριθμό $x \geq 0$ και για οποιουσδήποτε ακεραίους $a, b > 0$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{[x/a]}{b} \right] &= \left[\frac{x}{ab} \right], \\ \left[\frac{[x/a]}{b} \right] &= \left[\frac{x}{ab} \right], \\ \left[\frac{a}{b} \right] &\leq \frac{a + (b - 1)}{b}, \\ \left[\frac{a}{b} \right] &\geq \frac{a - (b - 1)}{b}. \end{aligned}$$

Εκθετικά

Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$e^x \geq 1 + x$ όπου η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$

Όταν $|x| \leq 1$, ισχύει η διπλή ανισότητα

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2$$

Όταν $x \rightarrow 0$, το e^x προσεγγίζεται με αρκετή ακρίβεια από το $1 + x$:

$$e^x = 1 + x + \Theta(x^2)$$

Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Λογάριθμοι

- Για $|x| < 1$ ο λογάριθμος $\ln(1 + x)$ αναπτύσσεται στην παρακάτω σειρά:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Επίσης οι ακόλουθες ανισότητες για $x > -1$:

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Παραγοντικά

- Η προσέγγιση του *Stirling*:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$