ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Από το ¨Στομάχιον¨ του Αρχιμήδη στο θεώρημα του Pick.

Μια ιστορική διαδρομή και διδακτικές προεκτάσεις.

ΚΑΤΣΙΓΙΑΝΝΗΣ ΚΩΣΤΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ ΛΑΠΠΑΣ

Αναπληρωτής καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

ΑΘΗΝΑ

2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την …23/6/2010… από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)…Λάππας Διονύσιος…(επιβλέπων Καθηγητής)	Αναπλ. Καθηγητής	……………
2)…Αθανασιάδης Χρήστος……………………………	Αναπλ. Καθηγητής	………..…
3)…Χριστιανίδης Γιάννης …………………………….	Αναπλ. Καθηγητής	………..…

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κ. Αθανασιάδη Χρήστο, τον κ. Λάππα Διονύσιο και τον κ. Χριστιανίδη Γιάννη, για τη συνεχή καθοδήγηση και την εποικοδομητική κριτική τους. Ιδιαίτερα ο επιβλέπων καθηγητής κ. Λάππας Διονύσιος, με την πολύτιμη εμπειρία του και την αμέριστη συμπαράστασή του καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας, κατάφερε να μετατρέψει αυτό που θα μπορούσε να είναι ένα κοπιώδες αγχωτικό έργο, σε μια ενδιαφέρουσα πνευματική εργασία και μια συναρπαστική επαφή με την επιστημονική δουλειά.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Το ¨Στομάχιον¨ είναι μια από τις λιγότερο γνωστές πραγματείες του Αρχιμήδη. Μέχρι το 1906, οπότε και διαβάστηκε στην Κωνσταντινούπολη από τον Heiberg ένας παλίμψηστος κώδικας, για το ¨Στομάχιον¨ γνωρίζαμε μόνο μια αμφισβητούμενη αραβική μετάφραση. Ο παλίμψηστος κώδικας (κώδικας C όπως ονομάστηκε από τον Heiberg) περιείχε ένα μικρό απόσπασμα από το ¨Στομάχιον¨ στα ελληνικά. Συγκεκριμένα περιείχε την εισαγωγή και την πρώτη πρόταση. Παρά την ανακάλυψη του κώδικα C, τα στοιχεία που μας παρείχαν και το ελληνικό απόσπασμα και η αραβική μετάφραση δεν ήταν αρκετά ώστε να κατανοήσουμε με βεβαιότητα το μαθηματικό περιεχόμενο της πραγματείας. Μέχρι πρόσφατα επικρατούσε η άποψη ότι αντικείμενο της πραγματείας ήταν η μέτρηση του εμβαδού 14 πολυγώνων που αποτελούσαν ένα ομώνυμο παιδικό παιχνίδι. Το 2003 προτάθηκε μια νέα ερμηνεία από τους ερευνητές που μελετούν τον παλίμψηστο κώδικα C. Πρότειναν την άποψη ότι το ¨Στομάχιον¨ είναι μια πραγματεία γεωμετρικής συνδυαστικής.

Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε τις πηγές από τις οποίες γνωρίζουμε για το ¨Στομάχιον¨ του Αρχιμήδη, τη νεότερη ερμηνεία που προτείνουν οι Netz, Acerbi και Wilson καθώς και την άποψη ότι οι αρχαίοι έλληνες διέθεταν γνώσεις συνδυαστικής και αξιοσημείωτες μεθόδους απαρίθμησης. Στη συνέχεια, θα επιχειρηθεί μια σύνδεση του ¨Στομαχίου¨ με το θεώρημα του Pick. Το θεώρημα του Pick είναι ένα σχετικά σύγχρονο θεώρημα (δημοσιεύτηκε το 1899) το οποίο, ενώ με μια πρώτη ματιά φαίνεται να αφορά υπολογισμό εμβαδών, μπορεί να προκύψει με μεθόδους συνδυαστικής και είναι ισοδύναμο με βασικά αποτελέσματα της τοπολογίας (τύπος Euler). Τέλος, θα διατυπώσουμε κάποιες ιδέες για διδακτική αξιοποίηση του ¨Στομαχίου¨ στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Η εργασία αποτελείται από έξι κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο, δίνουμε βιογραφικά στοιχεία για τον Αρχιμήδη και αναφέρουμε σύντομα το έργο του.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, ασχολούμαστε με το ¨Στομάχιον¨. Περιγράφουμε το ομώνυμο παιχνίδι και αναφέρουμε πηγές από τις οποίες γνωρίζουμε για αυτό. Παραθέτουμε και αναλύουμε το αραβικό και το ελληνικό απόσπασμα. Σχολιάζουμε τις απόψεις που έχουν διατυπωθεί από διάφορους μελετητές για αυτή την πραγματεία του Αρχιμήδη.

Στο τρίτο κεφάλαιο, εξετάζουμε την άποψη ότι οι αρχαίοι έλληνες διέθεταν μη τετριμμένες γνώσεις συνδυαστικής. Επικεντρώνουμε την ανάλυση μας στην ανακάλυψη ότι ο δέκατος αριθμός Schröder ήταν γνωστός στον Ίππαρχο σύμφωνα με μαρτυρία του Πλούταρχου. Επίσης, αναλύουμε την εικασία του Stanley για τον τρόπο με τον οποίο ο Ίππαρχος υπολόγισε τον αριθμό αυτό.

Στο τέταρτο κεφάλαιο, αναφέρουμε την άποψη των Netz, Acerbi και Wilson ότι το ¨Στομάχιον¨ είναι πραγματεία συνδυαστικής. Περιγράφουμε τον τρόπο με τον οποίο υπολόγισαν και ταξινόμησαν οι Diaconis, Holmes, Graham και Chung όλες τις δυνατές διευθετήσεις των 14 πολυγώνων που αποτελούν το ¨Στομάχιον¨, εντός του αρχικού τετραγώνου που τα περιείχε.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, αναφέρουμε το θεώρημα του Pick και δίνουμε τρεις αποδείξεις του. Και οι τρεις αποδείξεις είναι αξιοσημείωτες για τις μαθηματικές ιδέες που περιέχουν και μας επιτρέπουν να δούμε διαφορετικές όψεις του θεωρήματος Pick μέσα από διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών. Στην τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου εφαρμόζουμε το θεώρημα Pick για να υπολογίσουμε το εμβαδό των 14 πολυγώνων του ¨Στομαχίου¨.

Στο έκτο κεφάλαιο, διατρέχουμε την ύλη των μαθηματικών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και προτείνουμε ιδέες και σκέψεις για διδακτική αξιοποίηση του ¨Στομαχίου¨.

1. Αρχιμήδης (περίπου 287 π.Χ.- 212 π.Χ.)

Ο Αρχιμήδης θεωρείται από πολλούς ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών και σίγουρα ο σπουδαιότερος μαθηματικός της αρχαιότητας (Eves 1969, Boyer-Merzbach, 1997). Ο Van der Waerden (2003) τον ονομάζει «μέγιστο» και «μεγαλοφυή». Ο E.T.Bell (1998) τον συγκρίνει μόνο με τους Newton και Gauss. Η φήμη του ως ιδιοφυούς μαθηματικού και κατασκευαστή δαιμόνιων μηχανών είχε δημιουργηθεί ήδη από την αρχαιότητα και πιθανά για το λόγο αυτό οι σωζόμενες μαρτυρίες για τον Αρχιμήδη είναι περισσότερες σε σύγκριση με τις πληροφορίες που έχουμε για άλλους μαθηματικούς της αρχαιότητας. Όμως οι περισσότερες πληροφορίες είναι παραδόσεις (όχι πάντα αξιόπιστες) που αφορούν αυτόν και τις μηχανικές κατασκευές του και δύσκολα μπορούν να αντέξουν στον ιστορικό κριτικό έλεγχο, ενώ τα στοιχεία που ξέρουμε με βεβαιότητα για τη ζωή του είναι αποσπασματικά και δεν μπορούν να σχηματίσουν μια συνεκτική βιογραφία του. (Dijksterhuis, 1987).

1.1. Βιογραφία του Αρχιμήδη.

Στην αρχαιότητα είχε γραφτεί μια βιογραφία του Αρχιμήδη από κάποιον Ηρακλείδη. Αυτή η βιογραφία δεν έχει σωθεί στις μέρες μας. Ο Ευτόκιος[1], όμως, φαίνεται να είχε πρόσβαση σε αυτή τη βιογραφία του Αρχιμήδη, γιατί την αναφέρει στα σχόλια του στα *Κωνικά* του

[1] **Ευτόκιος ο Ασκαλωνίτης**. Γεννήθηκε στην Ασκαλώνα (Παλαιστίνη) περίπου το 480 μ.Χ. Πιθανά ταξίδεψε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου για σπουδές όπου είχε δάσκαλο τον Αμμώνιο. Έγραψε σχόλια σε αρκετές πραγματείες του Αρχιμήδη και στα Κωνικά του Απολλώνιου. Σύγχρονος του Ανθέμιου από τις Τράλλεις (ένας από τους αρχιτέκτονες της Αγίας Σοφίας). Πέθανε περίπου το 540 μ.Χ.

Απολλώνιου[1] καθώς και στα σχόλια του στο *Κύκλου μέτρησις* του Αρχιμήδη[2]. Ο ίδιος ο Αρχιμήδης στην πραγματεία του *Περί ελίκων* αναφέρει κάποιον Ηρακλείδη με τον οποίο έστελνε τις πραγματείες του στο Δοσίθεο (στην Αλεξάνδρεια). Θεωρείται πιθανό ότι αυτός ο Ηρακλείδης είναι και ο βιογράφος του Αρχιμήδη (Heath, 1897). Ελλείψει, λοιπόν, μιας αξιόπιστης και βέβαιης βιογραφίας του Αρχιμήδη δεν μπορούμε παρά να βασιστούμε στις διάφορες παραδόσεις που αφορούν αυτόν και τις μηχανικές κατασκευές του, με ανεκδοτολογικό ύφος πολλές φορές. Όπως αναφέρει και ο Dijksterhuis (1987) δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτε άλλο από το να ταξινομήσουμε τις παραδόσεις και να δηλώνουμε με ακρίβεια τις πηγές από όπου προέρχονται, αξιολογώντας περιστασιακά την αξία αυτών των παραδόσεων.

1.2. Γέννηση-Καταγωγή.

Για την ακριβή χρονολογία της γέννησής του Αρχιμήδη δεν είμαστε σίγουροι, αλλά τοποθετείται γύρω στα 287 π.Χ. γιατί ο Τζέτζης[3] αναφέρει ότι ήταν 75 χρόνων όταν σκοτώθηκε από τους Ρωμαίους κατά τη διάρκεια της λεηλασίας των Συρακουσών (Τζέτζης, 1826). Η κατάληψη των Συρακουσών συνέβη το 212 π.Χ., οπότε ο υπολογισμός του έτους γέννησης του Αρχιμήδη θα ήταν ζήτημα μόνο μιας αφαίρεσης. Όμως ο Τζέτζης έζησε τον 12ο αιώνα, δηλαδή περισσότερο από 1300 χρόνια μετά το θάνατο του Αρχιμήδη, και καμία από τις προηγούμενες πηγές δεν

---

[1] «ὥς ἱστορεῖ Ἡράκλειος ὁ τὸν βίον Ἀρχιμήδους γράφων» Eutocius: Commentaria in conica, p.168, 7

[2] «ὥς φησιν Ἡρακλείδης ἐν τῷ Ἀρχιμήδους βίῳ» Eutocius: Commentarius in dimensionem circuli, p.228, 20

[3] Ο **Ιωάννης Τζέτζης** (1110 - 1180) ήταν Βυζαντινός λόγιος, συγγραφέας και ποιητής (γραμματικός). Γεννήθηκε στην Κωνσταντινούπολη, δούλεψε σα γραμματέας στη Βέροια. Μετά το 1139 γύρισε στην Κωνσταντινούπολη, όπου εργάστηκε σα γραμματικός. Τα έργα του αποτελούν σημαντική πηγή για χαμένα αρχαία ελληνικά έργα.

αναφέρει την ακριβή ηλικία του Αρχιμήδη. Ο Πολύβιος[1] που έζησε πολύ πιο κοντά στην εποχή του Αρχιμήδη και θεωρείται αξιόπιστος, απλά τον χαρακτηρίζει γέροντα «πρεσβύτην» κατά τη διάρκεια της πολιορκίας των Συρακουσών (Polybius, Historiae, VIII).

Για την καταγωγή του και την οικογένεια του δε γνωρίζουμε σχεδόν τίποτα. Ο ίδιος αναφέρει στην εισαγωγή της πραγματείας του ¨*Ψαμμίτης*¨ ότι ο πατέρας του ήταν αστρονόμος και λεγόταν Φειδίας. Για την ακρίβεια στο χειρόγραφο αναφέρεται «Φειδία του Ακουπατρός», έκφραση δυσνόητη για την οποία ο F.Blass πρότεινε την εικασία: «Φειδία του αμού πατρός» (Φειδία του πατέρα μου). Η ίδια πληροφορία αναφέρεται και σε σχόλια στο Γρηγόριο Ναζιανζηνό (Σταμάτης, 1970,τόμος Α, μέρος Α, μαρτυρία 140). Ως προς την καταγωγή του, ο Πλούταρχος[2] στο βίο του Μάρκελλου αναφέρει ότι ο Αρχιμήδης είχε φιλικές και συγγενικές σχέσεις με τον τύραννο Ιέρωνα και τον γιο του, Γέλωνα. Στον Γέλωνα μάλιστα είναι αφιερωμένη και η προαναφερθείσα πραγματεία του Αρχιμήδη ¨*Ψαμμίτης*¨.

1.3. Σπουδές-Σχέσεις με άλλους μαθηματικούς.

Όλοι οι συγγραφείς συμφωνούν ότι ο Αρχιμήδης γεννήθηκε στις Συρακούσες και το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του παρέμεινε στην πόλη του. Πρέπει για κάποιο διάστημα να ταξίδεψε στην Αλεξάνδρεια της

---

[1] Ο **Πολύβιος** (≅203 π.Χ. - 120 π.Χ.) ήταν Έλληνας ιστορικός. Γεννήθηκε στην Μεγαλόπολη (Αρκαδίας) διάσημος για το βιβλίο του *Οι Ιστορίες* ή *Η Άνοδος της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας*, που καλύπτει λεπτομερώς την περίοδο από το 220 ως 146 π.Χ.

[2] Ο **Πλούταρχος** (περ.45-120 μ.Χ.) ήταν Έλληνας ιστορικός, βιογράφος και δοκιμιογράφος. Γεννήθηκε στη Χαιρώνεια της Βοιωτίας. Ο Πλούταρχος ταξίδεψε πολύ στον μεσογειακό κόσμο της εποχής του και δύο φορές στη Ρώμη. Είχε φίλους Ρωμαίους με ισχυρή επιρροή, ανάμεσα στους οποίους ξεχωρίζουν ο Soscius Senecio και ο Fundanus, και οι δύο σημαντικοί Συγκλητικοί, στους οποίους ήταν αφιερωμένα ορισμένα από τα ύστερα κείμενά του. Έζησε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στη Χαιρώνεια, όπου λέγεται ότι μυήθηκε στα μυστήρια του Απόλλωνα. Ήταν πρεσβύτερος των ιερέων του Απόλλωνα στο μαντείο των Δελφών, αξίωμα που κράτησε για 29 έτη έως τον θάνατό του. Έζησε μια ιδιαίτερα δραστήρια κοινωνική και πολιτική ζωή, κατά τη διάρκεια της οποίας παρήγαγε ένα απίστευτο σε μέγεθος και σε ποικιλία συγγραφικό έργο. Τα πλέον γνωστά έργα του είναι τα *Ηθικά* και οι *Βίοι παράλληλοι*. Πολλά από τα έργα του επιβίωσαν ως την εποχή μας και θεωρούνται πολύτιμες πηγές για παλαιότερα συγγράμματα και γενικότερα για την εποχή του Πλούταρχου.

Αιγύπτου (πιθανά για σπουδές) και κατά την εκεί διαμονή του εφηύρε μια μηχανή άντλησης νερών από τα κανάλια του Νείλου γνωστή ως ¨κοχλίας¨. Αυτό αναφέρεται από το Διόδωρο το Σικελιώτη στο έργο του *Ιστορική βιβλιοθήκη* (Σταμάτης 1970, μέρος Α, τόμος Α, μαρτυρίες 15, 16). Η άποψη ότι ο Αρχιμήδης διέμεινε για κάποιο διάστημα στην Αλεξάνδρεια ισχυροποιείται σύμφωνα με τον Dijksterhuis (1987) και από το γεγονός ότι στους προλόγους των εργασιών του φαίνεται καθαρά ότι, ενώ μένει στις Συρακούσες, διατηρεί σχέσεις με διάφορους μαθηματικούς της Αλεξάνδρειας. Ενδεχομένως, λοιπόν, αυτές οι σχέσεις δημιουργήθηκαν κατά την εκεί προγενέστερη διαμονή του.

Ιταλικό γραμματόσημο του 1983 προς τιμήν του Αρχιμήδη. Φαίνεται και η εφεύρεσή του για άντληση υδάτων, γνωστή ως κοχλίας.

ΕΙΚΟΝΑ 1.1

Από τους συναδέρφους του μαθηματικούς φαίνεται να εκτιμούσε ιδιαίτερα τον Κόνωνα τον Σάμιο. Στον Κόνωνα (πιθανά και σε άλλους) έστελνε κάποια προβλήματα ή θεωρήματα με ή χωρίς τις αποδείξεις τους, ζητώντας να τα γνωστοποιήσει και σε άλλους μαθηματικούς και να εκφέρουν την άποψή τους για τα αποτελέσματά του ή να δώσουν πιθανά δικές τους αποδείξεις. Μετά τον θάνατο του Κόνωνα, κοινοποιούσε τις εργασίες του στον μαθητή του Κόνωνα, Δοσίθεο. Από τις σωζόμενες εργασίες που γνωρίζουμε έχουν αποσταλεί στο Δοσίθεο οι *Περί σφαίρας και κυλίνδρου*, *Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων*, *Περί ελίκων*, και *Τετραγωνισμός παραβολής*. Ένας ακόμα μαθηματικός ο οποίος λάμβανε εργασίες από τον Αρχιμήδη και πιθανά τις γνωστοποιούσε στον κύκλο των μαθηματικών της Αλεξάνδρειας ήταν ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος. Από τις σωζόμενες εργασίες έχουν αποσταλεί στον Ερατοσθένη η *Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην έφοδος (Μέθοδος)* και το *Πρόβλημα βοεικόν*. Γενικά στις σωζόμενες πραγματείες του Αρχιμήδη δεν υπάρχει κάποια κατηγορηματική κριτική για το έργο άλλων μαθηματικών και ο ίδιος αποφεύγει να είναι επικριτικός προς συγκεκριμένους άλλους μαθηματικούς. Όσοι μαθηματικοί αναφέρονται, αναφέρονται είτε για να εγκωμιαστούν, είτε σε ένα πλαίσιο το οποίο δείχνει ότι ο Αρχιμήδης συμμερίζεται την ίδια προσέγγιση των προβλημάτων με αυτούς (Γαβρόγλου, Διαλέτης, Χριστιανίδης, 2001). Ανάμεσα στους μαθηματικούς που μνημονεύει ο Αρχιμήδης (στις σωζόμενες πραγματείες του) είναι ο Αρίσταρχος ο Σάμιος, ο Εύδοξος, ο Δημόκριτος, ο Ευκλείδης και βέβαια ο Ερατοσθένης και ο Κόνωνας που προαναφέρθηκαν.

1.4. Μηχανικές κατασκευές-Αφοσίωση στις θεωρητικές μελέτες.

Επιστρέφοντας στις Συρακούσες ο Αρχιμήδης αφιέρωσε την υπόλοιπη ζωή του στην έρευνα και μελέτη των μαθηματικών και της μηχανικής. Έγινε διάσημος και απέκτησε φήμη δαιμόνιας μεγαλοφυΐας λόγω των μηχανικών του κατασκευών. Ο ίδιος όμως δεν τις θεωρούσε έργα άξια σπουδής και, όπως αναφέρει ο Πλούταρχος, οι περισσότερες από αυτές τις κατασκευές ήταν πάρεργα γεωμετρικών παιχνιδιών· «ὧν ὡς μὲν ἔργον ἄξιον σπουδῆς οὐδὲν ὁ ἀνὴρ προὔθετο, γεωμετρίας δὲ παιζούσης ἐγεγόνει πάρεργα τὰ πλεῖστα,» (Πλούταρχος, Μάρκελλος chap.14, sec. 8, line 1). Θεωρούσε (ο Αρχιμήδης) ότι η ενασχόληση με τα μηχανικά και με τις πρακτικές εφαρμογές είναι αγενής και βάναυση. Διέθετε την νοητική του προσπάθεια μόνο σε αυτά που θεωρούσε ευγενή και αγαθά, δηλαδή τα καθαρά θεωρητικά μαθηματικά. Παρά λοιπόν το πλήθος των μηχανικών κατασκευών του που του χάρισαν δόξα, δεν θέλησε να αφήσει κανένα σύγγραμμα για αυτές, λόγω της άποψής του ότι η ενασχόληση με τις πρακτικές ανάγκες είναι ποταπή. Ο Πάππος επικαλούμενος τον Κάρπο τον Αντιοχέα, αναφέρει ότι ο Αρχιμήδης συνέγραψε μόνο ένα σύγγραμμα για μηχανικές κατασκευές, το *Περί σφαιροποιίας*, γιατί (όπως εξηγεί) αγάπησε τόσο πολύ την (καθαρή) γεωμετρία που δεν ήθελε να εισάγει και να χρησιμοποιήσει σε αυτήν οτιδήποτε εξωτερικό, προερχόμενο από την εμπειρία (Πάππος στο Σταμάτης 1970, τόμος Α, μέρος Α, μαρτυρία 110).

Η αφοσίωση του στα μαθηματικά ήταν τέτοια, ώστε ο Πλούταρχος αναφέρει ότι τον καθοδηγούσε κάποια σειρήνα που είχε μέσα του και τον χαρακτηρίζει μουσόληπτο. Προσηλωνόταν τόσο πολύ στα μαθηματικά προβλήματα που μελετούσε, ώστε παραμελούσε την καθαριότητα του σώματος του ακόμα και να τραφεί. Όταν οι υπηρέτες τον τραβούσαν με το ζόρι στο λουτρό, αυτός χάραζε γεωμετρικά σχήματα στις στάχτες της φωτιάς, ακόμα και στο αλειμμένο με λάδι σώμα του. Είναι γνωστή για αυτόν η ιστορία ότι καθώς ήταν απορροφημένος από κάποιο πρόβλημα που του είχε θέσει ο τύραννος Ιέρωνας ως προς την καθαρότητα ενός χρυσού στεφανιού που είχε παραγγείλει, μόλις βρήκε την λύση στο λουτρό έτρεξε γυμνός στους δρόμους των Συρακουσών φωνάζοντας «εὕρηκα, εὕρηκα» (Vitruvius στο Σταμάτη, 1970, τόμος Α, μέρος Α, μαρτυρία 249). Την ιστορία διηγείται ο Βιτρούβιος[1] στο σύγγραμμά του De Architectura ο οποίος στη συνέχεια περιγράφει με ποιο τρόπο ο Αρχιμήδης εφάρμοσε τις ιδέες του στην επίλυση του προβλήματος του στεφανιού. Η αξιοπιστία της διήγησης ελέγχεται καθώς το πρόβλημα του στεφανιού συνήθως συνδέεται

[1] Ο Βιτρούβιος (Vitruvius) ήταν Ρωμαίος αρχιτέκτονας που έζησε τον 1ο αιώνα π.Χ.

με την ανακάλυψη από τον Αρχιμήδη του νόμου της υδροστατικής, ενώ η διήγηση του Βιτρούβιου σχετίζεται με την αρχή λειτουργίας του πυκνόμετρου (Dijksterhuis 1987).

Μια άλλη πασίγνωστη ρήση του Αρχιμήδη που συναντάμε σε πολλές αρχαίες πηγές είναι «δός μοι ποῦ στῶ και κινῶ την γῆν», δηλαδή: δώσε μου μέρος να σταθώ και κινώ τη γη. Η ρήση αυτή σε συνδυασμό με τον τρόπο που πραγματεύεται την ηλιοκεντρική θεωρία του Αρίσταρχου στην πραγματεία του *Ψαμμίτης*, αφήνουν ανοικτό το ενδεχόμενο ο Αρχιμήδης να μην ήταν αντίθετος στον ηλιοκεντρισμό (Γαβρόγλου, Διαλέτης, Χριστιανίδης, 2001). Ο Πλούταρχος αναφέρει ότι τη προηγούμενη ρήση ο Αρχιμήδης την καυχήθηκε όταν απέδειξε ότι είναι δυνατόν με δοθείσα δύναμη να κινήσει δοθέν βάρος (νόμος του μοχλού). Σώζεται, μάλιστα, η παράδοση ότι όταν ο τύραννος Ιέρωνας του ζήτησε να μεταφέρει το θεώρημα σε πρακτική εφαρμογή, τότε αυτός καθέλκυσε μόνος του, χρησιμοποιώντας πιθανά ένα πολύσπαστο, ένα ολόκληρο πλοίο. Κατά διάφορους το πλοίο ήταν η ¨Συρακοσία¨ (το μεγαλύτερο πλοίο που είχε κατασκευαστεί στην αρχαιότητα) το οποίο δώρισε ο τύραννος Ιέρωνας στον βασιλιά της Αιγύπτου, Πτολεμαίο οπότε και ονομάστηκε ¨Αλεξάνδρεια¨.

1.5. Η άμυνα των Συρακουσών.

Βλέποντας ο Ιέρωνας τις δυνατότητες της πρακτικής εφαρμογής, των ανακαλύψεων του Αρχιμήδη, του ζήτησε να εφαρμόσει τα θεωρήματα του για την κατασκευή πολεμικών μηχανών για την άμυνα των Συρακουσών (Πλούταρχος, Μάρκελλος). Πράγματι τα τείχη των Συρακουσών οχυρώθηκαν κατά παραγγελία και δαπάνες του Ιέρωνα και υπό την εποπτεία του Αρχιμήδη. (Πολύβιος στο Σταμάτης 1970, μέρος Α, τόμος Α, μαρτυρία 120, Τίτος Λίβιος[1] στο Σταμάτης 1970, μέρος Α, τόμος Α, μαρτυρία 224, Πλούταρχος στο Μάρκελλο). Και ο μεν Ιέρωνας δεν χρειάστηκε να χρησιμοποιήσει τις κατασκευασμένες πολεμικές μηχανές, γιατί το περισσότερο μέρος της ζωής του το έζησε σε ειρήνη· όταν όμως οι Ρωμαίοι πολιόρκησαν τις Συρακούσες, υπήρχε η αναγκαία προπαρασκευή και μαζί με αυτή και ο δημιουργός της (Πλούταρχος στο Μάρκελλο).

Γκραβούρα που αναπαριστά τον Αρχιμήδη να σχεδιάζει την άμυνα των Συρακουσών. Ο Σταμάτης την περιλαμβάνει στο (*Αρχιμήδους Άπαντα*, τόμος Α, μέρος Α, 1970, σελ.XIX) και αναφέρει ότι είναι από το βιβλίο Bibliografia, Euclides, Arquimedes, Newton, του F.I. Duarte. Ο Chris Rorres στην ιστοσελίδα του (Archimedes Home Page) γράφει ότι είναι του 1740. Στο σκούφο γράφει Αρχιμήδης ὁ γεωμέτρης.

ΕΙΚΟΝΑ 1.2

Η πολιορκία των Συρακουσών περιγράφεται από αρκετούς αρχαίους ιστορικούς και μπορούμε να πούμε ότι τη μεγαλύτερη δόξα και φήμη την

---

[1] Ο **Λίβιος Τίτος** (59π.Χ.-17μ.Χ.) ήταν ένας Ρωμαίος ιστορικός ο οποίος έγραψε ένα μνημειώδες έργο για την ιστορία της Ρωμαϊκής αυτοκρατορίας (Ab urbe condita : Ιστορία από κτίσεως της Ρώμης) όπου καλύπτει την περίοδο από τους πρώτους μύθους για την ίδρυση της ρώμης το 753 π.Χ. έως τις μέρες του.

απέκτησε ο Αρχιμήδης λόγω της συνεισφοράς του στην άμυνα της πόλης. Οι πολεμικές του κατασκευές συμπεριλάμβαναν: καταπέλτες με διάφορα βεληνεκή, οπές στα τείχη από τις οποίες μπορούσαν να εκτοξεύονται βέλη και διάφορα βλήματα με θαυμαστή πυκνότητα και ταχύτητα, γερανοί που άφηναν μεγάλα βάρη πάνω στα εχθρικά πλοία, γερανοί εφοδιασμένοι με δαγκάνες (άγκιστρα) που έπιαναν τα εχθρικά πλοία από την πλώρη τα σήκωναν στον αέρα και τα άφηναν στη συνέχεια να βυθιστούν και πιθανά (αν και αμφισβητείται έντονα) καυστικά κάτοπτρα, δηλαδή μια διάταξη κατόπτρων τα οποία χρησιμοποιώντας τις ακτίνες του ήλιου και ίσως και κάποιο εύφλεκτο υλικό πυρπολούσαν τα εχθρικά πλοία από απόσταση. Παραθέτουμε ένα απόσπασμα του Πλούταρχου για την πολιορκία των Συρακουσών από τους Ρωμαίους:

> «Όταν λοιπόν επιτέθηκαν οι Ρωμαίοι και από τις δύο μεριές (από ξηρά και από θάλασσα), οι Συρακούσιοι εξεπλάγησαν και σιώπησαν από το φόβο, νομίζοντας ότι δεν θα αντέξουν τόση βία και δύναμη. Όταν όμως ο Αρχιμήδης έθεσε σε ενέργεια τις μηχανές, τους μεν πεζούς χτυπούσαν κάθε είδους τοξεύματα και υπέρογκοι λίθοι, οι οποίοι κινούνταν με θόρυβο και απίστευτη ταχύτητα, και επειδή δεν ήταν δυνατό να εμποδιστεί η ορμή τους ανέτρεπαν όσους χτυπούσαν και έφερναν σύγχυση στις τάξεις τους. Τα δε πλοία, άλλα τα βύθιζαν δοκάρια που πρόβαλλαν ξαφνικά από τα τείχη, σπρώχνοντας τα από ψηλά με το βάρος τους, και άλλα μηχανές που έμοιαζαν με σιδερένια χέρια ή με στόματα γερανών τα άρπαζαν από την πλώρη και σηκώνοντας τα όρθια τα βύθιζαν με την πρύμνη ή με ισχυρά σχοινιά τα τράβαγαν προς τα μέσα και περιστρέφοντάς τα, τα χτυπούσαν στους σκοπέλους και τα απότομα βράχια που βρίσκονταν κάτω από το τείχος οπότε συντρίβονταν αφανίζοντας πολλούς από τους επιβαίνοντες. …
> Η μηχανή δε που μετέφερε ο Μάρκελλος στα συζευγμένα πλοία, η οποία λεγόταν σαμβύκη λόγω της ομοιότητάς της με το μουσικό όργανο, ενώ ακόμη βρισκόταν μακριά και μεταφερόταν προς το τείχος, δέχτηκε βράχο βάρους δέκα ταλάντων, έπειτα κι άλλον και έπειτα και τρίτο. Από αυτούς

όσοι έπεσαν πάνω στη μηχανή χτυπώντας την δυνατά και κλυδωνίζοντας την, διέλυσαν τη βάση της και διέσεισαν και έσπασαν τους αρμούς της ζεύξης. Τότε ο Μάρκελλος βρέθηκε σε αμηχανία και διέταξε τα πλοία να αποπλεύσουν γρήγορα και το πεζικό να αποχωρήσει. … . Ο Αρχιμήδης, όμως, όπως φάνηκε ήταν προετοιμασμένος και για αυτή την περίπτωση έχοντας κατασκευάσει μηχανήματα που να βάλλουν ανάλογα με την απόσταση και βέλη για κοντά. Και στο τείχος είχε ανοίξει πολλές τρύπες τη μία κοντά στην άλλη, όχι μεγάλες, και είχε τοποθετήσει κοντά σε αυτές σκορπιούς (μηχανήματα μικρού βεληνεκούς) οι οποίοι χτυπούσαν κοντά, παραμένοντας αόρατοι προς τους εχθρούς. … . Και όταν όμως βρέθηκαν σε μεγάλη απόσταση, τα βέλη τους έφταναν και τους χτυπούσαν, οπότε υπέστησαν μεγάλες απώλειες και πολλά πλοία συγκρούστηκαν, χωρίς να μπορούν να αντιδράσουν ενάντια στους εχθρούς τους. Γιατί τα περισσότερα μηχανήματα είχαν τοποθετηθεί πίσω από το τείχος από τον Αρχιμήδη, και φαινόταν ότι οι Ρωμαίοι μάχονταν με τους θεούς, αφού μύρια κακά έπεφταν πάνω τους εκ του αφανούς. … .Στο τέλος βλέποντας ο Μάρκελλος ότι οι Ρωμαίοι είχαν τόσο τρομοκρατηθεί ώστε αν φαινόταν ένα σχοινί ή ξύλο λίγο να προεξέχει πάνω από το τείχος, να φωνάζουν ότι ο Αρχιμήδης κινεί κάποια μηχανή εναντίον τους και να τρέπονται σε φυγή, σταμάτησε κάθε μάχη και άμεση επίθεση, αφήνοντας την εξέλιξη της πολιορκίας στο χρόνο.» (Πλούταρχος, Μάρκελλος)[1].

Οι πολεμικές μηχανές του Αρχιμήδη λοιπόν, απέτρεψαν τους Ρωμαίους από μια άμεση κατάληψη των Συρακουσών. Οι Ρωμαίοι κατέφυγαν στη λύση της πολύχρονης πολιορκίας θεωρώντας ότι η έλλειψη τροφίμων και εφοδίων θα οδηγούσαν στην παράδοση της πόλης. Κατά τον τρίτο χρόνο της πολιορκίας, είτε λόγω προδοσίας όπως αναφέρει ο Τίτος Λίβιος, είτε λόγω υπερβολικού εφησυχασμού των Συρακούσιων όπως αναφέρει ο Πλούταρχος, οι Συρακούσες καταλήφθηκαν και λεηλατήθηκαν.

---

[1] Η νεοελληνική απόδοση του αποσπάσματος στηρίχθηκε στη μετάφραση του Σταμάτη 1970, τόμος Α, μέρος Α, μαρτυρία 118 και στο Πλούταρχος, *Βίοι Παράλληλοι, Πελοπίδας Μάρκελλος*, τόμος 8, 1992.

1.6. Ο θάνατος του Αρχιμήδη.

Ο Αρχιμήδης δολοφονήθηκε κατά τη διάρκεια της λεηλασίας των Συρακουσών. Ο Τίτος Λίβιος αναφέρει ότι κατά την αναταραχή η οποία προκαλείται όταν μια πόλη καταλαμβάνεται και αφήνεται σε λεηλασία, ο Αρχιμήδης αφοσιωμένος στα επί της άμμου σχεδιασμένα σχήματά του, δολοφονήθηκε από κάποιον στρατιώτη ο οποίος δεν τον αναγνώρισε (Titus Livius στο Σταμάτη 1970, μέρος Α, τόμος Α, μαρτυρία 225).

Ψηφιδωτό που αναπαριστά τον Αρχιμήδη απειλούμενο από Ρωμαίο στρατιώτη. Ο Σταμάτης (*Αρχιμήδους Άπαντα,* τόμος Α, μέρος Α, 1970, σελ.VII) αναφέρει ότι είναι του 1ου αιώνα μ.Χ. Επικαλείται ως πηγή της εικόνας το βιβλίο *Der Tod des Archimedes,* του Franz Winter, Berlin W. De Gruyter 1924. Η Mary Jaeger (*Archimedes and the Roman imagination*, p.187, 1960) γράφει ότι είναι αναγεννησιακό, ενώ παλιότερα θεωρούνταν ότι είναι αρχαίο. Ο Chris Rorres στην ιστοσελίδα του (Archimedes Home Page) γράφει: «A mosaic originally believed to date from ancient times, but now thought to be an 18th century copy or falsification. The central portion is 35 by 27 centimeters and is surrounded by an 8-centimeter border. Located in the Städtische Galerie Liebieghaus, Frankfurt am Main, Germany».

ΕΙΚΟΝΑ 1.3

Ο Πλούταρχος αναφέρει λίγο διαφορετικές εκδοχές. Ο Αρχιμήδης αφοσιωμένος σε κάποιο μαθηματικό πρόβλημα δεν αντιλήφθηκε την κατάληψη της πόλης από τους Ρωμαίους. Όταν ένας στρατιώτης τον διέταξε να τον ακολουθήσει στον Μάρκελλο, αυτός αρνήθηκε έως ότου τελειώσει το πρόβλημα που μελετούσε. Ο στρατιώτης οργισμένος τον σκότωσε. Κατά κάποια παραλλαγή ο Αρχιμήδης παρακάλεσε τον στρατιώτη να τον αφήσει να λύσει πρώτα το πρόβλημα και έπειτα να τον σκοτώσει. Κατά μια τρίτη εκδοχή ο Αρχιμήδης μετέφερε κάποια μαθηματικά όργανα, όπως ηλιακά ρολόγια και πλανητάρια προς τον Μάρκελλο και δολοφονήθηκε από στρατιώτες οι οποίοι θεώρησαν ότι μεταφέρει χρυσό (Πλούταρχος, Μάρκελλος). Υπάρχουν και άλλες παραδόσεις, με μικρές παραλλαγές για το τι ακριβώς διαδραματίστηκε λίγο πριν τη δολοφονία του Αρχιμήδη, όλες όμως συγκλίνουν σε αυτό που γράφει ο Heath: ότι ο Αρχιμήδης πέθανε όπως έζησε, απορροφημένος από τον μαθηματικό στοχασμό (Heath, 1897).

1.7. Το έργο του Αρχιμήδη.

Ο Αρχιμήδης άφησε ένα σπουδαίο έργο σε πολλούς και διαφορετικούς τομείς. «Οι πραγματείες του αποτελούν, χωρίς εξαίρεση, μνημεία μαθηματικής έκφρασης. Η βαθμιαία αποκάλυψη ενός σχεδίου προσέγγισης του θέματος, η αριστοτεχνική διάταξη των προτάσεων, η αυστηρή απαλοιφή κάθε στοιχείου που δεν σχετίζεται άμεσα με το σκοπό, η τελειοποίηση του συνόλου είναι τόσο εντυπωσιακά λόγω της τελειότητας τους, ώστε δημιουργούν ένα αίσθημα δέους στο νου του αναγνώστη» (Heath, 2001, τόμος ΙΙ, σελ. 38). Ο Eves (1969, p.144) γράφει ότι οι εργασίες του Αρχιμήδη είναι αριστουργήματα μαθηματικής έκφρασης και έχουν κοινά γνωρίσματα με σύγχρονα αξιοσημείωτα εκτενή άρθρα.

Στη **Γεωμετρία**, ασχολήθηκε κυρίως με τον τετραγωνισμό καμπυλόγραμμων επίπεδων σχημάτων, καθώς και με τον τετραγωνισμό και κυβισμό καμπύλων επιφανειών. Στις μελέτες του αυτές χρησιμοποίησε επιτυχώς τις ¨απειροστικές¨ μεθόδους του Ευδόξου (μέθοδος εξάντλησης) και είναι γενικά αποδεκτό ότι αυτές οι μελέτες οδήγησαν τους Cavalieri, Fermat, Leibniz και Newton, στον απειροστικό λογισμό. Στην **Αριθμητική**, ο Αρχιμήδης δημιούργησε ένα σύστημα με το οποίο μπορούσε να κατονομάσει οποιονδήποτε αριθμό έως τον αριθμό 1 ακολουθούμενο από 80.000 εκατομμύρια εκατομμυρίων ψηφία (Heath, 2001). Επίσης κατά τον υπολογισμό μιας προσέγγισης του π, υπολόγισε και διάφορες προσεγγίσεις τετραγωνικών ριζών ακεραίων οι οποίοι δεν είναι τέλεια τετράγωνα. Τέλος στην πραγματεία του *Πρόβλημα βοεικόν*, θέτει ένα δύσκολο πρόβλημα της απροσδιόριστης ανάλυσης συνδέοντας 8 αγνώστους με 7 εξισώσεις και δίνοντας στη συνέχεια δυο επιπλέον συνθήκες. Μελέτησε και ανέπτυξε την **Μηχανική**, προσδιορίζοντας κέντρα βαρών είτε επίπεδων καμπυλόγραμμων σχημάτων είτε στερεών. Επινόησε και ανέπτυξε την **Υδροστατική**, δίνοντας τις θέσεις ηρεμίας και ευστάθειας ενός ορθού τμήματος παραβολοειδούς εκ περιστροφής το οποίο επιπλέει σε ρευστό.

Έχουν σωθεί περίπου δέκα πραγματείες του Αρχιμήδη και υπάρχουν αναφορές και για άλλα χαμένα έργα του.

α. Σωζόμενα έργα του Αρχιμήδη.

Ο Heath (2001) βασιζόμενος σε διάφορες αναφορές εντός των πραγματειών του Αρχιμήδη, προτείνει την εξής σειρά συγγραφής για τις σωζόμενες πραγματείες του:

1. ***Περί επίπεδων ισορροπιών, βιβλίο α΄.***

2. ***Τετραγωνισμός παραβολής.***
3. ***Περί επίπεδων ισορροπιών, βιβλίο β΄.***
4. ***Περί των μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένην έφοδος.***
5. ***Περί σφαίρας και κυλίνδρου, βιβλία α΄ και β΄.***
6. ***Περί ελίκων.***
7. ***Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων.***
8. ***Περί οχουμένων, βιβλία α΄ και β΄.***
9. ***Κύκλου μέτρησις.***
10. ***Ψαμμίτης.***

Σώζεται ακόμα το ***Βοεικόν Πρόβλημα*** σε επιγραμματική μορφή και μια συλλογή προτάσεων Αρχιμήδειας προέλευσης, γνωστή ως ***Βιβλίο λημμάτων***. Εκτός από αυτά τα έργα διαθέτουμε και δυο αποσπάσματα από τη πραγματεία ***Στομάχιον***, ένα στα αραβικά και ένα στα ελληνικά.

Τρεις από τις σωζόμενες πραγματείες του Αρχιμήδη είναι αφιερωμένες στην επίπεδη γεωμετρία (*Τετραγωνισμός παραβολής, Κύκλου μέτρησις, Περί ελίκων*) ενώ δυο (*Περί σφαίρας και κυλίνδρου, βιβλία α΄ και β΄, Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων*) ασχολούνται με προβλήματα στις τρεις διαστάσεις. Δυο είναι οι αριθμητικού περιεχομένου πραγματείες (*Ψαμμίτης, Βοεικόν Πρόβλημα*), ενώ θα λέγαμε ότι ανήκουν στα εφαρμοσμένα μαθηματικά οι πραγματείες του *Περί επίπεδων ισορροπιών, βιβλίο α΄ και βιβλίο β΄* και *Περί οχουμένων, βιβλία α΄ και β΄.*

β. Αναφορές σε έργα του Αρχιμήδη που έχουν χαθεί.

Υπάρχουν αρκετές αναφορές για έργα του Αρχιμήδη που δεν έχουν φτάσει ως εμάς, ενδεικτικά αναφέρουμε τα εξής:

1. Ο Πάππος[1] αναφέρει κάποια διερεύνηση του Αρχιμήδη για τα ημικανονικά πολύεδρα.
2. Στον Ψαμμίτη ο ίδιος ο Αρχιμήδης αναφέρει ένα προηγούμενο βιβλίο του, αφιερωμένο στον Ζεύξιππο, με θέμα του την ονομασία (κατονόμαξις) των αριθμών.
3. Ο Θέων ο Αλεξανδρεύς αποδίδει στον Αρχιμήδη ένα έργο οπτικής (*περί κατοπτρικών*).
4. Τα δυο σωζόμενα βιβλία α΄ και β΄ της πραγματείας *Περί επίπεδων ισορροπιών* δεν περιέχουν όλα όσα έγραψε ο Αρχιμήδης σε σχέση με τον κλάδο της στατικής. Υπάρχουν αρκετές αναφορές για άλλα έργα του, αλλά δεν μπορούμε να είμαστε εντελώς βέβαιοι κατά πόσο τα έργα που αναφέρονται με διαφορετική ονομασία είναι όντως διαφορετικά (Heath 1897, Σταμάτης 1970, Dijksterhuis 1987). Ο ίδιος ο Αρχιμήδης αναφέρει ένα έργο του *Στοιχεία των μηχανικών*, ενώ αλλού αναφέρει πως κάποια πρόταση έχει αποδειχθεί στο *Περί ισορροπιών*, χωρίς όμως να υπάρχει η συγκεκριμένη πρόταση στο *Περί επίπεδων ισορροπιών*. Ο Πάππος αναφέρει επίσης ένα έργο *περί ισορροπιών* ή *περί μοχλών*, ενώ ο Ήρωνας[2] αναφέρεται και σε *έργα περί του μοχλού*. Ο Ήρωνας επιπλέον αναφέρει και ένα έργο *Στοιχεία επί των στηρίξεων*. Είναι πιθανό να υπήρχε ένα γενικότερο έργο του Αρχιμήδη

---

[1] Ο **Πάππος ο Αλευξανδρεύς** ήταν έλληνας μαθηματικός που έζησε στην Αλεξάνδρεια (περίπου 290 μ.Χ. με 350μ.Χ.). Το σημαντικότερο έργο του είναι η *Συναγωγή* στο οποίο συγκέντρωσε τα σπουδαιότερα μαθηματικά επιτεύγματα του ελληνικού κόσμου τα οποία συμπλήρωσε και σχολίασε ο ίδιος. Θεωρείται ο τελευταίος από τους μεγάλους έλληνες γεωμέτρες ενώ ένα από τα θεωρήματα του θα λέγαμε ότι εντάσσεται στη σύγχρονη προβολική γεωμετρία.

[2] Ο **Ήρων ο Αλεξανδρεύς** (≅10 μ.Χ. -75 μ.Χ.) ήταν σπουδαίος γεωμέτρης και μηχανικός. Τα γεωμετρικά έργα του ασχολούνται περισσότερο με προβλήματα μέτρησης, ενώ τα μηχανικά έργα του με την περιγραφή ιδιοφυών μηχανών. Το σπουδαιότερο έργο του είναι τα *Μετρικά*, ενώ άλλα έργα του είναι το *Περί διόπτρας*, τα *Κατοπτρικά* και τα *Πνευματικά*.

Περί ισορροπιών, και τα σωζόμενα βιβλία *Περί επίπεδων ισορροπιών* να ήταν μέρος αυτού.

5. Αναφέρεται ένα έργο *Περί σφαιροποιίας* στο οποίο ο Αρχιμήδης ασχολούταν με την κατασκευή ενός πλανητάριου.

6. Τέλος από αραβικές πηγές έχουμε πληροφορίες για έργα του Αρχιμήδη για: εγγραφή κανονικού επταγώνου σε κύκλο, κατασκευή ωρολογίου που λειτουργούσε με νερό, περί κύκλων εφαπτομένων αλλήλων, περί των αρχών της γεωμετρίας, περί παραλλήλων γραμμών, περί τριγώνων (Σταμάτης 1970, Dijksterhuis 1987).

2. Το ¨Στομάχιον¨

Από την πραγματεία του Αρχιμήδη ¨Στομάχιον¨, σώζονται δυο αποσπάσματα. Το ένα απόσπασμα είναι στα ελληνικά και περιλαμβάνεται στον χειρόγραφο κώδικα C, ο οποίος ανακαλύφθηκε το 1906 στην Κωνσταντινούπολη από τον Heiberg. Το άλλο χειρόγραφο είναι στα αραβικά το οποίο μεταφράστηκε στα γερμανικά και εκδόθηκε το 1899 από τον αραβολόγο H. Suter[1]. Και τα δυο αποσπάσματα μαζί δεν επαρκούν για να καταλάβουμε το είδος της μαθηματικής ανάλυσης που είχε ο Αρχιμήδης στο μυαλό του όταν έγραφε την πραγματεία (Dijksterhuis, 1987).

2.1. Το παιχνίδι ¨Στομάχιον¨.

Η πραγματεία έχει άμεση σχέση με ένα ομώνυμο παιδικό παιχνίδι, αποτελούμενο από 14 επίπεδα πολυγωνικά κομμάτια ελεφαντοστού, το οποίο αναφέρουν οι αρχαίοι γραμματικοί. Αρχικά τα κομμάτια σχηματίζουν τετράγωνο και αντικείμενο του παιχνιδιού είναι η αναδιάταξη των κομματιών προκειμένου να σχηματιστούν διάφορες φιγούρες (Dijksterhuis 1987, Χριστιανίδης 2006, Netz, Noel 2007).

Από τις αρχαίες πηγές αναφέρουμε ενδεικτικά τις εξής:

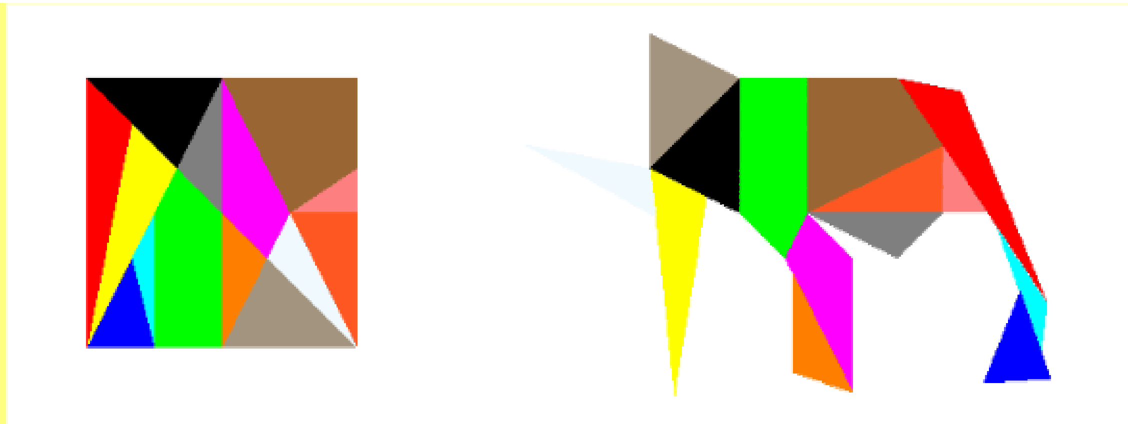
I. Ο Αυσόνιος[2] αναφέρει ένα παιχνίδι που οι έλληνες ονομάζουν οστομάχιον (ostomacheion) το οποίο αποτελείται από 14 κομμάτια ελεφαντοστού διαφόρων σχημάτων. Με διάφορες συναρμολογήσεις αυτών, σχηματίζονται πολλές μορφές όπως: ελέφαντας (**ΣΧΗΜΑ 2.1**), αγριόχοιρος, μονομάχος, πύργος. Προσθέτει ότι η αρμονική συναρμολόγηση που γίνεται από

[1] Suter H: *Der loculus Archimedius oder Das Syntemachion des Archimedes*. Abhandlungen zur Geschichte Mathematik IX (1899) p.491.

[2] Ausonius. Ρωμαίος ποιητής του 4^{ου} αιώνα.

κάποιον ειδήμονα είναι θαυμαστή, ενώ η συναρμολόγηση εκ μέρους των αδαών είναι γελοία (Σταμάτης, 1970, τόμος Α, μέρος Α, μαρτυρία 203).

ΙΙ. Ο Καίσιος Βάσσος[1] το ονομάζει ¨κουτί του Αρχιμήδη¨ (loculus Archimedius) «το οποίο έχει 14 κομμάτια (οστάρια) από ελεφαντοστό, με διάφορες γωνίες· και τα οποία οστάρια είναι εγκλεισμένα σε τετράγωνο σχήμα. Όταν εμείς τα συνθέτουμε με διάφορους τρόπους, άλλοτε σχηματίζουν περικεφαλαία, άλλοτε εγχειρίδιο, άλλοτε στήλη, άλλοτε πλοίο και μπορούν να σχηματίσουν αναρίθμητα τέτοια είδη, τα οποία ήταν σε εμάς, όταν είμαστε παιδιά, σε μεγάλο βαθμό ωφέλιμα ενισχύοντας τη μνήμη μας» (Νεοελληνική απόδοση με βάση τη μετάφραση του Σταμάτη, 1970, τόμος Α, μέρος Α, μαρτυρία 204).



ΣΧΗΜΑ 2.1

ΙΙΙ. Ο Βικτωρίνος Μάριος[2], στο Grammatici Latini, συγκρίνει την πολυμορφία των ποιητικών μορφών που προκύπτουν από εννέα ποιητικά μέτρα, με τις αναρίθμητες μορφές που προκύπτουν από

[1] Caesius Bassus. Ρωμαίος ποιητής του 1ου αιώνα.
[2] Gaius Marius Victorinus. Ρωμαίος ρήτορας, φιλόσοφος και θεολόγος του 4ου αιώνα. Γεννημένος στην Αφρική, διακρίθηκε ως δάσκαλος ρητορικής στην Ρώμη.

το κουτί του Αρχιμήδη (loculus Archimedius) το οποίο αποτελείται από 14 ελεφάντινα ελάσματα (Σταμάτης, 1970, τόμος Α, μέρος Α, μαρτυρία 244).

2.2. Στομάχιον, οστομάχειον, συντεμάχιον ή Αρχιμήδειο κουτί;

Ο Suter στη μετάφραση του αραβικού χειρόγραφου προτείνει την ονομασία συν-τεμάχιον, δηλώνοντας έτσι τη φύση του παιχνιδιού που είναι ο συνδυασμός κομματιών (τεμαχίων) για τον σχηματισμό φιγούρων (Dijksterhuis 1987, Netz, Noel 2007). Άλλοι φιλόλογοι, προτείνουν την ονομασία οστο-μάχειον θεωρώντας ότι αναφέρεται στη προσπάθεια (μάχη) να συνδυαστούν τα διάφορα κομμάτια ελεφαντοστού (οστά) (Dijksterhuis 1987, Χριστιανίδης 2006, Netz, Noel 2007). Την ονομασία ¨Στομάχιον¨ την πρότεινε ο Heiberg στο περιοδικό Hermes (vol.42) στη μετάφραση του χειρόγραφου κώδικα C που έκανε το 1907 (Dijksterhuis 1987). Ο Heiberg καθώς και οι Netz, Acerbi, Wilson σημειώνουν ότι το ελληνικό χειρόγραφο (κώδικας C) γράφει Στομάχιον, (Dijksterhuis 1987, Netz, Acerbi, Wilson 2004) αυτή η ονομασία έχει επικρατήσει διεθνώς και αυτή την ονομασία υιοθετούμε και σε αυτή την εργασία..

Στις λατινικές πηγές το Στομάχιον αναφέρεται συχνά ως Αρχιμήδειο κουτί (loculus Archimedius). Αυτό δεν σημαίνει ότι το παιχνίδι ήταν επινόηση του Αρχιμήδη. Ο χαρακτηρισμός ¨Αρχιμήδειο¨ απλά δηλώνει ότι το παιχνίδι ήταν αρκετά δύσκολο και απαιτούσε ιδιαίτερη ευφυΐα (Heath 1897, Dijksterhuis 1987). Μια άλλη άποψη, όχι κατ΄ ανάγκη αντίθετη με την προηγούμενη, είναι ότι ο χαρακτηρισμός ¨Αρχιμήδειο¨ δηλώνει το γεγονός ότι ο Αρχιμήδης ασχολήθηκε με το παιχνίδι ¨Στομάχιον¨ από μια μαθηματική σκοπιά. Η άποψη αυτή ισχυροποιείται από την εισαγωγική πρόταση του ελληνικού αποσπάσματος της πραγματείας, όπου δηλώνεται ότι είναι αναγκαίο να συζητηθούν κάποιες ιδιότητες του λεγομένου Στομαχίου (Dijksterhuis 1987).

2.3. Το αραβικό απόσπασμα.

Όπως προαναφέραμε το αραβικό απόσπασμα το οποίο σώζεται από το Στομάχιον το μετέφρασε ο Suter στα γερμανικά και το εξέδωσε το 1899. Μπορούμε να διακρίνουμε δυο μέρη στο αραβικό απόσπασμα:

α. το πρώτο μέρος αναφέρει πως κατασκευάζεται το Στομάχιον, δηλαδή με ποιο τρόπο χωρίζουμε το αρχικό τετράγωνο σε 14 κομμάτια,

β. το δεύτερο μέρος αποδεικνύει ότι το εμβαδό κάθε ενός από τα 14 κομμάτια στα οποία έχει χωριστεί το τετράγωνο, είναι σε ρητό λόγο με το εμβαδό ολόκληρου του τετραγώνου και υπολογίζει τους λόγους.

Ο συγγραφέας του αραβικού αποσπάσματος δηλώνει ρητά ότι το αραβικό απόσπασμα αποτελεί το βιβλίο του Αρχιμήδη για το Στομάχιον και πως σκοπός της πραγματείας είναι η απόδειξη της πρότασης ότι κάθε ένα από τα 14 κομμάτια είναι ρητό μέρος του όλου. Παρόλα αυτά το σωζόμενο ελληνικό χειρόγραφο φαίνεται να θέτει έναν διαφορετικό στόχο προς διερεύνηση. Κατά πόσο το αποτέλεσμα του αραβικού κομματιού είναι ένα μέρος αυτής της διερεύνησης και ποιο ακριβώς μέρος είναι δεν μπορεί να ειπωθεί με σιγουριά.

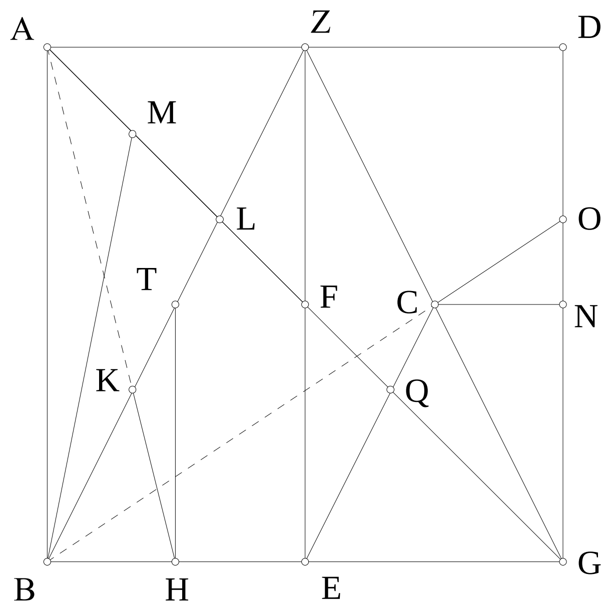
α. Κατασκευή του ¨Στομαχίου¨.

Παραθέτουμε παρακάτω το πρώτο μέρος από το αραβικό απόσπασμα όπου αναφέρεται η κατασκευή του Στομαχίου[1].

[1] Το κείμενο βασίζεται σε μετάφραση του γερμανικού κειμένου του Suter που έγινε με τη βοήθεια της Χαριτίνης Γεωργοπούλου, καθώς και στη μετάφραση του Ευάγγελου Σταμάτη (1974).

Το βιβλίο του Αρχιμήδη για τον χωρισμό του σχήματος Στομάχιον σε δεκατέσσερα επιμέρους σχήματα σε σχέση (αναλογίας) με αυτό.

Σχεδιάζουμε ένα παραλληλόγραμμο, το ABGD (**ΣΧΗΜΑ 2.2**). Διχοτομούμε την BG στο E, φέρνουμε την EZ κάθετη στη BG, τραβάμε τις διαγωνίους AG, BZ και ZG. Διχοτομούμε ομοίως την BE στο H, και φέρνουμε την HT κάθετη στην BE. Τοποθετούμε τον χάρακα στο H ώστε να διέρχεται από το A και φέρνουμε την HK. Διχοτομούμε την AL στο M και φέρνουμε τη BM. Έτσι το ορθογώνιο AE (ABEZ) είναι χωρισμένο σε εφτά κομμάτια.



ΣΧΗΜΑ 2.2

Κατόπιν διχοτομούμε την GD στο N, επίσης την ZG στο C. Τραβάμε την EC. Τοποθετούμε το χάρακα στα B, C και στην ευθεία αυτή ορίζεται η CO. Τραβάμε επίσης την CN, οπότε και το ορθογώνιο ZG (ZEGD) είναι χωρισμένο σε εφτά κομμάτια, αλλά με άλλο τρόπο από το προηγούμενο και ολόκληρο το ορθογώνιο (τετράγωνο) σε 14 κομμάτια.

β. Υπολογισμός εμβαδού για κάθε ένα από τα 14 μέρη του ¨Στομαχίου¨.

Πριν συνεχίσουμε την περαιτέρω παράθεση της μετάφρασης του αραβικού αποσπάσματος πρέπει να αναφέρουμε ότι για τον υπολογισμό των λόγων των εμβαδών διαφόρων σχημάτων, είτε κάποιων λόγων ευθυγράμμων τμημάτων, θεωρούνται γνωστές και χρησιμοποιούνται κάποιες προτάσεις από τα Στοιχεία του Ευκλείδη. Η χρήση αυτών των προτάσεων δεν δηλώνεται ρητά αλλά υπονοείται. Θα αναφέρουμε εδώ αυτές τις προτάσεις[1] και θα δηλώνουμε τη χρήση τους στο κείμενο εντός παρενθέσεων. Προφανώς θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και συνδυασμοί άλλων προτάσεων για να αποδειχθούν οι ισχυρισμοί του κειμένου. Οι χρησιμοποιούμενες προτάσεις από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη είναι οι εξής:

<u>Πρόταση Ι. 15.</u>

Αν δύο ευθείες τέμνονται, σχηματίζουν τις κατακορυφήν γωνίες ίσες μεταξύ τους.

<u>Πρόταση Ι. 29.</u>

Η ευθεία που τέμνει δυο παράλληλες ευθείες σχηματίζει τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τις εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες και τις εντός επί τα αυτά παραπληρωματικές.

<u>Πρόταση VI. 1.</u>

Τα τρίγωνα (και τα παραλληλόγραμμα) τα οποία έχουν το ίδιο ύψος, έχουν λόγο εμβαδών ίσο προς το λόγο των βάσεων τους.

<u>Πρόταση VI. 2.</u>

[1] Οι διατυπώσεις των προτάσεων βασίζονται κυρίως στο βιβλίο: *Ευκλείδη Στοιχεία* του Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. (2001), αλλά έχουμε συμβουλευθεί και τα: *The thirteen books of Elements*, Heath (1956), και *Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχεία,* Σταμάτης (1975).

Αν φέρουμε μια ευθεία παράλληλη προς μια πλευρά ενός τριγώνου, θα χωρίζει τις δυο άλλες πλευρές του τριγώνου σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα αν μια ευθεία χωρίζει δυο πλευρές ενός τριγώνου σε μέρη ανάλογα τότε είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου.

Πρόταση VI. 4.

Αν δυο τρίγωνα έχουν ίσες τις γωνίες τους, τότε έχουν τις πλευρές τους ανάλογες (είναι όμοια) και οι ομόλογες πλευρές είναι αυτές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες.

Πρόταση VI. 19.

Ο λόγος των εμβαδών δυο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους (του λόγου των ομόλογων πλευρών τους).

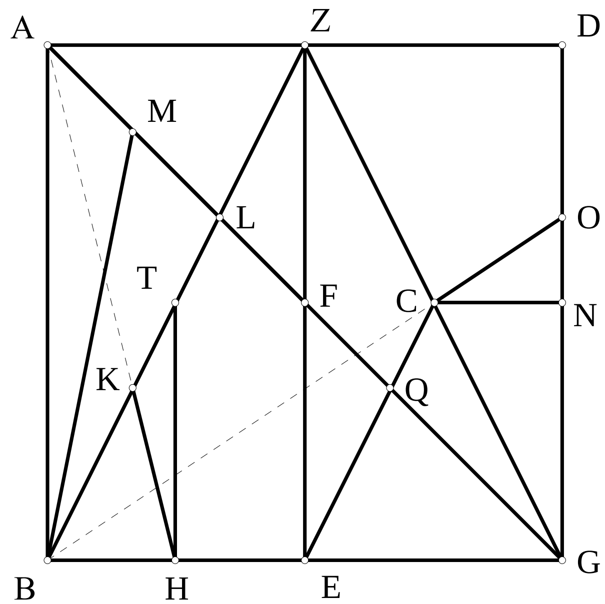
Για τον υπολογισμό λόγων εμβαδών τριγώνων η περισσότερο συχνά χρησιμοποιούμενη πρόταση είναι η Πρόταση VI.1. Για να δειχτεί ισότητα λόγων ευθυγράμμων τμημάτων χρησιμοποιείται η Πρόταση VI.4 αφού δειχθεί πρώτα η ισότητα των γωνιών με χρήση των προτάσεων I.15 και I.29.

Συνεχίζουμε την παράθεση του αραβικού αποσπάσματος:

> Θα δείξουμε ότι κάθε ένα από τα δεκατέσσερα κομμάτια του τετραγώνου είναι σε ρητή αναλογία με ολόκληρο το τετράγωνο.
>
> Επειδή η ZG είναι διαγώνιος του ορθογωνίου ZG (ZEGD), το τρίγωνο DZG είναι το μισό αυτού του ορθογωνίου, δηλαδή το ¼ του τετραγώνου. Όμως το τρίγωνο GNC είναι ¼ του τριγώνου DZG , γιατί όταν

προεκτείνουμε το EC συναντά το D και τότε το τρίγωνο GDC είναι το μισό του τριγώνου DZG (Πρόταση VI.1) και τότε και τα δυο τρίγωνα GNC και DNC είναι ίσα (Πρόταση VI.1) επομένως το τρίγωνο GNC = 1/16 του τετραγώνου. Εξάλλου όταν προεκτείνουμε τη γραμμή OC η οποία τραβήχτηκε από το B, φαίνεται στο σχήμα ότι η CN είναι παράλληλη στην πλευρά BG του τετραγώνου και αντίστοιχα του τριγώνου OBG, οπότε έχουμε την αναλογία BG : NC = GO : NO (Πρόταση I.29 και Πρόταση VI.4).

Είναι όμως το τμήμα BG τετραπλάσιο του NC, επομένως και το GO είναι το τετραπλάσιο του NO για αυτό είναι η GN το τριπλάσιο της NO, και το τρίγωνο GNC = 3·ONC (Πρόταση VI.1). Όμως όπως δείξαμε το τρίγωνο GNC = 1/16 του τετραγώνου και συνεπώς ONC = 1/48 του τετραγώνου.



ΣΧΗΜΑ 2.3

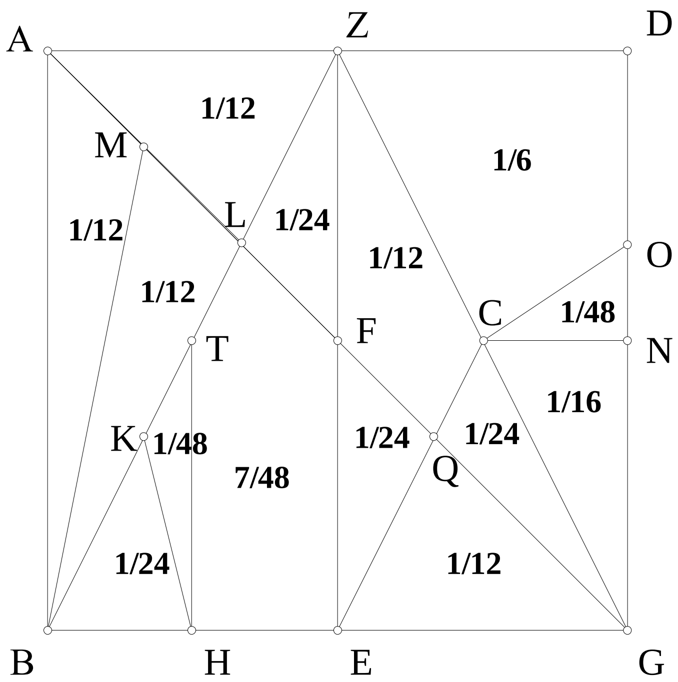
Επειδή εξάλλου το τρίγωνο GDZ = ¼ του τετραγώνου και το τρίγωνο GNC = 1/16 του τετραγώνου και το τρίγωνο NCO =1/48 του τετραγώνου, έτσι μένει ως υπόλοιπο το τετράπλευρο DOCZ =1/6 της τετραγωνικής επιφάνειας. Θεωρώντας ότι η γραμμή NC διέρχεται από το σημείο F και άρα η CF είναι παράλληλη της GE έχουμε την αναλογία EG : CF = EQ : CQ = GQ : FQ (Πρόταση I.15, I.29 και VI.4). Επειδή λοιπόν η EQ = 2CQ και GQ = 2FQ, είναι το τρίγωνο EQG το διπλάσιο κάθε ενός από τα τρίγωνα GCQ και EFQ (Πρόταση VI.1). Είναι προφανές ότι το τρίγωνο EGZ = 2 φορές το τρίγωνο EFG αφού η ZE = 2FE (Πρόταση VI.1). Το τρίγωνο EGZ =1/4 του τετραγώνου οπότε το τρίγωνο EFG = 1/8 του τετραγώνου. Αυτό όμως (το EFG) είναι το τριπλάσιο καθενός από τα δυο τρίγωνα EFQ και GCQ, συνεπώς κάθε ένα από αυτά τα τρίγωνα είναι το 1/24 του τετραγώνου. Και το τρίγωνο EGQ είναι διπλάσιο από κάθε ένα από αυτά τα δυο τρίγωνα, συνεπώς (το EQG) είναι ίσο με το 1/12 του τετραγώνου. Εξάλλου επειδή ZF=EF το τρίγωνο ZFG =τρίγωνο EFG, (Πρόταση VI.1) οπότε όταν αφαιρέσουμε το τρίγωνο GCQ= τρίγωνο EFQ μένει το τετράπλευρο FQCZ = τρίγωνο EGQ, έτσι το τετράπλευρο FQCZ= 1/12 του τετραγώνου AG.

Έχουμε έτσι χωρίσει το ορθογώνιο ZG(ZEGD) σε 7 κομμάτια και πάμε να χωρίσουμε το άλλο ορθογώνιο.

Επειδή οι BZ και EC είναι δυο παράλληλοι διαγώνιοι (Πρόταση VI.2) και ZF = EF, το τρίγωνο ZLF = EFQ (Πρόταση I.29, VI.4 και VI.19) έπεται ότι ZLF = 1/24 του τετραγώνου. Επειδή BH = HE, το τρίγωνο BEZ είναι τετραπλάσιο του τριγώνου BHT, διότι κάθε ένα από αυτά είναι ορθογώνιο τρίγωνο (Πρόταση VI.4 και VI.19). Αλλά το τρίγωνο BEZ = ¼ του τετραγώνου, οπότε το τρίγωνο BHT=1/16 του τετραγώνου. Με την προϋπόθεση ότι η HK διέρχεται από το A, έχουμε την αναλογία AB : HT = BK : KT (Πρόταση I.15, I.29 και VI.4). Είναι όμως AB = 2HT, συνεπώς BK = 2KT και άρα BT =3KT, συνεπώς το τρίγωνο BHT είναι τριπλάσιο από το τρίγωνο KHT (Πρόταση VI.1). Όμως το τρίγωνο BHT=1/16 του τετραγώνου, είναι λοιπόν το τρίγωνο KHT=1/48 του τετραγώνου. Επίσης το τρίγωνο BKH είναι διπλάσιο του τριγώνου KHT (Πρόταση VI.1) επομένως ίσο με το 1/24 του τετραγώνου. Επίσης επειδή BL =2 ZL και AL = 2 LF (Πρόταση I.15, I.29 και VI.4), το τρίγωνο ABL είναι διπλάσιο του τριγώνου ALZ (Πρόταση VI.1) και το τρίγωνο ALZ είναι διπλάσιο από το τρίγωνο ZLF (Πρόταση VI.1). Επειδή όμως το τρίγωνο ZLF =1/24 του τετραγώνου είναι ALZ =1/12 του τετραγώνου και ABL =1/6 του τετραγώνου. Είναι όμως το τρίγωνο ABM = το τρίγωνο BML (Πρόταση VI.1) επομένως κάθε ένα από αυτά τα δυο τρίγωνα είναι ίσο με το 1/12 του τετραγώνου. Μένει λοιπόν το πεντάγωνο LFEHT = με το μισό του ενός έκτου αυξημένο με το μισό του ενός ογδόου ($\frac{1}{2}(\frac{1}{6}+\frac{1}{8})$) ολόκληρου του τετραγώνου.

Έχουμε λοιπόν χωρίσει το ορθογώνιο ABEZ σε 7 κομμάτια και επομένως ολόκληρη η φιγούρα ABGD σε 14 κομμάτια χωρισμένη καθένα από τα οποία είναι σε αναλογία με το όλο, το οποίο και ζητούσαμε.

Με την κατασκευή του Στομαχίου όπως περιγράφεται στο αραβικό απόσπασμα έχουμε τον χωρισμό του αρχικού τετραγώνου στα παρακάτω 14 κομμάτια όπου κάθε ένα είναι το αντίστοιχο κλάσμα του αρχικού τετραγώνου που αναγράφεται στο παρακάτω σχήμα (**ΣΧΗΜΑ 2.4**).



ΣΧΗΜΑ 2.4

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι όλα τα κλάσματα εκτός από ένα (7/48) είναι μοναδιαία ενώ και το 7/48 στο κείμενο εκφράζεται με μοναδιαία κλάσματα $\frac{7}{48}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}$.

2.4. Το ελληνικό απόσπασμα.

Το σωζόμενο ελληνικό απόσπασμα περιέχει μια εισαγωγή, την πρώτη πρόταση της πραγματείας και την αρχή της δεύτερης πρότασης. Ο κώδικας C, στον οποίο σώζεται το απόσπασμα, είναι αρκετά κατεστραμμένος με αποτέλεσμα ακόμα και αυτό το σωζόμενο απόσπασμα να είναι ελλιπές και κατά συνέπεια δύσκολο στην ερμηνεία του.

α. Εισαγωγικές προτάσεις.

Στην εισαγωγή ο Αρχιμήδης δηλώνει ότι επειδή το ονομαζόμενο Στομάχιον έχει μια πλούσια θεωρία γύρω από τις μεταθέσεις των σχημάτων που το απαρτίζουν, θεώρησε αναγκαίο να εκθέσει σε ποια μέρη διαιρείται το όλον σχήμα και κάθε ένα από αυτά από ποιόν αριθμό μετριέται (Dijksterhuis 1987, Σταμάτης 1974, Netz et al 2004). Επιπλέον θέλει να βεβαιώσει ποιες γωνίες λαμβανόμενες ανά δυο σχηματίζουν μια ευθεία γωνία (δυο ορθές), ώστε να γίνει γνωστό αν οι συναρμόσεις των παραγόμενων σχημάτων βρίσκονται σε ευθεία ή αποκλίνουν λίγο από την ευθεία ώστε να μην φαίνεται (η απόκλιση). Τέλος δηλώνει ότι υπάρχει όχι μικρό πλήθος από αυτά τα σχήματα, διότι είναι δυνατό να αλλάξουν κάποια από αυτά παίρνοντας τη θέση ενός άλλου σχήματος με το οποίο είναι ίσα και ισογώνια. Ενίοτε δε και από δυο σχήματα τα οποία μαζί είναι ίσα και όμοια με ένα άλλο σχήμα, ή και δυο σχήματα τα οποία μαζί είναι ίσα και όμοια με δυο άλλα σχήματα, σχηματίζονται περισσότερα σχήματα εκ των μεταθέσεων τους (Dijksterhuis 1987, Σταμάτης 1974, Netz et al 2004).

Στη συνέχεια ο Αρχιμήδης παραθέτει μια πρόταση η οποία όμως δεν φαίνεται ποιόν ακριβώς σκοπό της όλης διερεύνησης εξυπηρετεί.

β. Πρώτη πρόταση του ¨Στομαχίου¨.

Η πρώτη πρόταση του Στομαχίου είναι η απόδειξη μιας ανισωτικής σχέσης ανάμεσα σε δυο ευθύγραμμα τμήματα και η απόδειξη ότι μια γωνία είναι αμβλεία, με άμεση συνέπεια να είναι οξεία η εφεξής και παραπληρωματική της γωνία. Στην όλη απόδειξη γίνεται χρήση προτάσεων από τα Στοιχεία του Ευκλείδη τις οποίες αναφέρουμε[1] πριν την πρόταση.

Πρόταση Ι. 18.

Σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

Πρόταση Ι. 19.

Σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία.

Πρόταση Ι. 25.

Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές τους ίσες και η τρίτη πλευρά του ενός είναι μεγαλύτερη της τρίτης πλευράς του άλλου, τότε η γωνία που περιέχεται στις δυο πλευρές του ενός (τριγώνου) θα είναι μεγαλύτερη από τη γωνία που περιέχεται στις δυο πλευρές του άλλου.

Πρόταση Ι. 32.

Σε κάθε τρίγωνο κάθε εξωτερική γωνία είναι ίση με το άθροισμα των δυο εντός και απέναντι γωνιών και το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με δυο ορθές.

---

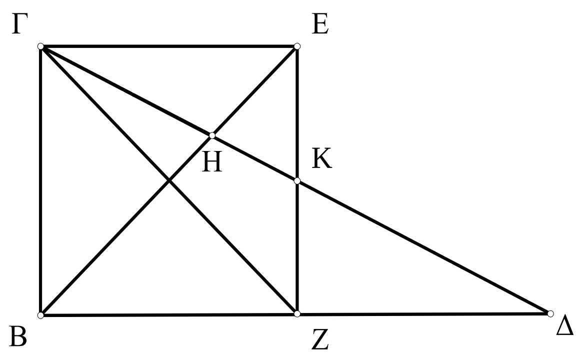
[1] Οι διατυπώσεις των προτάσεων βασίζονται κυρίως στο βιβλίο: *Ευκλείδη Στοιχεία*, του Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. (2001), αλλά έχουμε συμβουλευθεί και τα: *The thirteen books of Elements*, Heath (1956), και *Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχεία*, Σταμάτης (1975).

Παραθέτουμε την πρώτη πρόταση του Στομαχίου:

Έστω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο[1] ΓΒΖΕ (**ΣΧΗΜΑ 2.5**) και Κ το μέσο του τμήματος ΕΖ. Φέρνουμε τη ΒΕ και τη ΓΚ οι οποίες τέμνονται στο Η. Θα δειχθεί ότι ΒΓ>ΒΗ.

Προεκτείνουμε τις ΓΚ και ΒΖ οι οποίες τέμνονται στο Δ. Επειδή είναι η ΕΚ=ΚΖ και η ΓΕ=ΒΖ=ΖΔ συνεπώς η ΓΖ>ΖΔ. Οπότε η γωνία $\mathrm{Z}\hat{\Delta}\Gamma > \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\Delta$ (Πρόταση Ι.18). Είναι δε $\mathrm{H}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$ γιατί κάθε μια από αυτές είναι μισή της ορθής ($45°$). Είναι συνεπώς η γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{H}}\mathrm{B} > \mathrm{H}\hat{\Gamma}\mathrm{B}$, αφού η $\Gamma\hat{\mathrm{H}}\mathrm{B}$ είναι ίση με τις δυο εντός και απέναντι γωνίες (Πρόταση Ι.32) δηλαδή $\Gamma\hat{\mathrm{H}}\mathrm{B} = \mathrm{H}\hat{\mathrm{B}}\Delta + \mathrm{H}\hat{\Delta}\mathrm{B}$, (ενώ η $\mathrm{H}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{B} + \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\Delta$).

Συνεπώς ΓΒ>ΒΗ (Πρόταση Ι.19).



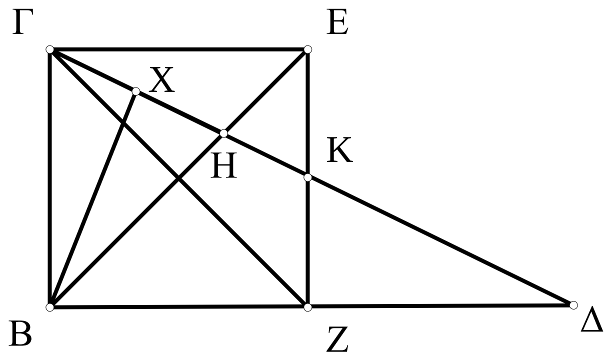
ΣΧΗΜΑ 2.5

Και συνεχίζει η πραγματεία:

Εάν συνεπώς θεωρήσουμε το Χ ως το μέσο της ΓΗ (**ΣΧΗΜΑ 2.6**), θα είναι αμβλεία η γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{X}}\mathrm{B}\cdot$ διότι επειδή είναι ΓΧ=ΧΗ και η ΒΧ κοινή, υπάρχουν δυο τρίγωνα (τα ΒΧΓ και ΒΧΗ) με δυο πλευρές ίσες και η βάση

[1] Αν και στο ελληνικό χειρόγραφο, στην εκφώνηση της πρώτης πρότασης, το κείμενο αναφέρει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, κατά τη διάρκεια της απόδειξης γίνεται φανερό χωρίς αμφιβολία πως το σχήμα στο οποίο αναφέρεται είναι τετράγωνο.

ΒΓ>ΒΗ, άρα και η γωνία απέναντι της μεγαλύτερης βάσης είναι μεγαλύτερη (Πρόταση Ι.25). Είναι άρα αμβλεία μεν η $\Gamma\hat{X}B$, οξεία δε η εφεξής $B\hat{X}H$.



ΣΧΗΜΑ 2.6

2.5. Σχολιασμός.

α. Ο Σταμάτης καταχωρεί την πραγματεία στις μηχανικές κατασκευές του Αρχιμήδη και υποστηρίζει ότι το περιεχόμενο της είναι η θεωρία κατασκευής των 14 τεμαχίων (Σταμάτης, 1970, τόμος Α΄, μέρος Α΄, σελ.8). Επίσης στη σελίδα 21 του ίδιου τόμου αναφερόμενος στο περιεχόμενο των συγγραμμάτων του Αρχιμήδη, συμμερίζεται την άποψη ότι το Στομάχιον περιέχει την θεωρία για την διαίρεση του τετραγώνου σε 14 κομμάτια, τα εμβαδά των οποίων είναι σε ρητό λόγο με το εμβαδό του τετραγώνου.

β. Ο Heath (1897, p.xxii) δεν θεωρεί το Στομάχιον εφεύρεση του Αρχιμήδη. Θεωρεί ότι το παιχνίδι προϋπήρχε και απλά ο Αρχιμήδης ασχολήθηκε με αυτό από κάποια μαθηματική σκοπιά. Το γεγονός ότι το παιχνίδι σε αρκετές λατινικές πηγές χαρακτηρίζεται ως Αρχιμήδειο κουτί (luculus Archmedae) ερμηνεύεται από τον Heath ως ένδειξη της δυσκολίας του. Για να ισχυροποιήσει την άποψη του, αναφέρει ότι χρησιμοποιούταν και η έκφραση: ¨Αρχιμήδειο πρόβλημα¨ για κάποιο πρόβλημα που θεωρούταν δύσκολο ή απαιτούσε ιδιαίτερη ιδιοφυΐα η επίλυση του. Επίσης αναφέρει και τις ¨Αρχιμήδειες μηχανές¨ ως μηχανές έξυπνα κατασκευασμένες.

γ. Ο Dijksterhuis (1987) συμφωνεί με τον Heath στο ότι το Στομάχιον δεν είναι εφεύρεση του Αρχιμήδη και υιοθετεί την άποψη ότι το επίθετο ¨Αρχιμήδειος¨ απλά δηλώνει κάτι το οποίο είναι δύσκολο ή απαιτεί ιδιαίτερη οξύνοια για να κατανοηθεί. Είναι επιφυλακτικός σε σχέση με το κατά πόσο το Αραβικό απόσπασμα είναι αυτό που δηλώνει, δηλαδή η ίδια η πραγματεία του Αρχιμήδη για τον χωρισμό του Στομαχίου σε 14 κομμάτια. Θεωρεί ότι ο Αρχιμήδης ασχολήθηκε με το Στομάχιον από κάποια μαθηματική σκοπιά, αλλά δηλώνει ξεκάθαρα ότι τα υπάρχοντα αποσπάσματα είναι ανεπαρκή για να μας παρέχουν οποιαδήποτε ιδέα για τον τελικό σκοπό του Αρχιμήδη. Για τον Dijksterhuis το αραβικό απόσπασμα ίσως παίζει κάποιον ρόλο στον τελικό σκοπό της αρχικής πραγματείας, αλλά δεν είναι ξεκάθαρο ποιος είναι ο ρόλος αυτός. Σε καμία περίπτωση το αραβικό απόσπασμα δεν συμπίπτει με την αρχική πραγματεία αφού το σωζόμενο ελληνικό απόσπασμα δεν περιλαμβάνεται στο αραβικό απόσπασμα.

δ. Οι Netz, Acerbi και Wilson (2004) θεωρούν ότι το Αραβικό χειρόγραφο δεν είναι πιστή αντιγραφή της πραγματείας του Αρχιμήδη. Θεωρούν μάλιστα ότι δεν είναι πιστή αντιγραφή ούτε καν ενός μέρους της αρχικής πραγματείας. Αυτό το δικαιολογούν (πειστικά κατά την άποψή μας) σχολιάζοντας ότι το ύφος δεν είναι Αρχιμήδειο, το περιεχόμενο και ο σκοπός της πραγματείας έτσι όπως παρουσιάζεται στο αραβικό απόσπασμα, είναι γεμάτο επαναλήψεις και καταλήγει σε κάτι τετριμμένο. Τρόπος και ύφος γραφής στα οποία δεν μας έχει ¨συνηθίσει¨ ο Αρχιμήδης κρίνοντας από τις άλλες πραγματείες του πού έχουν σωθεί.

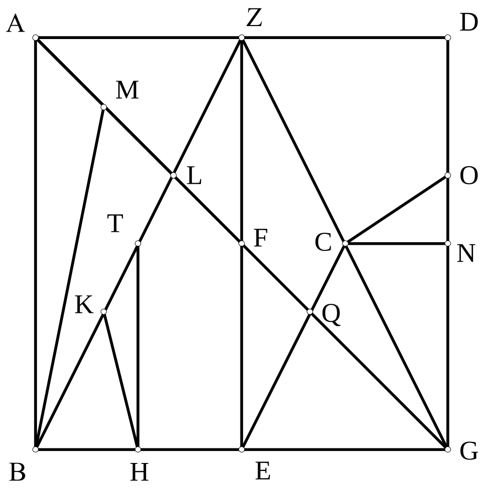
Οι Netz, Acerbi και Wilson, όμως προχωρούν ακόμα παραπέρα εικάζοντας ότι το Στομάχιον είναι η πρώτη πραγματεία συνδυαστικής ανάλυσης. Διατυπώνουν την άποψη ότι ο Αρχιμήδης στην εισαγωγή της πραγματείας θέτει το ερώτημα: με πόσους τρόπους μπορούν να αναδιαταχθούν τα 14 κομμάτια που αποτελούν το Στομάχιον, ώστε να σχηματίσουν εκ νέου το αρχικό σχήμα; (είτε αυτό είναι ορθογώνιο είτε αυτό είναι τετράγωνο).

Παρόλο που θεωρούμε ότι η άποψη του Dijksterhuis είναι πιο νηφάλια (από αυτή των Netz, Acerbi και Wilson) και ότι δεν μπορούμε, από τα υπάρχοντα αποσπάσματα, να συμπεράνουμε με σιγουριά τον τελικό στόχο της πραγματείας του Αρχιμήδη, αξίζει να μείνουμε και να εξετάσουμε την εικασία των Netz, Acerbi και Wilson, σε δυο επίπεδα:

α. να εξετάσουμε το πλαίσιο στο οποίο μπορούμε να εντάξουμε την άποψη ότι οι αρχαίοι είχαν μεθόδους συνδυαστικής, και

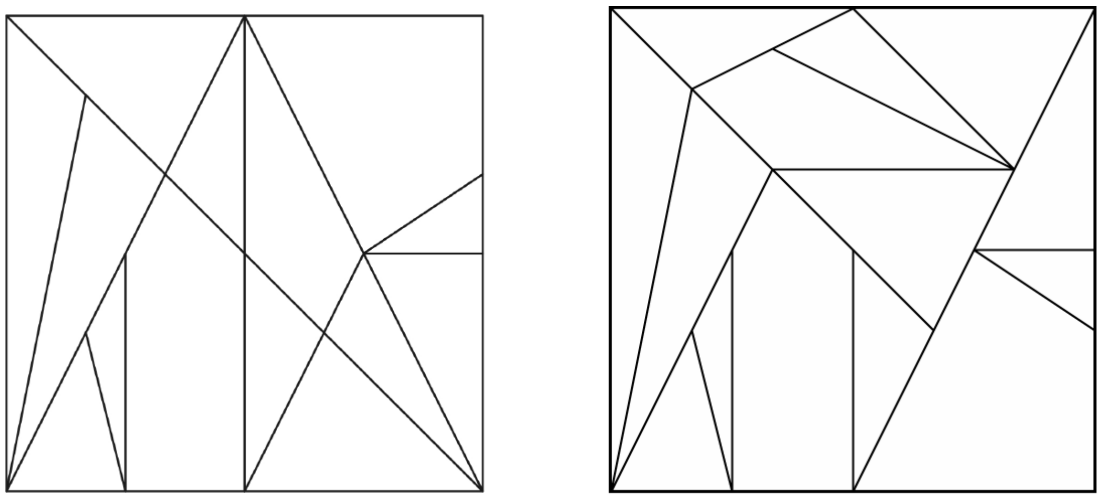
β. δεχόμενοι ότι το Στομάχιον είναι ένα πρόβλημα συνδυαστικής ανάλυσης, να εικάσουμε πως πιθανά έλυσε αυτό το πρόβλημα ο Αρχιμήδης.

Πριν εξετάσουμε τα δυο αυτά ζητήματα θα διατυπώσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια την εικασία των Netz, Acerbi, Wilson (2004) για το ποιος είναι ο στόχος της πραγματείας Στομάχιον. Όπως έχει αναφερθεί το Στομάχιον ήταν ένα επιτραπέζιο παιχνίδι αποτελούμενο από 14 κομμάτια όπως στο παρακάτω σχήμα (**ΣΧΗΜΑ 2.7**) και σκοπός του παιχνιδιού ήταν ο σχηματισμός κάποιας φιγούρας με αυτά τα κομμάτια (όπως ελέφαντας, βλέπε **ΣΧΗΜΑ 2.1**).



ΣΧΗΜΑ 2.7

Η διάταξη των επιμέρους πολυγώνων εντός του τετραγώνου στο **ΣΧΗΜΑ 2.7**, είναι αυτή που προκύπτει από την κατασκευή του Στομαχίου όπως αυτή περιγράφεται στο αραβικό απόσπασμα. Θα μπορούσαμε όμως να σχηματίσουμε το τετράγωνο και με διαφορετική διευθέτηση των 14 κομματιών του. Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα έχουμε δυο διαφορετικές τοποθετήσεις των πολυγώνων εντός του τετραγώνου, όπου αριστερά είναι η αρχική που προκύπτει από το αραβικό απόσπασμα, ενώ δεξιά έχουμε μια άλλη διάταξη των πολυγώνων εντός του τετραγώνου.



ΣΧΗΜΑ 2.8

Ένα ερώτημα που τίθεται εδώ είναι το εξής: πόσες διαφορετικές διευθετήσεις των 14 αρχικών κομματιών υπάρχουν ώστε να σχηματίζουν το τετράγωνο; Οι Netz, Acerbi, Wilson υποστηρίζουν ότι ακριβώς με αυτό το ερώτημα ασχολείται η πραγματεία του Αρχιμήδη. Συνεπώς, είναι ένα πρόβλημα γεωμετρικής συνδυαστικής, αφού αναζητά το πλήθος των δυνατών διευθετήσεων 14 δεδομένων πολυγώνων για τον σχηματισμό ενός τετραγώνου. Η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα εξαρτάται από τις συμβάσεις που θα δεχτούμε. Για παράδειγμα, θεωρούμε διαφορετικές δυο διατάξεις οι οποίες διαφέρουν κατά μια αντικατάσταση δυο ίσων πολυγώνων (όπως τα τρίγωνα AZL και EGQ στο **ΣΧΗΜΑ 2.7**) ή όχι; επιπλέον, θεωρούμε διαφορετικές δυο διατάξεις των πολυγώνων (tiling) οι οποίες προκύπτουν η μια από την άλλη με στροφή ή ανάκλαση όλου του τετραγώνου, ή όχι;

Πριν απαντήσουμε σε αυτά τα ερωτήματα θα εξετάσουμε κατά πόσο μπορούμε να μιλάμε για συνδυαστική στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά, με την εξής έννοια: Ενδιαφέρονταν οι έλληνες μαθηματικοί για προβλήματα συνδυαστικής; Έθεταν μη τετριμμένα συνδυαστικά ερωτήματα; Είχαν αναπτύξει μη τετριμμένες μεθόδους απαρίθμησης;

3. Συνδυαστική στην αρχαιότητα;

Για να υποστηριχθεί η άποψη ότι το Στομάχιον είναι μια πραγματεία συνδυαστικής ανάλυσης θα πρέπει σε ένα πρώτο επίπεδο να δεχθούμε ότι οι αρχαίοι έλληνες έδειχναν πιθανά ενδιαφέρον σε τέτοιου είδους μαθηματικά προβλήματα, δηλαδή σε μη τετριμμένα προβλήματα απαρίθμησης. Γενικά, μέχρι πρόσφατα επικρατούσε η άποψη ότι οι αρχαίοι έλληνες δεν είχαν ενδιαφερθεί για προβλήματα συνδυαστικής. Ο Biggs (1979), αναφέρει ότι σε κάθε συζήτηση για συνδυαστική στην αρχαιότητα, θα πρέπει να εκτιμηθεί η συνεισφορά των αρχαίων ελλήνων και συνεχίζει: η συνεισφορά αυτή είναι αξιοσημείωτα αρνητική. Η έλλειψη σημαντικών αναφορών για τέτοιου είδους υπολογισμούς οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι έλληνες δεν έδειχναν ενδιαφέρον σε τέτοια θέματα. Κάποιες λίγες αναφορές στην αρχαία ελληνική γραμματεία δεν είχαν διαλευκανθεί για να καταλάβουμε το βαθμό ενασχόλησης των αρχαίων με προβλήματα συνδυαστικής. Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες μαρτυρίες αυτού του είδους είναι αυτή που σχετίζεται με δύο αριθμούς που υπολόγισε ο Ίππαρχος και αναφέρει ο Πλούταρχος.

3.1. Οι αριθμοί του Ίππαρχου.

Στα *Ηθικά* του Πλούταρχου και συγκεκριμένα στο *Περί Στωικών εναντιωμάτων*, ο Πλούταρχος κατηγορεί τον Χρύσιππο, βασικό εκφραστή της Στωικής φιλοσοφίας, ότι ενώ υποστηρίζει πως για διάφορα επιστημονικά θέματα θα πρέπει να ζητάμε τη γνώμη των ειδικών και να μη αυθαιρετούμε εκφράζοντας ατεκμηρίωτες γνώμες, ο ίδιος δεν το πράττει. Για ισχυροποίηση της μομφής του φέρνει ως παράδειγμα της ασυνέπειας του Χρυσίππου, ότι δήλωσε πως οι δυνατοί τρόποι σχηματισμού μιας σύνθετης πρότασης από δέκα απλές προτάσεις ξεπερνούν το ένα εκατομμύριο. Όμως τον αντέκρουσαν οι ασχολούμενοι με τα μαθηματικά και μεταξύ αυτών ο Ίππαρχος ο οποίος υπολόγισε ότι δέκα απλές προτάσεις μπορούν να συνδυαστούν με **103049** τρόπους ενώ αν υπολογίσουμε και τις αρνήσεις, οι δυνατοί συνδυασμοί είναι **310952.**

«… ἀλλὰ μὴν αὐτὸς τὰς διὰ δέκα ἀξιωμάτων συμπλοκὰς πλήθει φησὶν ὑπερβάλλειν ἑκατὸν μυριάδας οὔτε δι' αὑτοῦ ζητήσας ἐπιμελῶς οὔτε διὰ τῶν ἐμπείρων τὸ ἀληθὲς ἱστορήσας. […]· Χρύσιππον δὲ πάντες ἐλέγχουσιν οἱ ἀριθμητικοί, ὧν καὶ Ἵππαρχός ἐστιν ἀποδεικνύων τὸ διάπτωμα τοῦ λογισμοῦ παμμέγεθες αὐτῷ γεγονός, εἴγε τὸ μὲν καταφατικὸν ποιεῖ συμπεπλεγμένων ἀξιωμάτων μυριάδας δέκα καὶ πρὸς ταύταις τρισχίλια τεσσαράκοντα **ἐννέα**, τὸ δ' ἀποφατικὸν ἐνακόσια πεντήκοντα δύο πρὸς τριάκοντα καὶ μιᾷ μυριάσι. »

(Πλούταρχος, *Ηθικά, Περί Στωϊκών εναντιωμάτων*, από το TLG, Plutarchus, De stoicorum repugnatiis, 1047, D, 4).

Παλιότερες προσπάθειες να ερμηνευθούν αυτοί οι δυο αριθμοί ήταν ανεπιτυχείς. Ο T. L. Heath (2001, σελ.307) αναφέρει ότι: «φαίνεται αδύνατο να προκύψει οτιδήποτε από αυτά τα ψηφία». Ο N. L. Biggs (1979) αναφερόμενος στο κείμενο του Πλούταρχου σχολιάζει ότι οι πλέον ενδιαφέρουσες μαρτυρίες είναι και οι πλέον μυστηριώδεις και συμπληρώνει ότι επειδή οι όροι του προβλήματος δεν δηλώνονται επακριβώς, είναι δύσκολο να ερμηνεύσουμε αυτούς τους αριθμούς όπως και τις πιθανές συνδυαστικές αρχές από τις οποίες προέκυψαν. Επίσης ο Biggs αναφέρει ότι οι επιστήμονες της λογικής επανεξέτασαν το πλήθος των σύνθετων προτάσεων οι οποίες μπορούν να σχηματιστούν από n απλές και κατέληξαν στον αριθμό 2^{2^n} (δίνοντας ως αναφορά το Schröder, E. 1890, Algebra der Logik, Leipzig). Τέλος, συμπληρώνει ότι αν το πρόβλημα στο οποίο αναφέρθηκε ο Χρύσιππος ήταν το ίδιο με το οποίο ασχολήθηκαν οι σύγχρονοι μαθηματικοί, τότε αυτός είχε δίκιο και ο Ίππαρχος είχε άδικο μιας και το $2^{2^{10}}$ είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το ένα εκατομμύριο. Ο Richard Stanley στο βιβλίο του *Enumerative Combinatorics*, (1986, vol.1, p.51) θέτει την ερμηνεία του κειμένου του Πλούταρχου σαν ανοικτή άσκηση (άσκηση 1.45) και στις λύσεις των ασκήσεων (p.63) κάνει κάποιες εικασίες χωρίς τελικά να ερμηνεύει τα νούμερα του Ίππαρχου καθαυτά.

Παρ’ όλες τις αποτυχημένες προσπάθειες ερμηνείας των δυο αριθμών του Ιππάρχου, το 1994 είχαμε μια αξιοσημείωτη παρατήρηση από τον David Hough, έναν μεταπτυχιακό φοιτητή του George Washington University. Ο David Hough γεννημένος το 1949 αποφάσισε το 1992, σε ηλικία 43 ετών, να συνεχίσει τις σπουδές του στα μαθηματικά. Συνάντησε το κείμενο του Πλούταρχου και τους αριθμούς του Ιππάρχου σαν άσκηση στο βιβλίο του Richard Stanley που προαναφέραμε και παρατήρησε ότι ο πρώτος από τους δυο αριθμούς (ο 103049) είναι ίσος με τον δέκατο αριθμό Schröder. Ο n-ιοστός αριθμός Schröder (συμβολικά $s(n)$) δίνει το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να εγκιβωτίσουμε (δηλαδή να τοποθετήσουμε σε παρενθέσεις) μια αλυσίδα n ίδιων γραμμάτων, $n \in N, n \geq 1$. Για παράδειγμα, $s(3)=3$, αφού τρία γράμματα μπορούν να τοποθετηθούν σε παρενθέσεις με τους εξής διαφορετικούς τρόπους

$$x(xx), \quad (xx)x \quad \text{και} \quad xxx,$$

ενώ $s(4)=11$ μιας και οι δυνατοί διαφορετικοί εγκιβωτισμοί μιας αλυσίδας τεσσάρων γραμμάτων είναι οι εξής 11:

$$(xxx)x,\ x(xxx),\ (x(xx))x,\ ((xx)x)x,\ x((xx)x),\ x(x(xx)),$$
$$(xx)(xx),\ (xx)xx,\ x(xx)x,\ xx(xx),\ xxxx.$$

Αυτή η παρατήρηση του Hough στηρίζει πολύ πειστικά την υπόθεση-άποψη ότι ο Ίππαρχος για να υπολογίσει τους δυνατούς τρόπους σχηματισμού σύνθετων προτάσεων από δέκα απλές, έκανε υπολογισμούς ισοδύναμους ή αντίστοιχους με τους σύγχρονους υπολογισμούς για τον υπολογισμό των δυνατών εγκιβωτισμών μιας αλυσίδας δέκα γραμμάτων, οπότε και κατέληξε στον αριθμό $s(10) = 103049$. Πριν συνεχίσουμε και εξετάσουμε με ποιόν πιθανά τρόπο κατέληξε ο Ίππαρχος στον αριθμό 103049 θα δώσουμε τις απαραίτητες συνδυαστικές έννοιες για την περαιτέρω διερεύνηση του θέματος.

3.2. Διαμερίσεις ακεραίων.

Έστω θετικός ακέραιος n. Μια διαμέριση (partition) του n είναι η αναπαράσταση του σαν άθροισμα θετικών ακεραίων χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά των προσθετέων, δηλαδή δεν θεωρούμε διαφορετικές τις παραστάσεις του 5 ως 4+1 και 1+4. Για παράδειγμα, όλες οι δυνατές διαμερίσεις του 4 και 5 αντίστοιχα είναι οι εξής:

$$4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$$

και

$$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$$

Επειδή η διάταξη των προσθετέων σε μία διαμέριση δεν έχει σημασία μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι προσθετέοι είναι τοποθετημένοι σε φθίνουσα σειρά και να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός. Έστω n θετικός ακέραιος. **Διαμέριση** του n είναι μια ακολουθία $a = (a_1, a_2, ..., a_k)$ με στοιχεία θετικούς ακεραίους $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_k$ για τους οποίους ισχύει $a_1 + a_2 + ... + a_k = n$. Οι ακέραιοι a_i λέγονται μέρη της διαμέρισης a.

Για παράδειγμα η (3,2,2,2,1) είναι μια διαμέριση του 10 σε 5 μέρη. Το πλήθος όλων των δυνατών διαμερίσεων ενός θετικού ακεραίου n συμβολίζεται με $p(n)$. Συνυπολογίζοντας την μοναδική διαμέριση του n με έναν όρο έχουμε βάση των προηγουμένων παραδειγμάτων $p(4)=5$ και $p(5)=7$. Ενώ δεν υπάρχει κάποιος απλός τύπος για το $p(n)$ για τις διάφορες τιμές του n (Αθανασιάδης, 2009), η γεννήτρια συνάρτηση του $p(n)$ έχει βρεθεί από τον Euler (Hardy, Wright, 1975) και είναι

$$F(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty} p(n)\cdot x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}$$

και θέτοντας $p(0)=1$ μπορεί να γραφεί:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\cdot x^n = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}.$$

(Για μια απόδειξη του πιο πάνω τύπου βλέπε: Αθανασιάδης 2009, σελ.25, ενώ για τις διαμερίσεις ακεραίων βλέπε Hardy, Wright 1975, chap. XIX, ή Miklós Bóna, 2006, chap.5). Οι τιμές του $p(n)$ για $n=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ είναι αντίστοιχα $p(n)$=1,2,3,5,7,11,15,22,30,42.

3.3. Διατεταγμένες διαμερίσεις ακεραίων.

Αν στο προηγούμενο πρόβλημα της παράστασης ενός θετικού ακεραίου n ως άθροισμα θετικών ακεραίων, μας ενδιαφέρει η σειρά των προσθετέων, τότε έχουμε την έννοια της διατεταγμένης διαμέρισης του n (ή σύνθεσης του n). Σε αυτή την περίπτωση οι παραστάσεις του 5 ως 4+1 και 1+4 θεωρούνται διαφορετικές.

Πρόταση. Το πλήθος των διατεταγμένων διαμερίσεων ενός θετικού ακεραίου n, είναι 2^{n-1}.

Για μια απόδειξη αυτής της πρότασης βλέπε Αθανασιάδης, 2007, σελ.16, πρόταση 1.3.6. Μια κατά την άποψη μας πιο εύκολη διαισθητική απόδειξη της προηγούμενης πρότασης είναι η εξής: αναπαριστούμε τον αριθμό n με n σημεία διατεταγμένα πάνω σε μια ευθεία γραμμή όπως στο παρακάτω σχήμα.

ΣΧΗΜΑ 3.1

Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια διατεταγμένη διαμέριση του n, χωρίζοντας τα σημεία σε ομάδες (κάθε ομάδα σημείων αντιπροσωπεύει έναν προσθετέο), εισάγοντας κάποιο σημάδι σε κάποια από τα διαστήματα μεταξύ των n σημείων. Υπάρχουν n-1 τέτοια διαστήματα ανάμεσα στα σημεία. Συνεπώς υπάρχουν 2^{n-1} δυνατότητες να επιλέξουμε αν θα τοποθετήσουμε ή όχι ένα σημάδι σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα. Κάθε μια τέτοια επιλογή θα μας δίνει και μια διατεταγμένη διαμέριση του n, οπότε τελικά υπάρχουν 2^{n-1} διατεταγμένες διαμερίσεις του n. Για παράδειγμα οι $2^3 = 8$ διατεταγμένες διαμερίσεις του 4 είναι:

$$4 = 3+1 = 1+3 = 2+2 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1,$$

ενώ υπάρχουν $512 = 2^9$ διατεταγμένες διαμερίσεις του 10.

3.4. Εγκιβωτισμοί n γραμμάτων.

Έστω μια αλυσίδα n ίδιων γραμμάτων (το n θετικός ακέραιος), τα οποία τα παριστάνουμε με x. Ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε όλους τους δυνατούς τρόπους εγκιβωτισμού τους (bracketing), δηλαδή όλους τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τα τοποθετήσουμε σε παρενθέσεις. Για παράδειγμα ένας εγκιβωτισμός 10 γραμμάτων είναι ο εξής:

$$x(xx((xx)x))x(xxx).$$

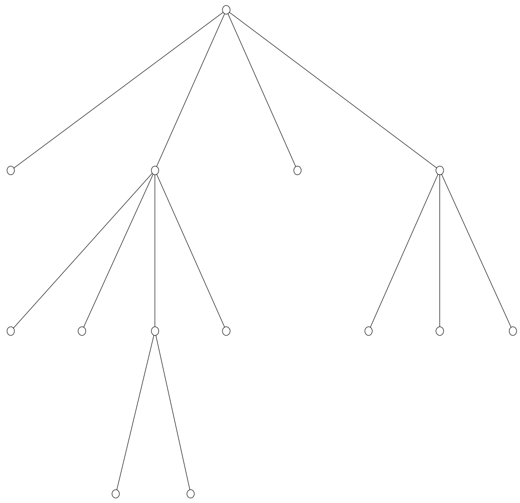
Κάθε μεμονωμένο γράμμα x θεωρείτε εγκιβωτισμένο. Κάθε άλλος εγκιβωτισμός B ορίζεται αναδρομικά ως μια διατεταγμένη k-άδα $(B_1, B_2, \ldots, B_k)$ όπου $k \in N, k \geq 2$ και $B_i\ (i = 1,2,\ldots,k)$ είναι εγκιβωτισμοί. Τότε ο εγκιβωτισμός B μπορεί να γραφεί στην μορφή μη αντιμεταθετικού γινομένου $B=(B_1)\cdot(B_2)\cdot\ldots\cdot(B_k)$. Για παράδειγμα, ο προηγούμενος εγκιβωτισμός των 10 γραμμάτων μπορεί να γραφεί ως $B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot B_4$ όπου $B_1 = x$, $B_2 = (xx((xx)x))$, $B_3 = x$ και $B_4 = (xxx)$. Επιπλέον, θεωρούμε την εξής σύμβαση: δεν σημειώνουμε τις παρενθέσεις που περικλείουν κάθε μεμονωμένο γράμμα x ούτε τις παρενθέσεις που περικλείουν ολόκληρο τον εγκιβωτισμό B.

Προφανώς, κάθε υπο-εγκιβωτισμός που περιέχεται σε έναν εγκιβωτισμό B είναι με τη σειρά του ένας εγκιβωτισμός ο οποίος περιέχει άλλους εγκιβωτισμούς. Οι υπο-εγκιβωτισμοί που απαρτίζουν τον αρχικό εγκιβωτισμό B των n γραμμάτων, θα ονομάζονται εγκιβωτισμοί πρώτου επιπέδου. Οι εγκιβωτισμοί που απαρτίζουν έναν εγκιβωτισμό πρώτου επιπέδου θα ονομάζονται εγκιβωτισμοί δεύτερου επιπέδου κ.ο.κ.

3.5. Αναπαραστάσεις των εγκιβωτισμών [επίπεδα δέντρα–πολυγωνικές υποδιαιρέσεις].

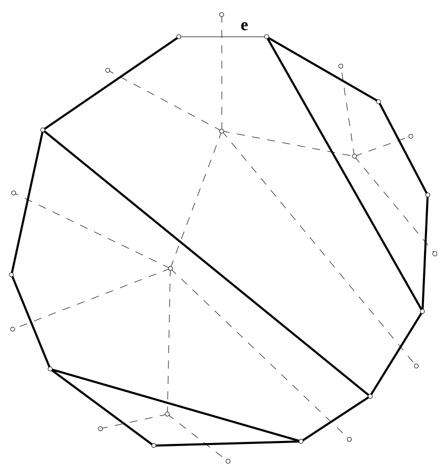
Ο Stanley (1997) παρουσιάζει τρεις θεμελιώδεις και ισοδύναμους μεταξύ τους τρόπους αναπαράστασης των εγκιβωτισμών: ως επίπεδα δέντρα (plane trees), πολυγωνικές υποδιαιρέσεις (polygon dissections) και λέξεις Lukasiewicz (Lukasiewicz words). Θα αναπαράγουμε εδώ σύντομα την αναπαράσταση ενός εγκιβωτισμού ως επίπεδο δέντρο και ως πολυγωνική υποδιαίρεση.

Αν B είναι ένας εγκιβωτισμός, τότε ορίζουμε το επίπεδο δέντρο $\tau(B)$ που αντιστοιχεί στον B ως εξής: αν ο B αποτελείτε από μόνο ένα γράμμα (B=x) τότε το δέντρο $\tau(B)$ έχει μια μόνο κορυφή που είναι και η ρίζα του(single root vertex). Αν ο εγκιβωτισμός B είναι της μορφής B=($B_1, B_2, \ldots, B_k$) όπου B_i εγκιβωτισμοί, τότε το δέντρο $\tau(B)$ έχει μια κορυφή ρίζα σχεδιασμένη στην κορυφή και από αυτή ξεκινάνε τα υπο-δέντρα $\tau(B_1), \tau(B_2)$, …, $\tau(B_k)$ σχεδιασμένα με αυτή τη διάταξη από αριστερά προς τα δεξιά. Η χαρακτηριστική ιδιότητα που καθορίζει ένα τέτοιο επίπεδο δέντρο είναι ότι τα υπο-δέντρα κάθε κορυφής είναι γραμμικά διατεταγμένα. Για παράδειγμα, το δέντρο που αντιστοιχεί στον εγκιβωτισμό $B = x(xx((xx)x))x(xxx)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



ΣΧΗΜΑ 3.2

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την ισοδύναμη αναπαράσταση ενός δέντρου ως πολυγωνική υποδιαίρεση. Έστω P ένα κυρτό πολύγωνο. Μια υποδιαίρεση του P επιτυγχάνεται με τη σχεδίαση κάποιων διαγωνίων του οι οποίες δεν τέμνονται σε εσωτερικά τους σημεία. Έτσι το πολύγωνο P διαιρείται σε περιοχές οι οποίες είναι και οι ίδιες κυρτά πολύγωνα. Μια ειδική περίπτωση είναι όταν το πολύγωνο P έχει n πλευρές και σχεδιάσουμε $n-3$ μη τεμνόμενες διαγωνίους (το μέγιστο δυνατό πλήθος διαγωνίων) οπότε θα έχουμε δημιουργήσει μια υποδιαίρεση στην οποία κάθε περιοχή είναι ένα τρίγωνο. Τέτοιες υποδιαιρέσεις λέγονται τριγωνοποιήσεις. Αν λοιπόν D είναι μια υποδιαίρεση ενός πολυγώνου P, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε αυτήν ένα επίπεδο δέντρο $\tau(D)$ ως εξής: στο εκφυλισμένο πολύγωνο το οποίο έχει μόνο δυο κορυφές (ευθύγραμμο τμήμα) αντιστοιχούμε ένα δέντρο με μια κορυφή-ρίζα. Για κάποιο άλλο πολύγωνο P ορίζουμε εξ αρχής μια ακμή του e (**ΣΧΗΜΑ 3.3**) την οποία καλούμε ακμή-ρίζα (root edge) και αντιστοιχεί στη ρίζα του δέντρου. Σε κάποια δεδομένη υποδιαίρεση D του P, η ακμή e θα περιέχεται σε μια μόνο πολυγωνική περιοχή Q η οποία είναι περιοχή της D. Έστω ότι αυτή η περιοχή (η Q) έχει $k+1$ ακμές μια από τις οποίες θα είναι η e. Νοητά μπορούμε να μετακινούμαστε πάνω στην περίμετρο του Q, ξεκινώντας από την e και κινούμενοι δεξιόστροφα. Σε κάθε μια από τις υπόλοιπες k ακμές του Q (εκτός της e) θα αντιστοιχεί μια υποδιαίρεση μιας περιοχής του αρχικού πολυγώνου P που θα έχει ως ακμή-ρίζα την αντίστοιχη ακμή. Για αυτές τις υποδιαιρέσεις $D_1, D_2, \ldots, D_k$, κάποιες από τις οποίες θα αντιστοιχούν σε ευθύγραμμα τμήματα, θα ισχύει ότι οι D_i, D_{i+1} θα έχουν μόνο ένα κοινό σημείο για $1 \le i \le k-1$. Ορίζουμε λοιπόν αναδρομικά το δέντρο $\tau(D)$ ως το επίπεδο δέντρο του οποίου τα υπο-δέντρα είναι αντίστοιχα τα $\tau(D_1), \ldots, \tau(D_k)$ με αυτή τη διάταξη. Να παρατηρήσουμε ότι αν το πολύγωνο P έχει $n+1$ κορυφές τότε το δέντρο $\tau(D)$ έχει n άκρα (end points) για οποιαδήποτε υποδιαίρεση D του P. Για παράδειγμα, το δέντρο του προηγούμενου σχήματος αντιστοιχεί στην υποδιαίρεση του 11-γώνου που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



ΣΧΗΜΑ 3.3

3.6. Οι αριθμοί Schröder.

Ο Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder (1841-1902) ήταν γερμανός μαθηματικός που η κύρια δουλειά του ήταν στην περιοχή της άλγεβρας, της θεωρίας συνόλων και της λογικής (O'Connor, Robertson, 2009). Ο Schröder έγραψε το 1870 ένα άρθρο[1] που συζητούσε τέσσερα προβλήματα εγκιβωτισμών (bracketing problems). Τα πρώτα δύο αφορούσαν τους δυνατούς τρόπους εγκιβωτισμού μιας αλυσίδας n ταυτόσημων γραμμάτων, ενώ τα δυο επόμενα ήταν αντίστοιχα με τα πρώτα μόνο που η αλυσίδα των γραμμάτων αντικαθιστούνταν από ένα σύνολο στοιχείων (Stanley, 1997). Το δεύτερο από τα προβλήματα με τα οποία ασχολούνταν ο Schröder ήταν το εξής: δεδομένης μιας αλυσίδας n γραμμάτων να βρεθούν όλοι οι δυνατοί τρόποι $s(n)$ εγκιβωτισμού τους. Ο Schröder κατέληξε στην γεννήτρια συνάρτηση

$$\sum_{n=1}^{\infty} s(n)x^n = \frac{1}{4}\left(1 + x - \sqrt{1 - 6x + x^2}\right)$$

και έδωσε και τις τιμές (αυτών που τώρα ονομάζονται αριθμοί Schröder)

$s(1)=1$, $s(2)=1$, $s(3)=3$, $s(4)=11$, $s(5)=45$, $s(6)=197$, $s(7)=903$, $s(8)=4279$, $s(9)=20793$, $s(10)=103049$ (Stanley, 1997).

Οι αριθμοί Schröder είναι κοινή λύση και για άλλα προβλήματα της συνδυαστικής. Για παράδειγμα, $s(n)$ είναι το πλήθος των επίπεδων δέντρων (plane trees) χωρίς κορυφές βαθμού 1 και με n φύλλα (end points) ή το πλήθος των υποδιαιρέσεων (dissections) από μη τεμνόμενες διαγωνίους ενός κυρτού πολυγώνου με $n+1$ κορυφές.

---

[1] E.Schröder, Vier combinatorische Probleme, Z. für Math. Physik **15** (1870), 361-376.

Η παρατήρηση του Hough ότι ο πρώτος αριθμός του Ίππαρχου συμπίπτει με τον δέκατο αριθμό του Schröder $s(10)=103049$, δημοσιεύθηκε από τον Stanley το 1997 σε ένα άρθρο στο American mathematical monthly. Ένα χρόνο μετά οι Habsieger, Kazarian και Lando (1998) με ένα άρθρο τους στο ίδιο περιοδικό επεσήμαναν ότι $\frac{s(10)+s(11)}{2}=310954$ και πρότειναν μια εξήγηση για τον δεύτερο αριθμό του Ιππάρχου (310952). Σχολιάζοντας σύντομα την ασυμφωνία μεταξύ των δυο αριθμών πρότειναν ένα ¨τυπογραφικό λάθος¨ ή κάποιον λόγο σχετιζόμενο με την Στωική λογική. Ο Reviel Netz πρότεινε ως πιθανό λόγο για αυτή την ασυμφωνία το λάθος κάποιου αντιγραφέα ο οποίος διάβασε τον ελληνικό αριθμό Δ (το οποίο είναι το τελευταίο ψηφίο 4 στον αριθμό που αναφέρει ο Πλούταρχος) ως συντόμευση του Δύο (Acerbi, 2003). Ακόμα και με αυτή την ασυμφωνία όμως [31095**2** vs 31095**4**] πρέπει να επισημάνουμε ότι η παρατήρηση είναι εντυπωσιακή. Όπως το θέτουν οι Netz, Noel (2007), σελ.283: «Ας το τονίσουμε: οι αριθμοί δεν μπορεί να αποτελούν σύμπτωση. Δεν πέφτει κανείς τυχαία πάνω στον δέκατο αριθμό Schröder. Ο μόνος τρόπος να έφτασε ο Ίππαρχος σε αυτό τον αριθμό είναι … μέσω μαθηματικών υπολογισμών». Σε αυτό συμφωνεί και ο Stanley (1997) λέγοντας ότι ο αριθμός 103049 είναι πολύ μεγάλος για να έχει υπολογιστεί με απευθείας καταμέτρηση όλων των δυνατών περιπτώσεων. Το ερώτημα που τίθεται λοιπόν είναι τι είδους μαθηματικούς συλλογισμούς-υπολογισμούς εκτέλεσε ο Ίππαρχος και έμμεσα αυτή η απάντηση θα απαντήσει και στο ερώτημα κατά πόσο οι αρχαίοι διέθεταν κάποιες μη τετριμμένες γνώσεις συνδυαστικής.

3.7. Εικασία του Stanley για τον υπολογισμό του Ίππαρχου.

Ο Stanley (1997) θεωρεί πιθανό ο Ίππαρχος να χρησιμοποίησε τον ¨προφανή¨ τύπο:

$$s(n) = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_k=n} s(i_1)\cdot s(i_2)\cdot\ldots\cdot s(i_k) \text{ για } n \geq 2, \qquad \textbf{(1)}$$

όπου το άθροισμα είναι επί όλων των διατεταγμένων διαμερίσεων του n σε $k \geq 2$ θετικούς ακέραιους προσθετέους. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος είναι ικανοποιητικά αποτελεσματικός και λαμβάνει υπόψη του τον επαναληπτικό (αναδρομικό) χαρακτήρα της διαδικασίας. Θα αναλύσουμε λίγο περισσότερο τον αλγόριθμο που προτείνει ο Stanley.

Με $s(n)$ συμβολίζουμε το πλήθος όλων των δυνατών τρόπων εγκιβωτισμού (το πλήθος όλων των δυνατών τρόπων να τοποθετησουμε σε παρενθέσεις) μιας αλυσίδας n γραμμάτων, όπου n θετικός ακέραιος. Θεωρούμε προφανές ότι $s(1)=1$ και τετριμμένο τον υπολογισμό του $s(2)=1$. Για κάποιο n>2, για να προσδιορίσουμε το $s(n)$, ξεκινάμε προσδιορίζοντας τους υπο-εγκιβωτισμούς πρώτου επιπέδου, δηλαδή τις εξωτερικές παρενθέσεις. Αυτοί θα είναι εγκιβωτισμοί με λιγότερα γράμματα από n. Όμως το άθροισμα των επί μέρους αριθμών γραμμάτων θα είναι n.

Για παράδειγμα, στον εγκιβωτισμό

$$((xxx)x(xx))(xx(xx))$$

10 γραμμάτων, οι εγκιβωτισμοί πρώτου επιπέδου είναι οι $B_1 = ((xxx)x(xx))$ και $B_2 = (xx(xx))$, οι οποίοι είναι εγκιβωτισμοί 6 και 4 γραμμάτων αντίστοιχα.

Στη γενική περίπτωση θα υπάρχουν $1 < k \leq n$ εγκιβωτισμοί, με $i_1,\ldots,i_k$ πλήθη γραμμάτων ο καθένας και θα ισχύει $i_1 + \ldots + i_k = n$.

Οπότε, δεδομένης μιας συγκεκριμένης διάταξης εγκιβωτισμών πρώτου επιπέδου, για να υπολογίσουμε όλους τους δυνατούς εγκιβωτισμούς που αντιστοιχούν σε αυτή τη διάταξη πρέπει να υπολογίσουμε τα $s(i_1),...,s(i_k)$ και να πάρουμε το γινόμενο τους (πολλαπλασιαστική αρχή). Όμως το να προσδιορίσουμε ένα πρώτο επίπεδο παρενθέσεων αντιστοιχεί με το να προσδιορίσουμε μια συγκεκριμένη <u>διατεταγμένη διαμέριση</u> του n με $k \geq 2$ μέρη. Στη συνέχεια αθροίζοντας πάνω σε όλες τις δυνατές διατεταγμένες διαμερίσεις του n έχουμε τον τύπο **(1)**. Προφανώς για να υπολογίσουμε το $s(n)$, θα πρέπει να έχουμε υπολογίσει τα $s(i),\ i < n$.

Για παράδειγμα, επειδή οι διατεταγμένες διαμερίσεις του 4 με $k \geq 2$ μέρη, είναι οι 3+1 = 1+3 = 2+2 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1, και $s(1)=1$, $s(2)=1$, $s(3)=3$, έχουμε

$$s(4)=\sum_{i_1+i_2+...+i_k=4} s(i_1)\cdot s(i_2)\cdot ...\cdot s(i_k)$$

$$s(4)=2\cdot s(3)s(1)+s(2)s(2)+3\cdot s(2)s(1)s(1)+s(1)s(1)s(1)s(1)$$

$$s(4)=11.$$

Επίσης, στον προηγούμενο παράδειγμα στον εγκιβωτισμό 10 γραμμάτων: $((xxx)x(xx))(xx(xx))$ όπου οι εγκιβωτισμοί πρώτου επιπέδου $B_1=((xxx)x(xx))$ και $B_2=(xx(xx))$ αντιστοιχούν στη διατεταγμένη διαμέριση του 10=6+4, θα έχουμε από τη συγκεκριμένη διατεταγμένη διαμέριση μια συνεισφορά $s(6)\cdot s(4)=197\cdot 11=2167$ στο άθροισμα **(1)**.

Όπως αναφέραμε και πριν το πλήθος των διατεταγμένων διαμερίσεων ενός θετικού ακεραίου n είναι 2^{n-1}. Όμως μια από τις διατεταγμένες διαμερίσεις είναι αυτή που ο αριθμός n γράφεται ως n (άθροισμα με έναν όρο) και θα αντιστοιχούσε στον εγκιβωτισμό $(xx...x)$ αντίθετα με τις συμβάσεις που έχουμε κάνει για τους εγκιβωτισμούς. Συνεπώς, το πλήθος των διατεταγμένων διαμερίσεων ενός θετικού ακεραίου n με k μέρη, $k \geq 2$, είναι $2^{n-1}-1$. Για n=10 λοιπόν το άθροισμα

$$s(10)=\sum_{i_1+i_2+...+i_k=10} s(i_1)\cdot s(i_2)\cdot ...\cdot s(i_k) \qquad \textbf{(2)}$$

έχει $511\,(=2^9-1)$ όρους οι οποίοι αντιστοιχούν στις διατεταγμένες διαμερίσεις του 10. Οι 511 όροι του πιο πάνω αθροίσματος δεν είναι όλοι διαφορετικοί αφού σε κάθε διαμέριση (partition) (μη διατεταγμένη) του n, αντιστοιχούν περισσότερες διατεταγμένες διαμερίσεις του n, οι οποίες συνεισφέρουν το ίδιο στο άθροισμα **(2)**. Οι ουσιαστικά διαφορετικοί όροι είναι 41, οι οποίοι αντιστοιχούν στις $p(10)-1=41$ διαμερίσεις του 10 με περισσότερα του ενός μέρη (βλέπε: 3.2. Διαμερίσεις ακεραίων). Βέβαια δεν αρκεί μόνο ο υπολογισμών των 41 αυτών γινομένων, αλλά πρέπει να βρούμε και πόσες φορές συμμετέχει κάθε ένα από αυτά τα γινόμενα στο τελικό άθροισμα **(2)**. Για παράδειγμα, η διαμέριση του 10 ως 6+4 αντιστοιχεί σε 2 διατεταγμένες διαμερίσεις και θα συνεισφέρει στο άθροισμα (**2**) κατά $2s(6)s(4)=2\cdot 197\cdot 11=4334$, ενώ η διαμέριση 3+2+2+1+1+1 αντιστοιχεί σε 60 διατεταγμένες διαμερίσεις και θα συνεισφέρει στο άθροισμα (2) κατά $60s(3)s(2)^2 s(1)^3=60\cdot 3\cdot 1\cdot 1=180$. Στη γενική περίπτωση: έστω $a_1+a_2+\ldots+a_k=n$ είναι μια (μη διατεταγμένη) διαμέριση του n με k μέρη, η οποία περιέχει $m\leq k$ διαφορετικούς προσθετέους. Τότε το πλήθος των διατεταγμένων διαμερίσεων που αντιστοιχούν σε αυτή είναι $\frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$, όπου $k_1,k_2,\ldots,k_m$ είναι το πόσες φορές εμφανίζεται κάθε ένας από τους m διαφορετικούς προσθετέους στη διαμέριση $a_1+a_2+\ldots+a_k=n$. Προφανώς ισχύει $k_1+k_2+\ldots+k_m=k$ και το πρόβλημα είναι αντίστοιχο με το να υπολογίσουμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διευθετήσουμε k_1 μπάλες χρώματος 1, k_2 μπάλες χρώματος 2, …, k_m μπάλες χρώματος m, σε μια σειρά μήκους $k=k_1+k_2+\ldots+k_m$. Όποτε η απάντηση είναι $\binom{k}{k_1,k_2,\ldots,k_m}=\frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$

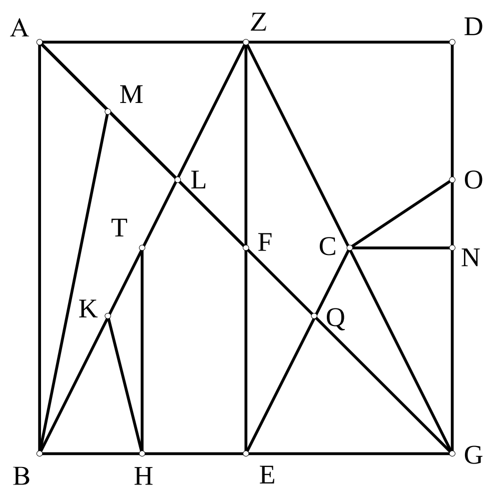
(βλέπε: van Lint, Wilson, 1992, p.101, example 13.2, ή για αντίστοιχο πρόβλημα Αθανασιάδης, 2009, σελ.21, πρόταση 1.2.2.).

Από όλη την προηγούμενη ανάλυση για τον υπολογισμό του δέκατου αριθμού Schröder μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο Ίππαρχος κατείχε τουλάχιστον εννοιολογικά την όλη διαδικασία απαρίθμησης των διάφορων διαμερίσεων ενός ακεραίου n. Ο Heath (2001, σελ.307) αναφέρει ότι «Το Fihrist[1] αποδίδει σε αυτόν (τον Ίππαρχο) έργα όπως το ¨Περί της τέχνης της άλγεβρας¨, … και το ¨Περί διαίρεσης των αριθμών¨, το οποίο όμως δεν μπορούμε να επιβεβαιώσουμε». Ίσως πρέπει να επανεξετάσουμε την άποψη μας για το κατά πόσο οι αρχαίοι έλληνες ενδιαφέρονταν για προβλήματα συνδυαστικής και την ύπαρξη μη τετριμμένων γνώσεων συνδυαστικής στην αρχαιότητα. Προφανώς οι τεχνικές γνώσεις που πιθανά είχαν και εφάρμοζαν για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων δεν ήταν μαθηματικοί τύποι της μορφής που αναφέρθηκαν προηγούμενα, αλλά μια ξεκάθαρη κατανόηση της όλης δομής ενός σύνθετου προβλήματος απαρίθμησης και η επιτυχής αντιμετώπιση του. Το γεγονός είναι ότι η χρήση του σύγχρονου συμβολισμού τείνει να συσκοτίσει την εννοιολογική κατανόηση των λειτουργιών που λαμβάνουν χώρα κατά τη διάρκεια κάποιων (πιθανά σύνθετων) υπολογισμών. Το νόημα μεταφέρεται στη συμβολική αναπαράσταση, με συνέπεια να δημιουργείται η άποψη ότι όποιος δεν διαθέτει τον κατάλληλο συμβολισμό δεν μπορεί να φέρει εις πέρας τους αντίστοιχους υπολογισμούς (Acerbi, 2003).

[1] Το κύριο σύγγραμμα του Πέρση Ibn al-Nadim το οποίο μας δίνει πολλές πληροφορίες για βιβλία που έχουν γραφεί ή έχουν μεταφραστεί στην αραβική γλώσσα (εκδόθηκε το 938 μ.Χ.).

4. Το Στομάχιον σαν πραγματεία συνδυαστικής ανάλυσης (Εικασία των Netz, Acerbi, Wilson)

Επανερχόμαστε στο Στομάχιον για να εξετάσουμε την άποψη των Netz, Acerbi, Wilson (2004), ότι αυτή η πραγματεία του Αρχιμήδη είναι ένα πρόβλημα γεωμετρικής συνδυαστικής και αναζητά το πλήθος των δυνατών συνδυασμών 14 δεδομένων πολυγώνων, για τον σχηματισμό ενός τετραγώνου όπως στο παρακάτω σχήμα.



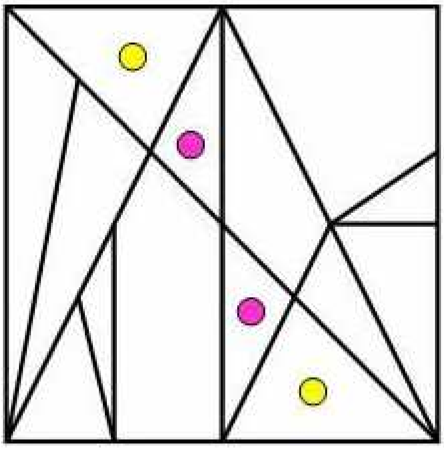
ΣΧΗΜΑ 4.1

Ο Netz για να ισχυροποιήσει την πιο πάνω εικασία αναζήτησε καταρχάς μια απάντηση στο ερώτημα: πόσες λύσεις έχει το Στομάχιον; Δηλαδή, πόσες διαφορετικές διευθετήσεις των 14 πολυγώνων υπάρχουν που να σχηματίζουν το αρχικό τετράγωνο; Σε ένα δεύτερο επίπεδο, ο Netz θα επιθυμούσε μια μαθηματική λύση του πιο πάνω ερωτήματος, τέτοια ώστε να είναι δυνατή η επίτευξή της από τον Αρχιμήδη. Αποτάθηκε λοιπόν στον Persi Diaconis και ταυτόχρονα διέδωσε το πρόβλημα στους επιστήμονες της πληροφορικής (Netz, Noel, 2007).

4.1. Υπολογισμός των δυνατών διευθετήσεων με τη βοήθεια υπολογιστή.

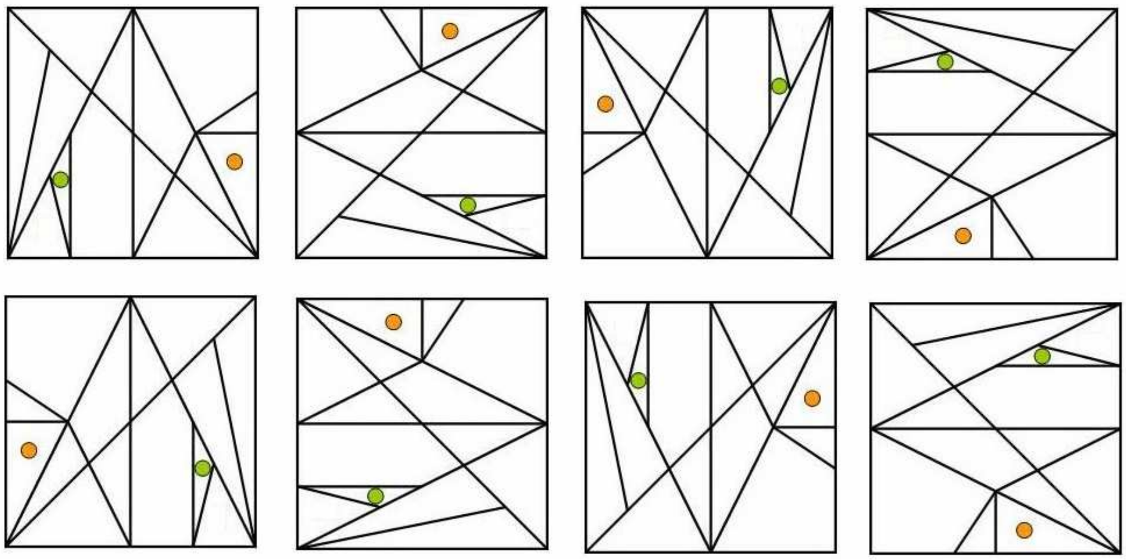
Ο Bill Cutler ένας προγραμματιστής από το Illinois, ήταν ο πρώτος που κατάφερε να μετρήσει το πλήθος των διαφορετικών ¨λύσεων¨ του Στομαχίου, πετυχαίνοντας να ορίσει αλγοριθμικά το πρόβλημα και φτιάχνοντας ένα λογισμικό που έλεγχε μια-μια όλες τις δυνατές διευθετήσεις των 14 κομματιών για το σχηματισμό του τετραγώνου. Η απάντησή του ήταν ότι υπάρχουν **536** διαφορετικοί τρόποι σχηματισμού του αρχικού τετραγώνου χωρίς να υπολογίζουμε τις συμμετρίες του τετραγώνου και τις αντικαταστάσεις ίσων σχημάτων. Εννοώντας ότι σε αυτές τις 536 ¨λύσεις¨ του Στομαχίου, δεν θεωρούμε διαφορετικές δυο διατάξεις οι οποίες διαφέρουν κατά μια αντικατάσταση δυο ίσων πολυγώνων (όπως τα τρίγωνα AZL και EGQ στο **ΣΧΗΜΑ 4.1**) και επιπλέον δεν θεωρούμε διαφορετικές δυο διατάξεις των πολυγώνων (tiling) οι οποίες προκύπτουν η μια από την άλλη με στροφή ή ανάκλαση όλου του τετραγώνου.

Αν όμως θεωρήσουμε διαφορετικές τις διευθετήσεις οι οποίες προκύπτουν η μία από την άλλη είτε με αντικατάσταση δυο ίσων τριγώνων είτε με συμμετρικές ¨κινήσεις¨ του τετραγώνου τότε το σύνολο των δυνατών διευθετήσεων είναι **17152**. Αυτό προκύπτει ως εξής: καταρχάς πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το 536 με το 4 για να υπολογίσουμε και τις διευθετήσεις που προκύπτουν η μία από την άλλη με αντικατάσταση των ίσων τριγώνων που σημειώνονται στο παρακάτω **ΣΧΗΜΑ 4.2.** μεταξύ τους.



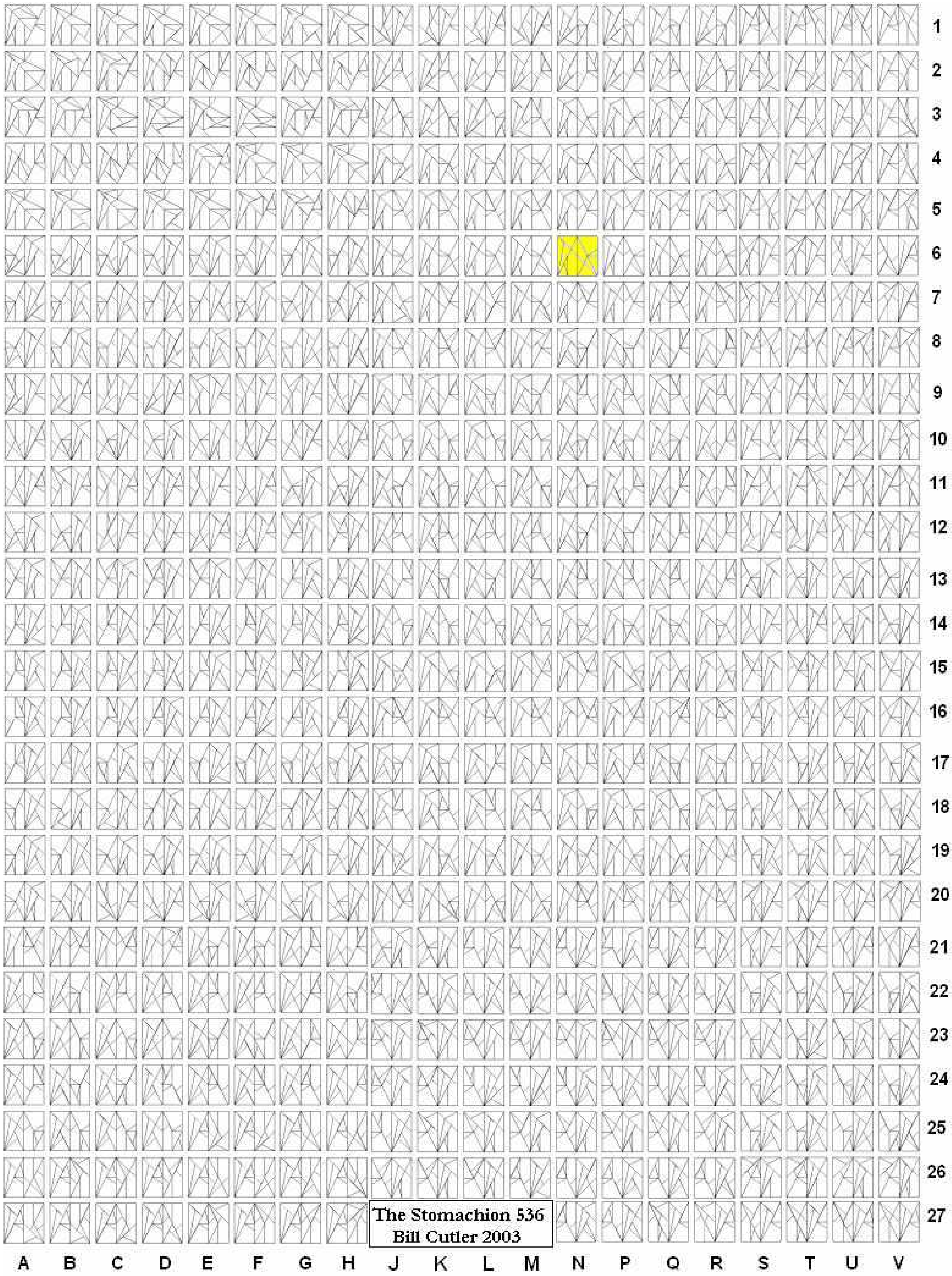
ΣΧΗΜΑ 4.2

Στη συνέχεια θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το 2144 (=536 · 4) με το 8, που είναι η τάξη της διεδρικής ομάδας D_4 του τετραγώνου (**ΣΧΗΜΑ 4.3**), οπότε οι δυνατές λύσεις του προβλήματος είναι 17152.



ΣΧΗΜΑ 4.3

Μια εκτύπωση των λύσεων του Bill Cutler υπάρχει στην επόμενη σελίδα, όπου στην έκτη γραμμή χρωματισμένη με κίτρινο φαίνεται η διευθέτηση των κομματιών όπως προκύπτει από το αραβικό χειρόγραφο.

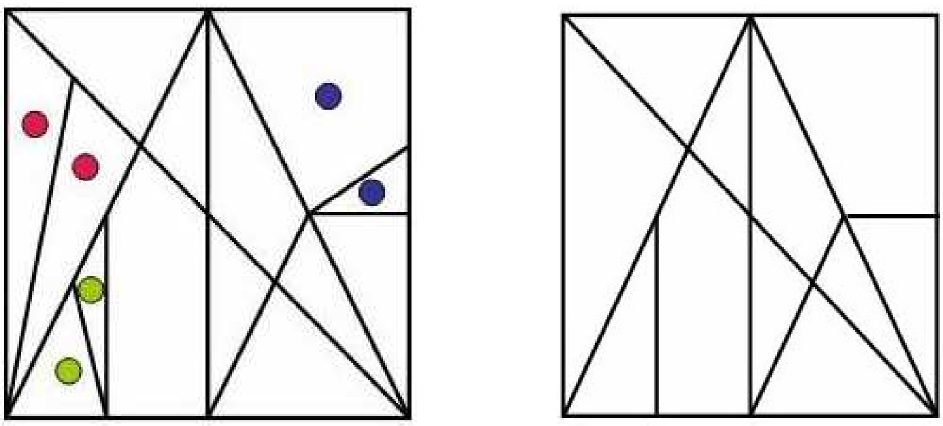

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
The Stomachion 536
Bill Cutler 2003
A B C D E F G H J K L M N P Q R S T U V

ΣΧΗΜΑ 4.4

4.2. Υπολογισμός των δυνατών διευθετήσεων από τους Persi Diaconis, Susan Holmes, Ron Graham και Fan Chung.

Η λύση που έδωσε ο Bill Cutler απαντούσε στο μαθηματικό ερώτημα πόσες λύσεις έχει το Στομάχιον, αλλά προφανώς δεν μπορούσε να χρησιμεύσει ως εικασία για τον τρόπο με τον όποίο δούλεψε ο Αρχιμήδης. Ταυτόχρονα όμως με τους επιστήμονες των υπολογιστών μια ομάδα μαθηματικών δούλευε με ¨χαρτί και μολύβι¨ για την επίλυση του Στομαχίου. Οι μαθηματικοί αυτοί ήταν ο Persi Diaconis, η Susan Holmes,ο Ron Graham και η Fan Chung.

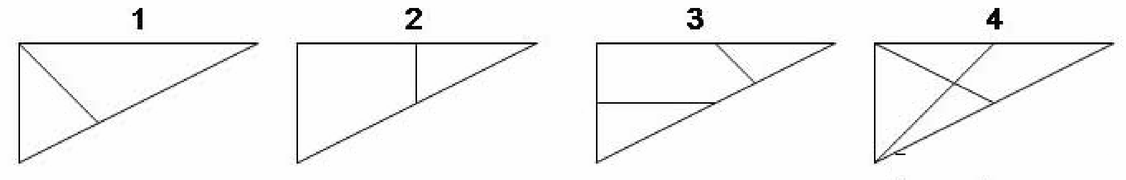
Αρχικά οι μαθηματικοί πέτυχαν μια σημαντική απλοποίηση του προβλήματος. Απέδειξαν γεωμετρικά ότι κάποια κομμάτια του Στομαχίου είναι κατά κάποιο τρόπο ¨κολλημένα¨ μαζί, δηλαδή βρίσκονται μαζί σε οποιαδήποτε διευθέτηση των κομματιών εντός του τετραγώνου. Αυτά τα κομμάτια λοιπόν θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν σαν ένα κομμάτι. Υπάρχουν τρία ζεύγη τέτοιων κομματιών τα οποία φαίνονται στο επόμενο σχήμα σημειωμένα με το ίδιο χρώμα. Αντικαθιστώντας κάθε ένα από αυτά τα ζεύγη κομματιών με ένα κομμάτι, προκύπτει ένα νέο puzzle το οποίο το ονόμασαν STOMACH και περιέχει 11 πολύγωνα (τρία λιγότερα από το Στομάχιον)(Chung, Graham, 2003).



ΣΤΟΜΑΧΙΟΝ **STOMACH**

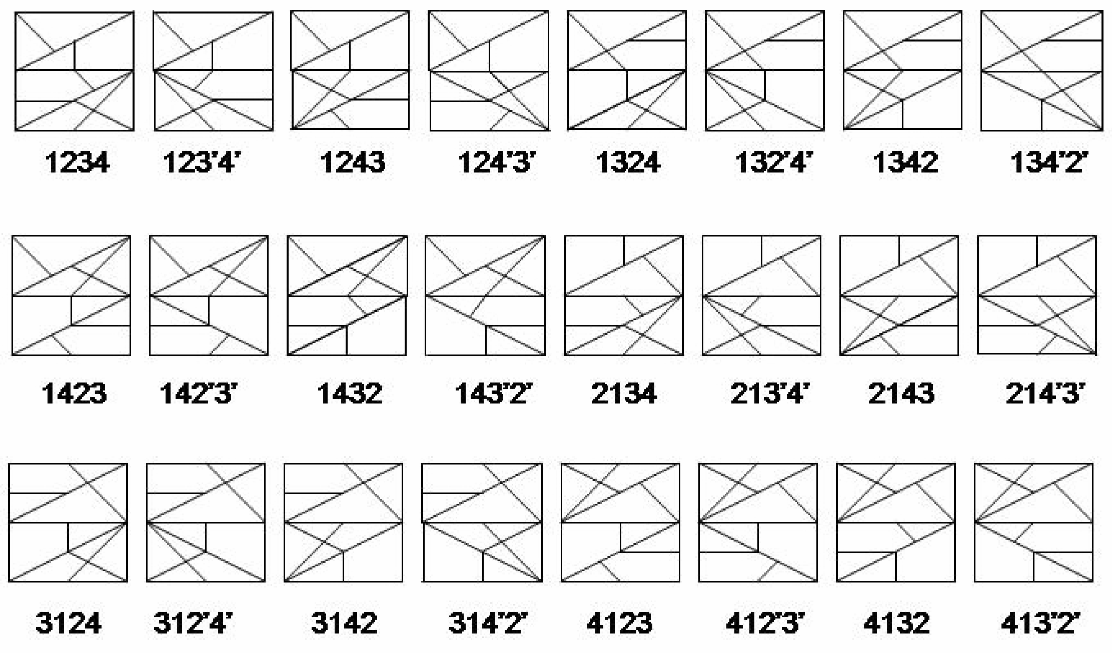
ΣΧΗΜΑ 4.5

Έχοντας απλοποιήσει το αρχικό πρόβλημα και δουλεύοντας πλέον με το STOMACH, θεώρησαν ότι η πλευρά του τετραγώνου έχει μήκος 12 και ονόμασαν **βασικό τρίγωνο** έναν σύνολο κομματιών που σχηματίζουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές μήκους 6 και 12 αντίστοιχα. Έδειξαν ότι υπάρχει μια διάταξη των κομματιών του STOMACH ώστε να σχηματίζουν τέσσερα βασικά τρίγωνα τα οποία ονόμασαν 1, 2, 3 και 4 και φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (Chung, Graham, 2003).



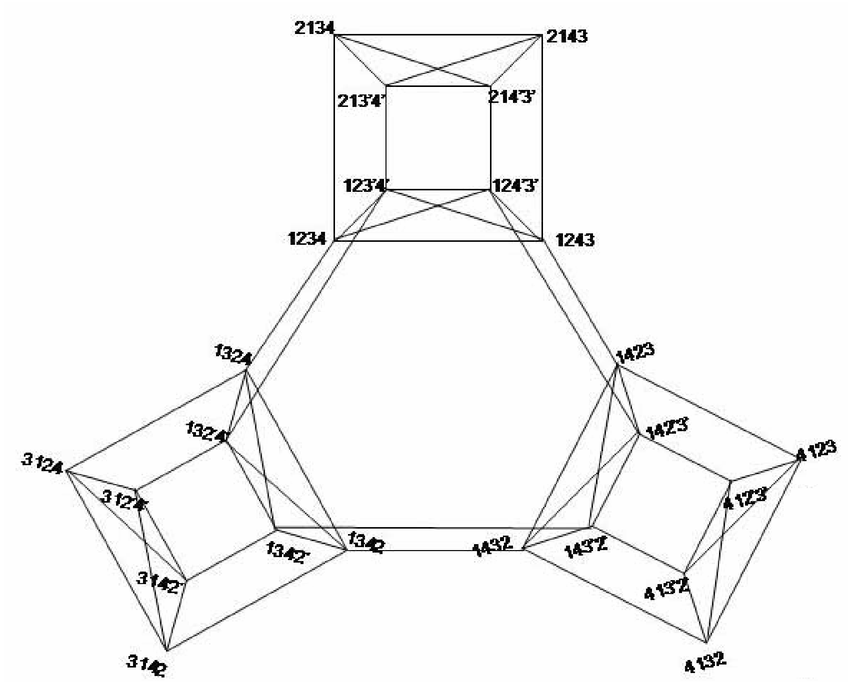
ΣΧΗΜΑ 4.6

Στη συνέχεια, δημιούργησαν έναν σύνολο από 24 σχηματισμούς αυτών των 4 βασικών τριγώνων που το ονόμασαν πυρήνα(core)(**ΣΧΗΜΑ 4.7**). Η ονομασία του κάθε σχηματισμού καθορίζετε από την σειρά με την οποία τοποθετούνται τα βασικά τρίγωνα (από πάνω προς τα κάτω), ενώ με τόνο συμβολίζουμε ένα τρίγωνο που έχει υποστεί ανάκλαση.



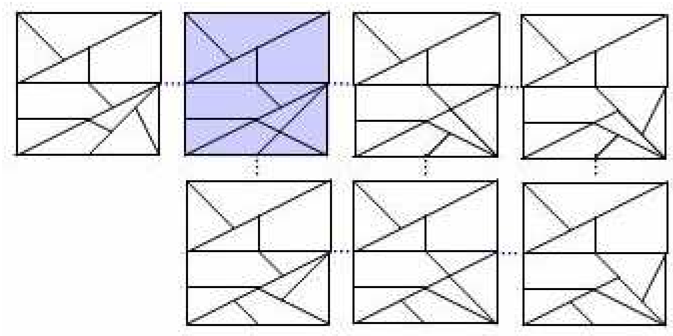
ΣΧΗΜΑ 4.7

Το βασικό τρίγωνο 1 ποτέ δεν το τοποθετούμε κάτω από τη μεσοκάθετο των δυο καθέτων πλευρών του τετραγώνου και επιπλέον ποτέ δεν το ανακλούμε. Αυτό μας εξασφαλίζει ότι οι διάφοροι σχηματισμοί των πολυγώνων που απαρτίζουν τον πυρήνα δεν μπορούν να προκύψουν η μία από την άλλη με στροφές και ανακλάσεις ολόκληρου του τετραγώνου, δηλαδή με ¨κινήσεις¨ που ανήκουν στη διεδρική ομάδα του τετραγώνου D_4. Οι 24 σχηματισμοί που αποτελούν τον πυρήνα συνδέονται μεταξύ τους με **ολικές κινήσεις**. Ολική κίνηση ονομάζουμε την αντικατάσταση μεταξύ δυο βασικών τριγώνων, τηρώντας βέβαια τους περιορισμούς που θέσαμε για το βασικό τρίγωνο 1. Μπορούμε λοιπόν να ¨πάμε¨ από τον ένα στον άλλο σχηματισμό του πυρήνα χρησιμοποιώντας ολικές κινήσεις. Η όλη διαδικασία μπορεί να παρασταθεί με ένα γράφημα (**ΣΧΗΜΑ 4.8.**) όπου οι κορυφές του γραφήματος είναι οι 24 σχηματισμοί του πυρήνα, ενώ οι ακμές του γραφήματος συμβολίζουν τις ολικές κινήσεις (Chung, Graham, 2003).



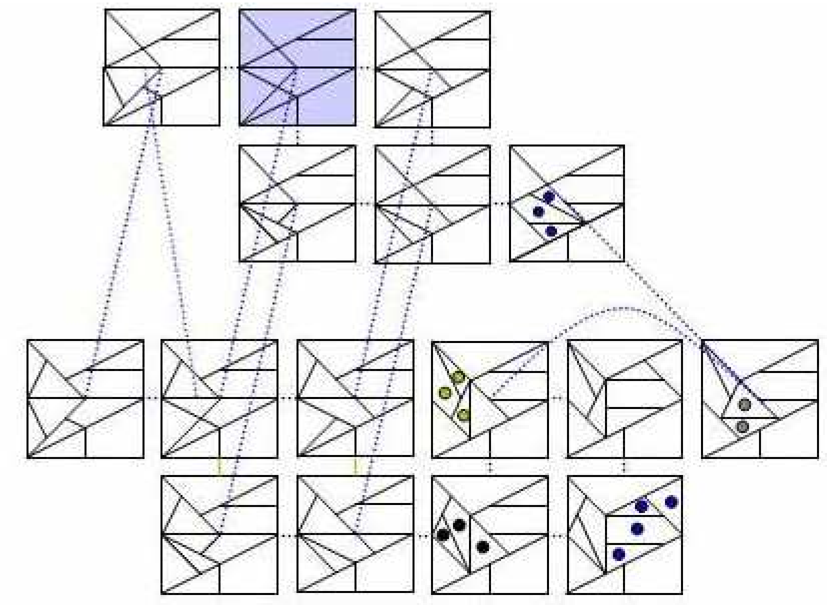
ΣΧΗΜΑ 4.8

Από κάθε έναν επιμέρους σχηματισμό του πυρήνα μπορούμε να πάρουμε άλλους σχηματισμούς (οι οποίοι δεν συμπεριλαμβάνονται στον πυρήνα) χρησιμοποιώντας **τοπικές κινήσεις**. Μια τοπική κίνηση εναλλάσσει κάποια μικρότερα κομμάτια ανακλώντας τα ή στρέφοντας τα. Αυτά τα κομμάτια είναι συνήθως ισοσκελή τρίγωνα, τετράγωνα, ορθογώνια ή τραπεζοειδή, που παρουσιάζουν από μόνα τους κάποια συμμετρία. Η ομάδα αυτών των σχηματισμών που προκύπτουν με τοπικές κινήσεις από έναν βασικό σχηματισμό T του πυρήνα, ονομάζεται συστάδα (cluster) που αντιστοιχεί στον T. Για παράδειγμα, η συστάδα που αντιστοιχεί στον σχηματισμό 1234 του πυρήνα, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπως επίσης και το υπο-γράφημα που συνδέει με τοπικές κινήσεις τους επιμέρους σχηματισμούς (ο σχηματισμός 1234 είναι ο χρωματισμένος).



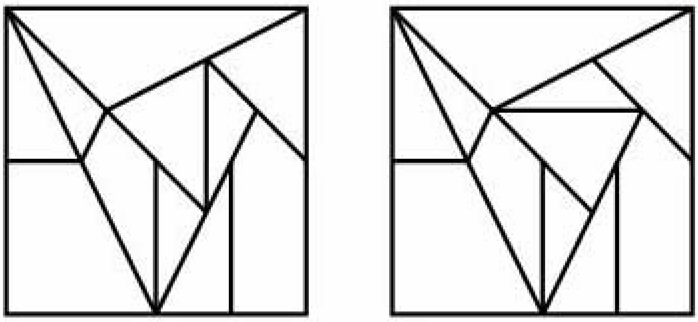
ΣΧΗΜΑ 4.9

Μια πιο σύνθετη συστάδα είναι αυτή που αντιστοιχεί στον βασικό σχηματισμό 1342 (**ΣΧΗΜΑ 4.10**).



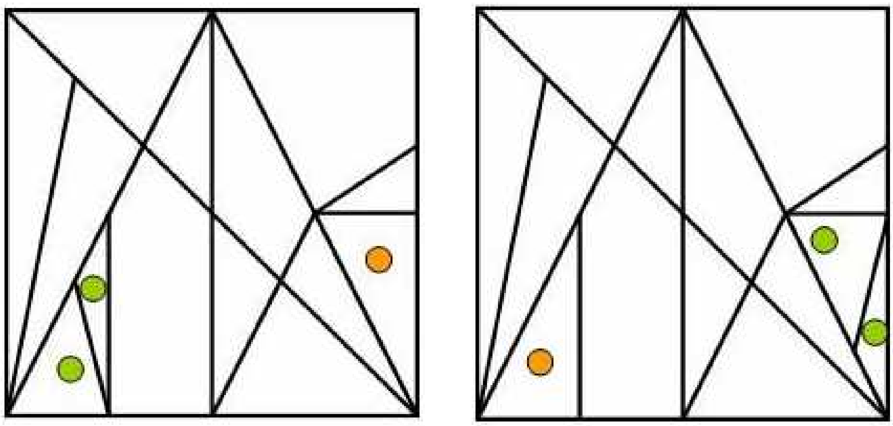
ΣΧΗΜΑ 4.10

Γενικά, για κάθε βασικό σχηματισμό T του πυρήνα υπάρχουν τουλάχιστον 6 και έως 17 επιμέρους σχηματισμοί που αποτελούν την αντίστοιχη συστάδα του T. Προσθέτοντας όλους αυτούς τους σχηματισμούς βρίσκουμε 242 διαφορετικούς σχηματισμούς οι οποίοι συνδέονται με τοπικές κινήσεις με τους 24 σχηματισμούς του πυρήνα και όλοι μαζί μπορούν να αναπαρασταθούν με ένα συνεκτικό γράφημα το οποίο έχει 266 κορυφές και 936 ακμές. Οι 266 κορυφές παριστάνουν τους διάφορους σχηματισμούς των κομματιών του STOMACH, ενώ οι 936 ακμές παριστάνουν όλες τις τοπικές ή ολικές κινήσεις που μας επιτρέπουν να περνάμε από τον ένα σχηματισμό στον άλλο. Υπάρχουν όμως και δυο σχηματισμοί του STOMACH που δεν μπορούν να συνδεθούν με τους υπόλοιπους 266 με κάποια απλή κίνηση (είτε ολική είτε τοπική). Αυτοί οι δυο σχηματισμοί φαίνονται στο παρακάτω **ΣΧΗΜΑ 4.11**.



ΣΧΗΜΑ 4.11

Συνεπώς, υπάρχουν 266+2=268 διαφορετικοί σχηματισμοί των κομματιών του STOMACH εντός του τετραγώνου, χωρίς να υπολογίζουμε και αυτούς που προκύπτουν από τις συμμετρίες ολόκληρου του τετραγώνου και περιγράφονται από τη διεδρική ομάδα D_4, ούτε και αυτούς που προκύπτουν με μεταξύ τους αντικατάσταση δυο ίσων κομματιών. Βέβαια για να περάσουμε από το STOMACH στο Στομάχιον θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με τον παράγοντα 2 γιατί ένα κομμάτι του STOMACH προκύπτει από δυο κομμάτια του Στομαχίου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΣΧΗΜΑ 4.12

Με αυτόν τον πολλαπλασιασμό έχουμε το αποτέλεσμα 536 που έδινε και η λύση του Bill Cutler με τη βοήθεια του υπολογιστή.

5. Όψεις του θεωρήματος Pick

Ο Georg Alexander Pick γεννήθηκε το 1859 στην Αυστρία και πέθανε σε στρατόπεδο συγκέντρωσης στη Βοημία το 1942. Η συνεισφορά του στην ανάλυση και στη διαφορική γεωμετρία ήταν σημαντική. Το θεώρημα Pick με το οποίο θα ασχοληθούμε σε αυτό το κεφάλαιο δημοσιεύτηκε πρώτη φορά το 1899[1]. Έγινε ευρύτερα γνωστό όταν το 1969 ο Steinhaus το συμπεριέλαβε στο βιβλίο του *Mathematical Snapshots* (Grünbaum, 1993). Θα επιχειρήσουμε διάφορες προσεγγίσεις του θεωρήματος Pick και θα δώσουμε τρεις διαφορετικές αποδείξεις του, οι οποίες κατά την γνώμη μας έχουν ενδιαφέρον για τις ποικίλες ιδέες που περιέχουν. Η πρώτη παράγραφος του κεφαλαίου είναι μια βιογραφία του Pick βασισμένη στην βιογραφία του που υπάρχει στην ιστοσελίδα MacTutor History of Mathematics. Στην τελευταία παράγραφο εφαρμόζουμε το θεώρημα Pick για να υπολογίσουμε τα εμβαδά των πολυγώνων που απαρτίζουν το Στομάχιον.

5.1. Georg Alexander Pick (1859-1942).

Ο Georg Alexander Pick γεννήθηκε στις 10 Αυγούστου του 1859 στη Βιέννη της Αυστρίας. Ήταν γόνος εβραϊκής οικογένειας και ο πατέρας του ο Adolf Josef Pick ήταν διευθυντής ενός ιδιωτικού εκπαιδευτικού ιδρύματος. Ο Georg μορφώθηκε στο σπίτι από τον πατέρα του και εισήχθη στην τέταρτη τάξη του Leopoldstaedter Communal Gymnasium στα έντεκά του. Το 1875, στην ηλικία των 16, συμμετείχε στις απολυτήριες εξετάσεις του σχολείου του και εισήχθη στο πανεπιστήμιο της Βιέννης.

[1] G.Pick, Geometrisches zur Zahlenlehre, *Sitzungber. Lotos* (Prague) 19 (1899), 311-319.

Στο πανεπιστήμιο σπούδασε μαθηματικά και φυσική και αποφοίτησε το 1879 με έναν τίτλο σπουδών που του επέτρεπε να διδάξει και τα δυο αυτά αντικείμενα. Με επιβλέποντα καθηγητή τον Leo Königsberger και δεύτερο εξεταστή τον Emil Weyr έλαβε το διδακτορικό του στις 16 Απριλίου του 1880 με τη διδακτορική του διατριβή: *Über eine Klasse abelscher Integrale.*

Μετά την απόκτηση του διδακτορικού του διορίστηκε ως βοηθός του Ernest Mach στο πανεπιστήμιο Karl-Ferdinand της Πράγας (Karl-Ferdinand University in Prague). Για να αποκτήσει το δικαίωμα να γίνει λέκτορας στη Πράγα έπρεπε να συγγράψει μια διατριβή (habilitation thesis) πράγμα που έκανε και πολύ σύντομα (το 1881) απόκτησε το δικαίωμα να είναι λέκτορας με την διατριβή του: *Über die Integration hyperelliptischer Differentiale durch Logarithmen.*

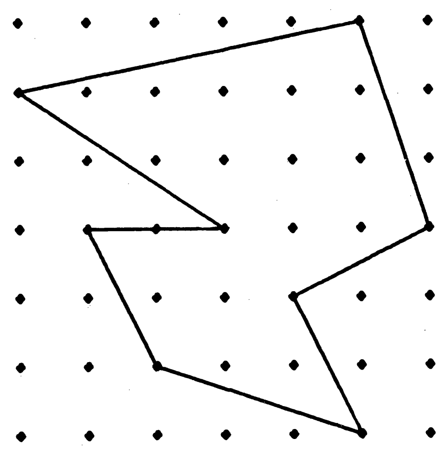
Εκτός από την ακαδημαϊκή χρονιά 1884-1885 κατά την οποία ο Pick σπούδασε υπό τον Klein στο πανεπιστήμιο της Λειψίας (University of Leipzig), το υπόλοιπο της καριέρας του ο Pick το πέρασε στην Πράγα. Προήχθη σε αναπληρωτή καθηγητή μαθηματικών το 1888 και διορίστηκε ως τακτικός καθηγητής το 1892 στο γερμανικό πανεπιστήμιο της Πράγας (German University of Prague). Η μαθηματική του δουλειά εκτεινόταν σε ένα ευρύ φάσμα αντικειμένων. Από τις 67 δημοσιεύσεις του (papers) περισσότερες από τις μισές αφορούσαν στις συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής, στις διαφορικές εξισώσεις και τη διαφορική γεωμετρία. Είναι περισσότερο γνωστός για το θεώρημα του Pick το οποίο εμφανίστηκε σε μια οκτασέλιδη δημοσίευση του το 1899 με τίτλο *Geometrisches zur Zahlenlehre*.

Στο γερμανικό πανεπιστήμιο της Πράγας (German University of Prague) ο Pick εξελέγη κοσμήτορας του τμήματος φιλοσοφίας (dean of the philosophy faculty) το 1900-1901, ενώ ήταν επιβλέποντας καθηγητής στις διδακτορικές διατριβές 20 περίπου φοιτητών. Μετά το 1927 που συνταξιοδοτήθηκε ανακηρύχθηκε ομότιμος (επίτιμος) καθηγητής και γύρισε στη γενέτειρα πόλη του τη Βιέννη.

Το 1938 με την είσοδο των γερμανικών στρατευμάτων στην Αυστρία, ο Pick επέστρεψε στην Πράγα. Ο στρατός του Hitler εισέβαλε στην Τσεχοσλοβακία το Μάρτη του 1939. Ο Pick είχε εκλεγεί μέλος της Τσέχικης ακαδημίας επιστημών και τεχνών (Czech Academy of Sciences and Arts), αλλά όταν οι Ναζί κατέλαβαν την Πράγα αποκλείστηκε (εξαιρέθηκε) από την ακαδημία. Οι Ναζί ίδρυσαν ένα στρατόπεδο συγκέντρωσης στο Theresienstadt στη βόρεια Βοημία για να κλείσουν τους ηλικιωμένους, τους προνομιούχους και τους φημισμένους εβραίους. Ο Pick στάλθηκε στο Theresienstadt στις 13 Ιουλίου του 1942 και πέθανε εκεί δυο εβδομάδες αργότερα στην ηλικία των 82 (O’Connor & Robertson, 2005).

5.2. Θεώρημα του Pick.

Το θεώρημα του Pick ανήκει στην περιοχή των μαθηματικών που ονομάζεται γεωμετρία πλέγματος (reticular geometry). Θεωρώντας ένα επίπεδο εφοδιασμένο με ένα σύστημα αξόνων xOy, ονομάζουμε **πλέγμα** το σύνολο Π των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x,y) ακέραιους αριθμούς. Ένα σημείο του επιπέδου που ανήκει στο πλέγμα Π θα το ονομάζουμε **σημείο πλέγματος** (lattice point) ενώ ένα πολύγωνο P του οποίου οι κορυφές είναι σημεία του πλέγματος ονομάζεται **πολύγωνο πλέγματος** (lattice polygon) (**ΣΧΗΜΑ 5.1**).



ΣΧΗΜΑ 5.1

Το **θεώρημα του Pick** αναφέρει ότι:

Το εμβαδό ενός απλού πολυγώνου P, του οποίου οι κορυφές είναι σημεία του πλέγματος, ισούται με $E(P) = i + \frac{b}{2} - 1$, όπου i είναι το πλήθος των εσωτερικών σημείων του πλέγματος (interior lattice points) του πολυγώνου P και b το πλήθος των σημείων του πλέγματος που βρίσκονται στο σύνορο του πολυγώνου P (boundary lattice points).

Για παράδειγμα, αναφερόμενοι στο **ΣΧΗΜΑ 5.1**, έχουμε i=15, b=9 και σύμφωνα με το θεώρημα Pick το εμβαδό του πολυγώνου του σχήματος 1 είναι $E(P) = i + \frac{b}{2} - 1 = 15 + \frac{9}{2} - 1 = 18.5$ τετραγωνικές μονάδες. Με μονάδα μέτρησης εμβαδού το τετράγωνο πλευράς 1.

Παρατηρήσεις

1. Στον ορισμό του πλέγματος χρησιμοποιήσαμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δηλαδή άρρητα την αντιστοιχία πραγματικών αριθμών με τα σημεία μιας ευθείας. Αυτό δεν είναι αναγκαίο. Το σύνολο των σημείων του πλέγματος μπορεί να οριστεί και σαν το

σύνολο των σημείων τομής δυο οικογενειών παραλλήλων ευθειών οι οποίες ισαπέχουν. Επίσης οι οικογένειες αυτές των ευθειών δεν χρειάζεται να είναι μεταξύ τους κάθετες.

2. Το σύνολο των σημείων του πλέγματος παραμένει αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς όπως η οριζόντια μετατόπιση κατά $x \in Z$ ή η κατακόρυφη μετατόπιση κατά $y \in Z$. Όπως επίσης και σε ανακλάσεις ως προς τους άξονες ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς τους άξονες η οποία διέρχεται από σημείο του πλέγματος. Επίσης το σύνολο Π των σημείων του πλέγματος παραμένει αναλλοίωτο ως προς τον μετασχηματισμό $\begin{cases} x \mapsto -x \\ y \mapsto -y \end{cases}$ που είναι συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων.

Κατασκευάζοντας το πλέγμα και θεωρώντας τρίγωνα και πολύγωνα τα οποία έχουν τις κορυφές τους σε αυτό, μπορούμε να δείξουμε κάποια θεωρήματα που θα μας χρειαστούν για να αποδείξουμε το θεώρημα Pick και τα οποία απαντούν σε κάποια ερωτήματα σε σχέση με τα πολύγωνα πλέγματος.

5.3. Τρίγωνα πλέγματος.

Ένα τρίγωνο το οποίο δεν περιέχει σημεία του πλέγματος άλλα από τις κορυφές του θα το ονομάζουμε πρωταρχικό τρίγωνο (primitive triangle). Ένα σημαντικό δομικό στοιχείο της απόδειξης του θεωρήματος Pick που θα παρουσιάσουμε είναι ότι το εμβαδό κάθε πρωταρχικού τριγώνου είναι ½ .

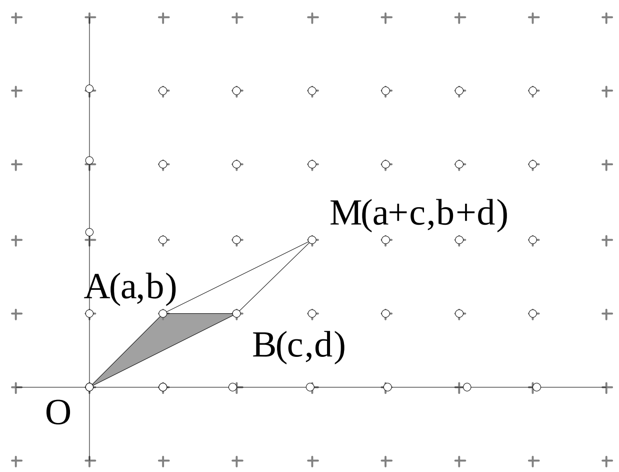
<u>Θεώρημα 1</u>

Έστω (a,b) και (c,d) σημεία του πλέγματος Π ώστε τα $(0,0)$, (a,b) και (c,d) να μην είναι συνευθειακά. Αν Τ είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, (a,b) και (c,d) τότε ισχύει η πρόταση:

Ε(Τ) = ½ $\Leftrightarrow$ [το Τ δεν περιέχει σημεία του πλέγματος άλλα από τις κορυφές του] (**Ι**)

<u>Απόδειξη</u>

Έστω Ρ το παραλληλόγραμμο που μπορούμε να κατασκευάσουμε με πλευρές τα διανύσματα $\vec{\mathbf{a}}=(a,b)$ και $\vec{\mathbf{b}}=(c,d)$. Οι κορυφές του Ρ είναι τα σημεία $(0,0)$, (a,b), $(a+c,b+d)$ και (c,d).



ΣΧΗΜΑ 5.2

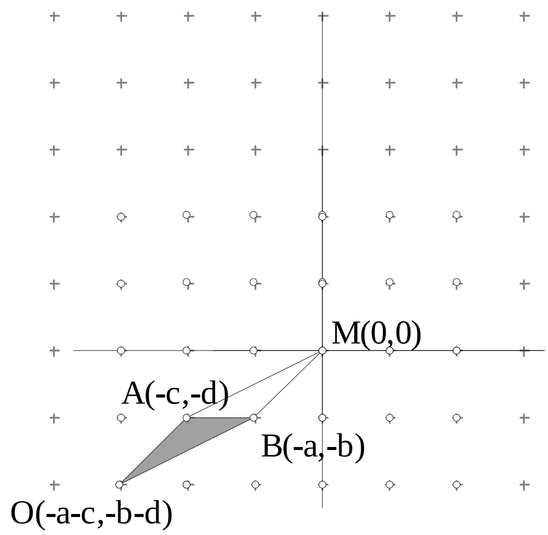
Θα δείξουμε ότι η πρόταση (**Ι**) είναι ισοδύναμη με τη πρόταση:

(**ΙΙ**) [το Ρ δεν περιέχει άλλα σημεία του πλέγματος εκτός των τεσσάρων κορυφών του]

<u>απόδειξη της ισοδυναμίας (I) $\Leftrightarrow$ (II)</u>

Προφανώς ισχύει (II) $\Rightarrow$ (I).

Αντίστροφα: Έστω ότι το τρίγωνο T δεν περιέχει άλλα σημεία του πλέγματος εκτός από τις κορυφές του, πρέπει να δείξουμε ότι και το παραλληλόγραμμο P δεν περιέχει άλλα σημεία του πλέγματος εκτός των κορυφών του. Θα χρησιμοποιήσουμε την εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι το παραλληλόγραμμο P περιέχει και άλλο σημείο του πλέγματος, το (e,f), εκτός των κρυφών του. Αν το σημείο αυτό ανήκει στο τρίγωνο T (τρίγωνο OAB) καταλήγουμε σε άτοπο. Αναγκαστικά λοιπόν θα ανήκει στο τρίγωνο ABM (**ΣΧΗΜΑ 5.2**). Μετατοπίζοντας το παραλληλόγραμμο P κατά $-a-c \in Z$ στην διεύθυνση του άξονα $x'x$ και κατά $-b-d(\in Z)$ στη διεύθυνση του άξονα $y'y$, βρίσκουμε ότι το σημείο $(e-a-c, f-b-d)$ είναι ένα σημείο του πλέγματος εντός του τριγώνου $(0{,}0)$, $(-a,-b)$, $(-c,-d)$.



ΣΧΗΜΑ 5.3

Και θεωρώντας μια ανάκλαση του πλέγματος ως προς την αρχή των αξόνων βρίσκουμε ότι το σημείο του πλέγματος $(-e+a+c,-f+b+d)$ ανήκει στο τρίγωνο T με κορυφές $(0{,}0)$, (a,b), (c,d) το οποίο είναι άτοπο.

Συνεπώς οι προτάσεις (I) και (II) είναι ισοδύναμες.

~

Μπορούμε τώρα να θεωρήσουμε ότι όλο το επίπεδο μπορεί να καλυφθεί από αντίγραφα του παραλληλογράμμου P. Κάθε αντίγραφο προκύπτει από το P με μεταφορά $m \cdot a + n \cdot c$ στον άξονα $x'x$ και κατά $m \cdot b + n \cdot d$ στη διεύθυνση του άξονα $y'y$, όπου $m \in Z$ και $n \in Z$. Οι πλευρές των παραλληλογράμμων δημιουργούν ένα δίκτυο ευθειών Δ, από τις οποίες κάποιες είναι παράλληλες στην πλευρά $(0,0)$, (a,b) του τριγώνου T και οι υπόλοιπες είναι παράλληλες στην πλευρά $(0,0)$, (c,d) του T. Τα σημεία στα οποία όλες αυτές οι ευθείες τέμνονται τα ονομάζουμε κορυφές του δικτύου Δ. Οι κορυφές του δικτύου Δ είναι οι κορυφές των αντιγράφων του παραλληλογράμμου P και μάλιστα είναι *ακριβώς* αυτές. Δηλαδή ισχύει η πρόταση

(III) [όλα τα σημεία του πλέγματος Π είναι κορυφές του δικτύου Δ]

γιατί αν ένα σημείο του πλέγματος δεν είναι κορυφή του Δ, τότε θα ανήκει σε ένα αντίγραφο του P (στο εσωτερικό του) και με κατάλληλο μετασχηματισμό μπορούμε να δείξουμε ότι θα υπάρχει και σημείο του πλέγματος που θα ανήκει στο P(εκτός των κορυφών του), το οποίο είδαμε ότι δεν ισχύει. Συνεπώς οι προτάσεις **(II)** και **(III)** είναι ισοδύναμες.

Ακριβώς όμως επειδή τα σημεία του πλέγματος είναι αυτά με συντεταγμένες (x,y) ακεραίους και οι κορυφές του δικτύου είναι σημεία της μορφής $(ma+nc, mb+nd)$, μια αλγεβρική διατύπωση της πρότασης **(III)** είναι η εξής:

πρόταση **(IV)**

[για κάθε ζευγάρι ακεραίων (x,y), υπάρχει ένα ζευγάρι ακεραίων (m,n) ώστε $\begin{cases} am + cn = x \\ bm + dn = y \end{cases}$]

ή ισοδύναμα

[για κάθε ζευγάρι ακεραίων (x,y), το σύστημα $\begin{cases} am+cn=x \\ bm+dn=y \end{cases}$ έχει λύση (m,n) με $m\in Z$ και $n\in Z$].

Όμως η λύση του συστήματος είναι $m=\frac{D_m}{D}$ και $n=\frac{D_n}{D}$ όπου $D=ad-bc\neq 0$ (ότι $D\neq 0$ μας το εξασφαλίζει τα γεγονός ότι τα $(0,0)$, (a,b) και (c,d) δεν είναι συνευθειακά) και $D_m=dx-cy$, $D_n=ay-bx$.

Προφανώς αν η ορίζουσα $D=\pm 1$ συνεπάγεται ότι οι λύσεις του συστήματος είναι ακέραιοι και ισχύει η πρόταση (**IV**). Αντίστροφα, αν ισχύει η πρόταση (**IV**) [για κάθε ζευγάρι ακεραίων (x,y), το σύστημα $\begin{cases} am+cn=x \\ bm+dn=y \end{cases}$ έχει λύση (m,n) με $m\in Z$ και $n\in Z$] τότε για

- ✓ $x=1,\ y=0$, έχουμε $m=\frac{d}{D}\in Z$ και $n=-\frac{b}{D}\in Z$, οπότε ισχύει ότι $D|d$ και $D|b$, ενώ για
- ✓ $x=0,\ y=1$, έχουμε αντίστοιχα ότι $D|c$ και $D|a$,

συνεπώς $D^2|ad$ και $D^2|bc \Rightarrow D^2|ad-bc \Rightarrow D^2|D$, άρα $D=\pm 1$.

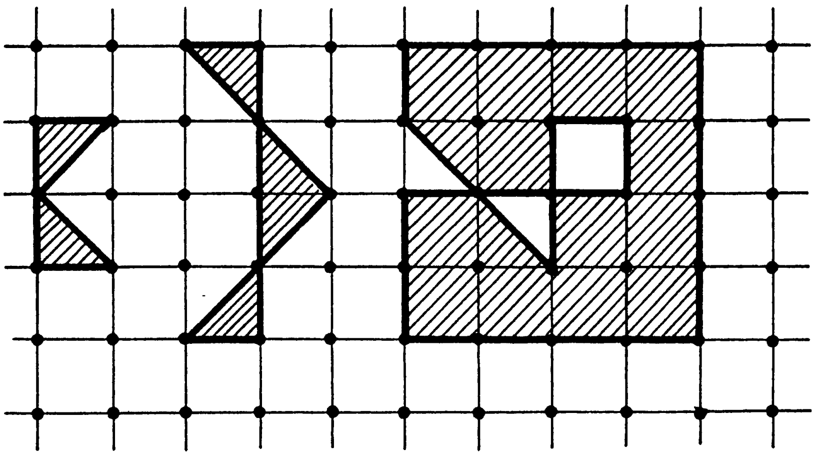
Άρα η πρόταση (**IV**) είναι ισοδύναμη με το να είναι η ορίζουσα $D=ad-bc=\pm 1$.

Τότε όμως το εμβαδό του τριγώνου Τ είναι Ε(Τ)= ½ $|D|$ = ½ .

Και αποδείξαμε το θεώρημα 1.■

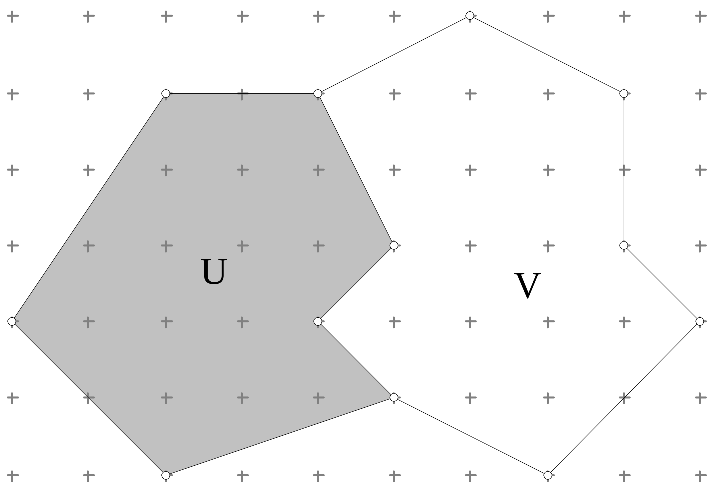
5.4. Πολύγωνα πλέγματος (Lattice polygons).

Έστω Σ το σύνολο των απλών πολυγώνων τα οποία έχουν για κορυφές τους σημεία του πλέγματος. (Λέγοντας απλά πολύγωνα εννοούμε αυτά που είναι τοπολογικά ισοδύναμα με έναν κύκλο. Δεν επιτρέπονται πολύγωνα που έχουν τρύπες ούτε πολύγωνα που αυτό-τέμνονται όπως αυτά στο **ΣΧΗΜΑ 5.4**.



ΣΧΗΜΑ 5.4

Αν το U ανήκει στο Σ, τότε το U είναι ένα απλό πολύγωνο το οποίο έχει για κορυφές του σημεία του πλέγματος και το σύνορο του είναι μια απλή κλειστή πολυγωνική γραμμή. Αν τα U και V ανήκουν στο Σ και είναι τέτοια ώστε να έχουν κοινό ένα απλό συνεκτικό μέρος του συνόρου του καθενός (όχι ένα μοναδικό σημείο) και όχι άλλα σημεία, τότε η ένωση τους σχηματίζει ένα πολύγωνο το οποίο ανήκει και αυτό στο Σ. Θα συμβολίζουμε αυτό το πολύγωνο U+V.



ΣΧΗΜΑ 5.5

Ας παρατηρήσουμε ότι το U+V δεν ορίζεται για όλα τα ζευγάρια, U, V στο Σ, αλλά για κάποια διακεκριμένα ζεύγη.

Έστω $f(U)$ μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη για όλα τα πολύγωνα U του Σ, $f:\Sigma \mapsto R$. Τέτοιες συναρτήσεις μπορεί να είναι:

- ✓ η συνάρτηση που μας δίνει το εμβαδό ενός πολυγώνου U
- ✓ η συνάρτηση $i:\Sigma \to N$ η οποία για κάθε πολύγωνο U του Σ μας δίνει το πλήθος των εσωτερικών σημείων πλέγματος του πολυγώνου. Αναφερόμενοι στο **ΣΧΗΜΑ 5.5** έχουμε $i(U)=13$ ενώ $i(V)=14$ και $i(U+V)=29$
- ✓ η συνάρτηση $b:\Sigma \to N$ η οποία για κάθε πολύγωνο U του Σ μας δίνει το πλήθος των σημείων πλέγματος που βρίσκονται στο σύνορο του πολυγώνου. Αναφερόμενοι πάλι στο **ΣΧΗΜΑ 5.5** έχουμε $b(U)=9$ ενώ $b(V)=11$ και $b(U+V)=14$. Υπενθυμίζουμε ότι δεν μετράμε μόνο τις κορυφές του πολυγώνου αλλά και τα σημεία του πλέγματος που ανήκουν στις πλευρές του.

Αν $f(U)+f(V)=f(U+V)$ για όλα τα U, V στο Σ, για τα οποία ορίζεται το U+V, τότε λέμε ότι η f είναι **προσθετική συνάρτηση**. Για παράδειγμα, μια προσθετική συνάρτηση είναι η συνάρτηση που μας δίνει το εμβαδό ενός πολυγώνου, ενώ οι προηγούμενες συναρτήσεις $i:\Sigma \to N$ και $b:\Sigma \to N$ δεν είναι προσθετικές. Παρόλο που οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι προσθετικές ικανοποιούν το εξής θεώρημα:

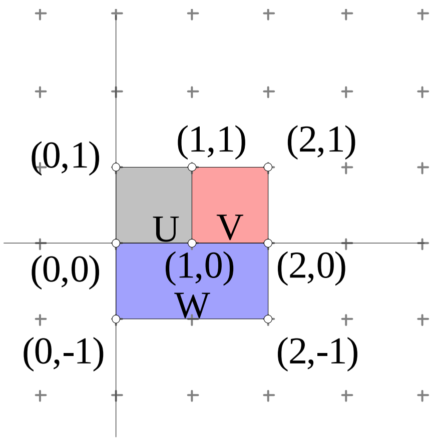
<u>Θεώρημα 2</u>

Έστω $i(U)$ συμβολίζουμε το πλήθος των σημείων του πλέγματος τα οποία βρίσκονται στο εσωτερικό του U και $b(U)$ συμβολίζουμε το πλήθος των σημείων του πλέγματος στο σύνορο του U. Η συνάρτηση

$f(U) = \alpha \cdot i(U) + \beta \cdot b(U) + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in R$ είναι προσθετική αν και μόνο αν $\beta = \frac{\alpha}{2}$ και $\gamma = -\alpha$.

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω ότι η $f(U) = \alpha \cdot i(U) + \beta \cdot b(U) + \gamma$ είναι προσθετική. Θεωρούμε ότι U είναι το τετράγωνο $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, V το τετράγωνο $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(1,1)$ και W το ορθογώνιο $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,-1)$, $(0,-1)$.



ΣΧΗΜΑ 5.6

Ισχύει $i(U) = i(V) = i(W) = 0$ και $b(U) = b(V) = 4$ $b(W) = 6$ οπότε

$$f(U) = 4\beta + \gamma$$

$$f(V) = 4\beta + \gamma$$

$$f(W) = 6\beta + \gamma .$$

Επίσης τα U+V και (U+V)+W ορίζονται και ισχύει:

$$f(U+V) = 6\beta + \gamma$$

$$f((U+V)+W) = \alpha + 8\beta + \gamma$$

και επειδή η f είναι προσθετική ισχύει: $\begin{cases} f(U) + f(V) = f(U+V) \\ f\big((U+V)+W\big) = f(U+V) + f(W) \end{cases}$

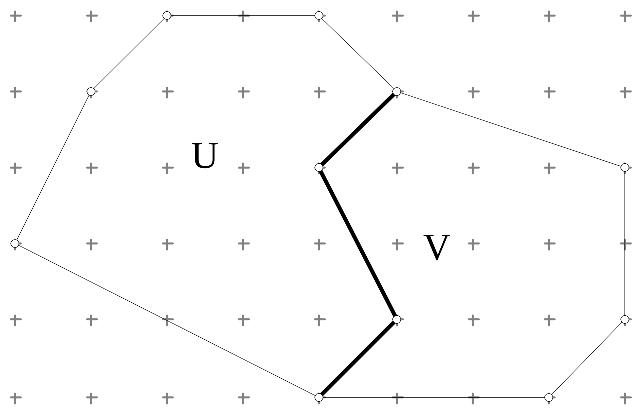
ή ισοδύναμα: $\begin{cases} 8\beta + 2\gamma = 6\beta + \gamma \\ \alpha + 8\beta + \gamma = 12\beta + 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{\alpha}{2} \\ \gamma = -\alpha \end{cases}.$

($\Leftarrow$) Αντίστροφα. Έστω ότι ισχύει $\begin{cases} \beta = \dfrac{\alpha}{2} \\ \gamma = -\alpha \end{cases}$.

Τότε η $f(U) = \alpha \cdot i(U) + \beta \cdot b(U) + \gamma$ είναι της μορφής:

$$f(U) = \alpha \cdot i(U) + \frac{\alpha}{2} \cdot b(U) - \alpha .$$

Αν τα U και V είναι πολύγωνα πλέγματος τέτοια ώστε να ορίζεται το U+V, θα έχουν κοινό ένα μέρος από το σύνορο του καθενός, **ΣΧΗΜΑ 5.7**.



ΣΧΗΜΑ 5.7

Ας συμβολίσουμε με K το κοινό σύνορο των U και V και έστω k ($k \in N$) το πλήθος των σημείων του πλέγματος που βρίσκονται πάνω στο K. Αφού το K είναι κάτι περισσότερο από ένα μεμονωμένο σημείο θα ισχύει ότι $k \geq 2$, και το K θα περιέχει τουλάχιστον δυο σημεία, τα άκρα του. Κάθε άλλο σημείο του πλέγματος το οποίο βρίσκεται πάνω στο K (εκτός από τα άκρα του) θα είναι εσωτερικό σημείο του U+V. Επιπλέον τα εσωτερικά σημεία των πολυγώνων U και V θα παραμείνουν εσωτερικά στο U+V, συνεπώς ισχύει:

$$i(U+V) = i(U) + i(V) + k - 2 .$$

Αντίστοιχα έχουμε $b(U+V) = \big(b(U) - k\big) + \big(b(V) - k\big) + 2\big)$, δηλαδή

$$b(U+V) = b(U) + b(V) - 2k + 2 .$$

Οπότε: $$f(U+V)=\alpha\cdot i(U+V)+\frac{\alpha}{2}\cdot b(U+V)-\alpha$$

$$f(U+V)=\alpha\cdot[i(U)+i(V)+k-2]+\frac{\alpha}{2}[\,b(U)+b(V)-2k+2]-\alpha$$

$$f(U+V)=(\alpha\cdot i(U)+\frac{\alpha}{2}b(U)-\alpha)+(\alpha\cdot i(V)+\frac{\alpha}{2}b(V)-\alpha)$$

$f(U+V)=f(U)+f(V)$, δηλαδή η f προσθετική. ■

Δείξαμε λοιπόν ότι η συνάρτηση $f(U)=\alpha\cdot i(U)+\frac{\alpha}{2}\cdot b(U)-\alpha$ είναι προσθετική όταν ορίζεται το U+V. Επίσης η συνάρτηση Εμβ(U) που μας δίνει το εμβαδό ενός πολυγώνου U, είναι προσθετική συνάρτηση αφού όταν ορίζεται το U+V ισχύει Εμβ(U+V)=Εμβ(U)+Εμβ(V). Τίθεται λοιπόν το ερώτημα μήπως υπάρχει κάποια τιμή του α ώστε η προσθετική συνάρτηση $f(U)=\alpha\cdot i(U)+\frac{\alpha}{2}\cdot b(U)-\alpha$ να εκφράζει το εμβαδό του πολυγώνου πλέγματος U. Η απάντηση είναι θετική και θα την αποδείξουμε πρώτα για τα πρωταρχικά τρίγωνα (πρωταρχικό τρίγωνο είναι ένα τρίγωνο πλέγματος το οποίο δεν περιέχει άλλα σημεία του πλέγματος εκτός από τις τρεις κορυφές του) και στη συνέχεια για όλα τα τρίγωνα χρησιμοποιώντας επαγωγή στο μέγεθος του τριγώνου δηλαδή στο πλήθος των σημείων πλέγματος που περιέχει.

Θεωρούμε ένα πρωταρχικό τρίγωνο T (που δεν περιέχει άλλα σημεία πλέγματος εκτός των τριών κορυφών του) που η μία κορυφή του είναι η αρχή των αξόνων. Η υπόθεση αυτή δεν βλάπτει τη γενικότητα γιατί μια μεταφορά κατά ακέραιους αριθμούς στις συντεταγμένες οποιουδήποτε πρωταρχικού τριγώνου θα μπορούσε να μεταφέρει την μια κορυφή του στην αρχή των αξόνων. Ταυτόχρονα, οι συναρτήσεις Εμβ(T), i(T), b(T) που μας δίνουν το εμβαδό του τριγώνου, το πλήθος των εσωτερικών σημείων πλέγματος και το πλήθος των συνοριακών σημείων πλέγματος του τριγώνου αντίστοιχα, μένουν αμετάβλητες σε τέτοιους μετασχηματισμούς. Οπότε το τρίγωνο για το οποίο μιλάμε είναι ένα τρίγωνο σαν αυτό του <u>θεωρήματος 1</u> και έχουμε αποδείξει ότι:

Εμβ(Τ) = ½ $\Leftrightarrow$ [το Τ δεν περιέχει σημεία του πλέγματος άλλα από τις κορυφές του]

Διατυπώνουμε τώρα το γενικότερο θεώρημα για οποιοδήποτε τρίγωνο πλέγματος.

<u>Θεώρημα 3</u>

Αν Τ είναι ένα τρίγωνο στο Σ, τότε το εμβαδό του δίνεται από τον τύπο $$\text{Εμβ}(T) = i(T) + \frac{1}{2}b(T) - 1 \qquad (1).$$

<u>Απόδειξη</u>

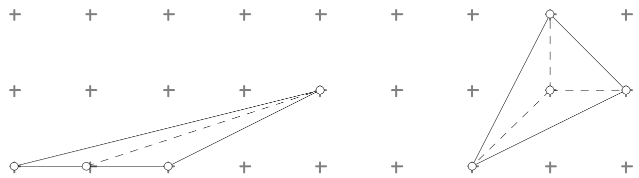
Αν Εμβ(Τ) = ½ $\Leftrightarrow$ [το Τ δεν περιέχει σημεία του πλέγματος άλλα από τις κορυφές του] $\Leftrightarrow$ $i(T) = 0$, $b(T) = 3$ και ο τύπος (1) ισχύει σε αυτή την περίπτωση.

Για ένα τυχαίο τρίγωνο Τ στο Σ, με κορυφές (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), έχουμε ότι το εμβαδό του είναι

$$\text{Εμβ}(T) = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)\right|$$

το οποίο θα είναι το ½ ενός ακεραίου αφού οι κορυφές του τριγώνου είναι σημεία του πλέγματος και συνεπώς τα x_i, y_i είναι ακέραιοι.

Οπότε το θεώρημα προκύπτει με επαγωγή στο μέγεθος του τριγώνου (του εμβαδού του τριγώνου). Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε τρίγωνο Τ μπορεί να εκφραστεί ως $T = T_1 + T_2$ ή $T = T_1 + T_2 + T_3$ όπου τα T_i είναι τρίγωνα στο Σ που έχουν εμβαδό μικρότερο του $\text{Εμβ}(T)$. Αλλά αυτό ισχύει γιατί αν υπάρχει επιπλέον σημείο του πλέγματος εκτός των κορυφών του τριγώνου τότε:



ΣΧΗΜΑ 5.8

- ✓ αν το σημείο βρίσκεται πάνω σε κάποια πλευρά του τριγώνου Τ, χωρίζουμε το τρίγωνο σε δυο τρίγωνα ενώνοντας το σημείο με την απέναντι κορυφή
- ✓ αν το σημείο βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου Τ, χωρίζουμε το τρίγωνο σε τρία τρίγωνα ενώνοντας το σημείο με τις τρεις κορυφές του Τ.

Συνεπώς ο τύπος (1) ισχύει για κάθε τρίγωνο που οι κορυφές του είναι σημεία του πλέγματος. ■

<u>Πόρισμα</u>

Αν το U είναι ένα κυρτό πολύγωνο στο Σ, τότε

$$\text{Εμβ}(U) = i(U) + \frac{1}{2}b(U) - 1.$$

<u>Απόδειξη</u>

Το πολύγωνο U μπορεί να ¨σπάσει¨ σε τρίγωνα του Σ και το πόρισμα είναι άμεση συνέπεια της προσθετικότητας των συναρτήσεων Εμβ(U) και $f(U) = \alpha \cdot i(U) + \frac{\alpha}{2} \cdot b(U) - \alpha$ καθώς και του προηγούμενου θεωρήματος 3.■

<u>Παρατήρηση</u>

Η απόδειξη του πορίσματος βασίστηκε στο γεγονός ότι ένα κυρτό πολύγωνο πλέγματος μπορεί να χωριστεί σε τρίγωνα τα οποία έχουν και αυτά για κορυφές τους σημεία του πλέγματος. Όμως αυτό ισχύει και για μη κυρτά πολύγωνα πλέγματος (βλέπε: Howard Eves, 1963, A Survey of Geometry, vol.1, p. 238). Συνεπώς καταλήγουμε στο **θεώρημα του Pick**:

Θεώρημα 4

Αν το U είναι ένα απλό πολύγωνο στο Σ, τότε

$$\text{Εμβ}(U) = i(U) + \frac{1}{2} b(U) - 1 .$$

5.5. Θεώρημα Pick μια δεύτερη (συνδυαστική) ματιά.

Οι βασικές συνιστώσες της προηγούμενης απόδειξης του θεωρήματος Pick είναι:

- **i.** το εμβαδό ενός πρωταρχικού τριγώνου είναι σταθερό και ίσο με ½ ,
- **ii.** η προσθετικότητα της συνάρτησης $f(U) = \alpha \cdot i(U) + \frac{\alpha}{2} \cdot b(U) - \alpha$ καθώς και της συνάρτησης του εμβαδού και
- **iii.** η δυνατότητα να υποδιαιρούμε κάθε απλό πολύγωνο πλέγματος σε πρωταρχικά τρίγωνα πλέγματος.

Αν θεωρήσουμε δεδομένη την προσθετικότητα της συνάρτησης εμβαδό καθώς και το ότι κάθε πρωταρχικό τρίγωνο έχει σταθερό εμβαδό ίσο με ½ τότε για να υπολογίσουμε το εμβαδό ενός απλού πολυγώνου πλέγματος αρκεί να μετρήσουμε σε πόσα πρωταρχικά τρίγωνα υποδιαιρείται. Βλέπουμε λοιπόν ότι το θεώρημα του Pick δεν είναι ουσιαστικά ένα θεώρημα για εμβαδά αλλά στην ουσία του είναι ένα αποτέλεσμα της συνδυαστικής το οποίο ανήκει στην τοπολογία.

Θα αποδείξουμε ότι το πλήθος (ο αριθμός) των τριγώνων t(U) σε μια πλήρη πρωταρχική τριγωνοποίηση (primitive triangulation) ενός πολυγώνου U εξαρτάται μόνο από το πλήθος των εσωτερικών του σημείων $i(U)$ και από το πλήθος των συνοριακών του σημείων $b(U)$ και δίνεται από τον τύπο

$$t(U) = 2 \cdot i(U) + b(U) - 2 .$$

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρούμε ότι ένα ιδεατό αντίγραφο του πολυγώνου U είναι τοποθετημένο ακριβώς πάνω στο U (με την ίδια ακριβώς τριγωνοποίηση) και τα δυο σχήματα είναι κολλημένα μαζί κατά μήκος των όμοιων ακμών τους. Επίσης θεωρούμε ότι τα δυο αντικείμενα είναι ελαστικά και ότι το εσωτερικό τους ¨φουσκώνεται¨ ώστε να πάρουμε μια ¨σφαίρα¨.

Στο στερεό που προκύπτει ισχύει ο τύπος του Euler

Κ + Ε =Α+2 (Κορυφές +Έδρες = Ακμές +2).

Όμως ισχύουν τα εξής:

- ✓ Κάθε αντίγραφο συνεισφέρει $t(U)$ τρίγωνα δίνοντας συνολικά $E = 2 \cdot t(U)$ έδρες στη σφαίρα.
- ✓ Επειδή οι εσωτερικές κορυφές $i(U)$ κάθε αντιγράφου διατηρούνται ενώ οι συνοριακές κορυφές $b(U)$ είναι κολλημένες ανά δυο μαζί, ο ολικός αριθμός των κορυφών στο στερεό είναι $K = 2 \cdot i(U) + b(U)$.
- ✓ Κάθε τρίγωνο από τα $2 \cdot t(U)$ έχει τρεις πλευρές(ακμές στο στερεό) συνεπώς έχουμε συνολικά $6 \cdot t(U)$ ακμές αλλά επειδή κάθε ακμή συμμετέχει σε δυο τρίγωνα στο τέλος έχουμε ότι οι ακμές στη ¨σφαίρα¨ είναι $A = 3 \cdot t(U)$.

Εφαρμόζοντας τώρα τον τύπο του Euler έχουμε

$$K + E = A + 2$$

$$2 \cdot i(U) + b(U) + 2 \cdot t(U) = 3 \cdot t(U) + 2$$

και λύνοντας ως προς το πλήθος των τριγώνων, έχουμε

$$t(U) = 2 \cdot i(U) + b(U) - 2 . \blacksquare$$

Προφανώς αν δείξουμε ότι το εμβαδό κάθε πρωταρχικού τριγώνου είναι ½, τότε το εμβαδό του πολυγώνου P είναι

$$\text{Εμβ}(U) = \frac{1}{2} \cdot (\text{το πλήθος των τριγώνων})$$

$$\text{Εμβ}(U) = \frac{1}{2} \cdot t(U)$$

$$\text{Εμβ}(U) = \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot i(U) + b(U) - 2]$$

$$\text{Εμβ}(U) = i(U) + \frac{1}{2} b(U) - 1$$

που δεν είναι τίποτε άλλο παρά το θεώρημα Pick.

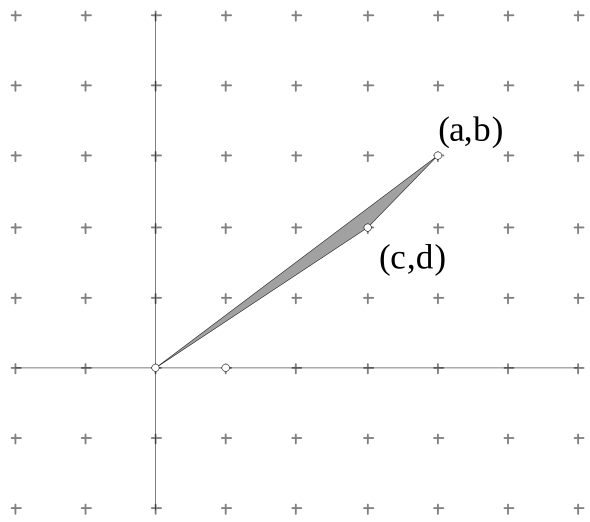
Βέβαια εκκρεμεί η απόδειξη ότι το εμβαδό κάθε πρωταρχικού τριγώνου είναι ½ . Υπενθυμίζουμε ότι πρωταρχικό τρίγωνο πάνω σε ένα πλέγμα είναι ένα τρίγωνο που δεν περιέχει άλλα σημεία του πλέγματος εκτός των τριών κορυφών του.

<u>Θεώρημα</u>

Το εμβαδό κάθε πρωταρχικού τριγώνου είναι ½ .

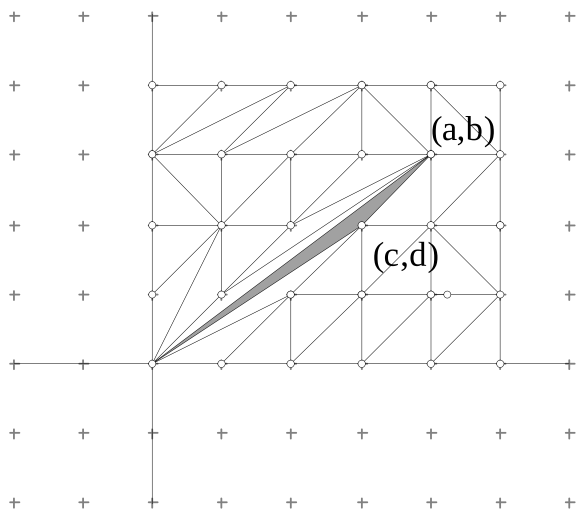
<u>Απόδειξη</u>

Έστω ένα πρωταρχικό τρίγωνο. Επειδή το εμβαδό του δεν αλλάζει από κάποια μεταφορά του, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μία κορυφή του είναι η αρχή των αξόνων $(0,0)$ και έστω οι δύο άλλες κορυφές του είναι (a,b), (c,d) όπου a,b,c,d ακέραιοι.



ΣΧΗΜΑ 5.9

Το εμβαδό του δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\|ad - bc\|$. Αφού τα a, b, c, d είναι ακέραιοι και το εμβαδό του τριγώνου είναι διάφορο του μηδενός, ισχύει $E \geq \frac{1}{2}$. Η ανίσωση αυτή θα ισχύει για όλα τα πρωταρχικά τρίγωνα. Θεωρούμε τώρα ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο U το οποίο περιέχει αυτό το τρίγωνο. Υποθέτουμε ότι το ορθογώνιο έχει διαστάσεις $p, q \in Z$ και επίσης ότι έχουμε πραγματοποιήσει μια πλήρη τριγωνοποίηση του U σε πρωταρχικά τρίγωνα, όπως στο παρακάτω **ΣΧΗΜΑ 5.10** .



ΣΧΗΜΑ 5.10

Το ορθογώνιο U (διαστάσεων $p, q \in Z$) περιέχει $i(U) = (p-1)(q-1)$ εσωτερικά σημεία πλέγματος και $b(U) = 2p + 2q$ συνοριακά σημεία πλέγματος. Συνεπώς από το προηγούμενο θεώρημα το πλήθος των πρωταρχικών τριγώνων που περιέχει το U είναι

$$t(U) = 2 \cdot i(U) + b(U) - 2$$
$$t(U) = 2(p-1)(q-1) + 2p + 2q - 2$$
$$t(U) = 2pq.$$

Όμως το εμβαδό κάθε πρωταρχικού τριγώνου είναι $E \geq \frac{1}{2}$ και επίσης το ορθογώνιο έχει εμβαδό $Εμβ(U) = pq$ οπότε τελικά πρέπει όλα τα πρωταρχικά τρίγωνα να έχουν εμβαδό $E = \frac{1}{2}$ γιατί αλλιώς το συνολικό άθροισμα των εμβαδών τους θα ξεπερνάει το $Εμβ(U) = pq$.■

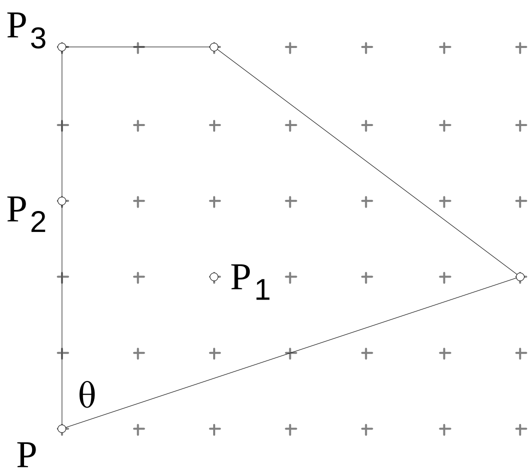
5.6. Μια τρίτη απόδειξη του θεωρήματος Pick.

Στις προηγούμενες αποδείξεις του θεωρήματος Pick ένα κομβικό σημείο ήταν να αποδείξουμε ότι το εμβαδό ενός πρωταρχικού τριγώνου (primitive triangle) είναι ½ . Θα παραθέσουμε και μία απόδειξη που προτάθηκε από τον Dale E. Varberg το 1985 στο The American Mathematical Monthly του Οκτωβρίου, η οποία είναι ευθεία απόδειξη, διαισθητικά προσιτή και δεν απαιτεί τίποτα περισσότερο από το γεγονός ότι ένα πολύγωνο πλέγματος μπορεί να υποδιαιρεθεί σε τρίγωνα πλέγματος.

Αρχίζουμε αντιστοιχίζοντας σε κάθε σημείο πλέγματος P_k ενός πολυγώνου πλέγματος U, ένα συντελεστή βαρύτητας $w_k = \frac{\theta_k}{2\pi}$, όπου θ_k

είναι το μέτρο της γωνίας υπό την οποία το σημείο P_k ¨βλέπει¨ το εσωτερικό του πολυγώνου U.

Έτσι, (βλέπε **ΣΧΗΜΑ 5.11**) για κάθε σημείο πλέγματος στο εσωτερικό του πολυγώνου έχουμε $w_1 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. Για κάθε σημείο πλέγματος που βρίσκεται στο σύνορο του U και δεν είναι κορυφή έχουμε $w_2 = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$, ενώ για ένα σημείο που είναι κορυφή μιας ορθής γωνίας του πολυγώνου είναι $w_3 = \frac{1}{4}$.



ΣΧΗΜΑ 5.11

Μπορούμε να σκεφτούμε το $w_k = \frac{\theta_k}{2\pi}$ σαν ένα μέτρο της συνεισφοράς του P_k στην επιφάνεια του πολυγώνου U.

Ορίζουμε για όλο το πολύγωνο $W(U) = \sum_{P_k \in U} w_k$ και θα δείξουμε ότι $W(U) = \text{Εμβ}(U)$.

Έστω Σ το σύνολο των πολυγώνων τα οποία έχουν για κορυφές τους σημεία του πλέγματος. Αν το U ανήκει στο Σ, τότε το U είναι ένα πολύγωνο το οποίο έχει για κορυφές του σημεία του πλέγματος και το σύνορο του είναι μια κλειστή πολυγωνική γραμμή.

Λήμμα

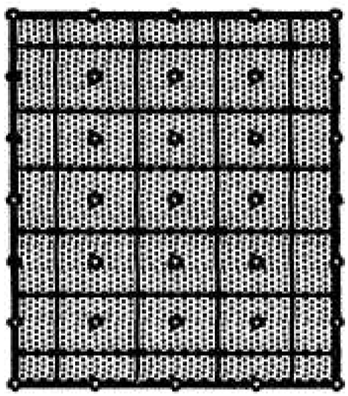
Για ένα πολύγωνο U στο Σ, ισχύει $W(U) = \text{Εμβ}(U)$.

Απόδειξη

Αρχικά να παρατηρήσουμε ότι το $W(U) = \sum_{P_k \in U} w_k$ είναι προσθετική συνάρτηση. Δηλαδή αν τα U και V ανήκουν στο Σ και είναι τέτοια ώστε να μην αλληλοκαλύπτονται, τότε η ένωση τους σχηματίζει ένα πολύγωνο το οποίο ανήκει και αυτό στο Σ. Θα συμβολίζουμε αυτό το πολύγωνο U+V και ισχύει $W(U+V) = W(U) + W(V)$. Η προσθετικότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η ¨ορατότητα¨ των κοινών σημείων των U και V προς το εσωτερικό των U και V προστίθεται και δίνει την ¨ορατότητα¨ του σημείου στο U+V.

Στη συνέχεια θεωρούμε διαδοχικά:

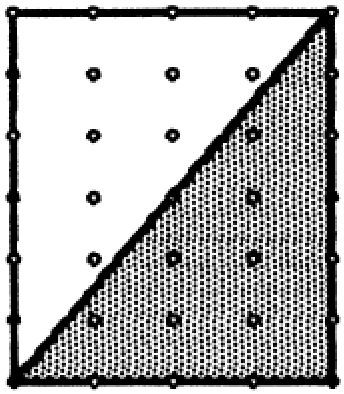
Περίπτωση 1. Ένα ορθογώνιο πολύγωνο πλέγματος με πλευρές παράλληλες στο πλέγμα (**ΣΧΗΜΑ 5.12)**



ΣΧΗΜΑ 5.12

Σε αυτή την περίπτωση είναι προφανές ότι ισχύει $W(U) = Εμβ(U)$ αν σχηματίσουμε ένα βοηθητικό πλέγμα με τις μεσοπαράλληλες των ευθειών που σχηματίζουν τα σημεία του πλέγματος.

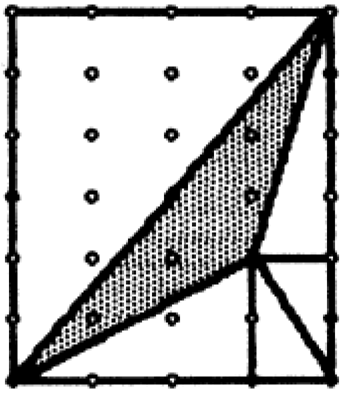
Περίπτωση 2. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο πλέγματος με τις κάθετες πλευρές του παράλληλες στο πλέγμα (**ΣΧΗΜΑ 5.13**).



ΣΧΗΜΑ 5.13

Η περίπτωση 2 είναι άμεση συνέπεια της περίπτωσης 1 και της προσθετικότητας του W και του εμβαδού. Συνεπώς και σε αυτή την περίπτωση ισχύει $W(U) = Εμβ(U)$.

Περίπτωση 3. Ένα τυχαίο τρίγωνο πλέγματος το οποίο μπορούμε να περιτριγυρίσουμε με ορθογώνια τρίγωνα της περίπτωσης 2 ώστε να σχηματιστεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο της περίπτωσης 1 (**ΣΧΗΜΑ 5.14**).



ΣΧΗΜΑ 5.14

Αυτή η τελευταία περίπτωση αποδεικνύεται εφαρμόζοντας την προσθετικότητα του W και του εμβαδού, στα επιμέρους τρίγωνα και στο ορθογώνιο, τα οποία ανάγονται στις περιπτώσεις 1 και 2 και για τα οποία ισχύει ήδη $W(U) = Eμβ(U)$. Συνεπώς και για ένα τυχαίο τρίγωνο πλέγματος ισχύει $W(U) = Eμβ(U)$.

Τέλος για να αποδείξουμε το λήμμα αρκεί να δείξουμε ότι ένα τυχαίο πολύγωνο πλέγματος μπορεί να υποδιαιρεθεί σε τρίγωνα πλέγματος (βλέπε: Howard Eves, 1963, A Survey of Geometry, vol.1, p. 238) και να χρησιμοποιήσουμε την προσθετικότητα του εμβαδού και του W την οποία έχουμε ήδη δείξει. Άρα το λήμμα αποδείχτηκε.■

<u>Θεώρημα Pick</u>

Σε ένα απλό πολύγωνο πλέγματος U ισχύει

$$Eμβ(U) = i(U) + \frac{1}{2}b(U) - 1.$$

<u>Απόδειξη</u>

Ένα απλό πολύγωνο πλέγματος με c κορυφές έχει άθροισμα (εσωτερικών) γωνιών $(c-2)\pi$ (βλέπε: Howard Eves, 1963, A Survey of

Geometry, vol.1, p. 239). Για παράδειγμα ένα τρίγωνο έχει άθροισμα γωνιών π, ένα τετράπλευρο έχει άθροισμα γωνιών 2π, κοκ. Από αυτό συνεπάγεται ότι αν ένα πολύγωνο πλέγματος έχει b σημεία πλέγματος που ανήκουν στο σύνορό του από τα οποία τα c είναι κορυφές του, ενώ τα υπόλοιπα b-c βρίσκονται πάνω στις πλευρές του, τότε

$$\sum_{P_k \in B} \theta_k = (b-c)\pi + (c-2)\pi$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{P_k \in B} \theta_k = (b-2)\pi$$

όπου B το σύνολο των συνοριακών σημείων πλέγματος του U.

Οπότε αν U ένα πολύγωνο πλέγματος και B το σύνολο των συνοριακών σημείων πλέγματος του U, ενώ I το σύνολο των εσωτερικών σημείων πλέγματος του U, τότε έχουμε

$$\text{Εμβ}(U) = W(U)$$

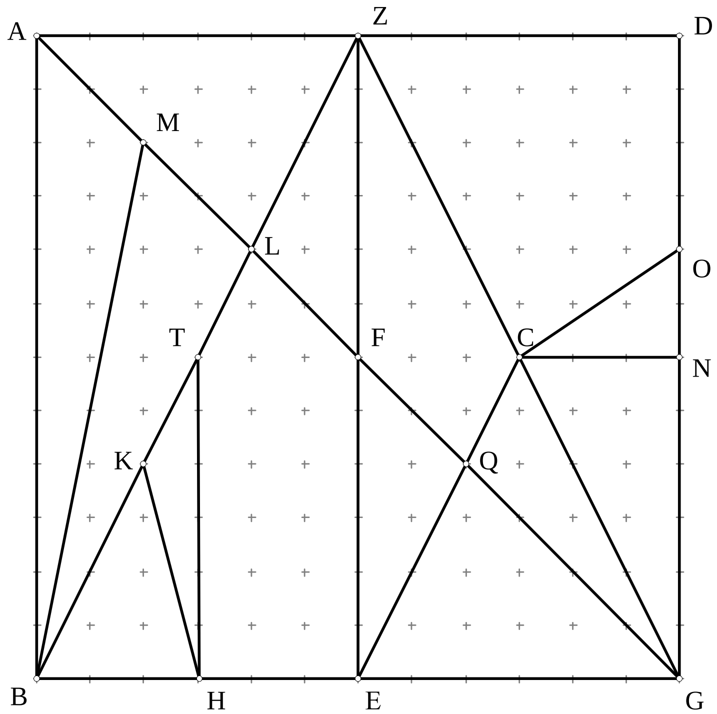
$$\text{Εμβ}(U) = \sum_{P_k \in I} w_k + \sum_{P_k \in B} w_k$$

$$\text{Εμβ}(U) = i\frac{2\pi}{2\pi} + \frac{(b-2)\pi}{2\pi}$$

$$\text{Εμβ}(U) = i + \frac{1}{2}b - 1. \blacksquare$$

5.7. Εφαρμογή του θεωρήματος Pick στο πρόβλημα που θέτει το Αραβικό χειρόγραφο.

Το αραβικό χειρόγραφο (μεταφρασμένο στα γερμανικά από τον Henricus Suter) εκτός από την περιγραφή της κατασκευής του Στομαχίου, αποδεικνύει ότι κάθε ένα από τα δεκατέσσερα κομμάτια στα οποία χωρίζεται το αρχικό τετράγωνο είναι σε ρητή αναλογία με το όλο (τετράγωνο). Μάλιστα στο τέλος υποστηρίζει ότι αυτό ακριβώς ήταν το ζητούμενο της πραγματείας. Ανεξάρτητα από το γεγονός ότι το αραβικό χειρόγραφο χαρακτηρίζεται ανακριβές ή τουλάχιστον ελλιπές σε σχέση με την αρχική πραγματεία του Αρχιμήδη, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Pick για να υπολογίσουμε τα επιμέρους εμβαδά των πολυγώνων στα οποία χωρίζεται τα Στομάχιον και να δείξουμε στη συνέχεια ότι αυτά βρίσκονται σε αναλογία με το αρχικό τετράγωνο. Για να το δείξουμε αυτό τοποθετούμε το Στομάχιον σε ένα πλέγμα ώστε η πλευρά του αρχικού τετραγώνου ABGD να έχει μήκος 12 (**ΣΧΗΜΑ 5.15**).



ΣΧΗΜΑ 5.15

Τότε το αρχικό τετράγωνο έχει εμβαδό 144 τ.μ. και με απλή αναλυτική γεωμετρία μπορούμε να δείξουμε ότι όλα τα πολύγωνα στα οποία χωρίζεται το Στομάχιον είναι πολύγωνα πλέγματος. Εφαρμόζοντας λοιπόν διαδοχικά το θεώρημα Pick έχουμε (βλέπε **ΣΧΗΜΑ 5.15**):

Εμβ(OCN)=Εμβ(HKT)=3

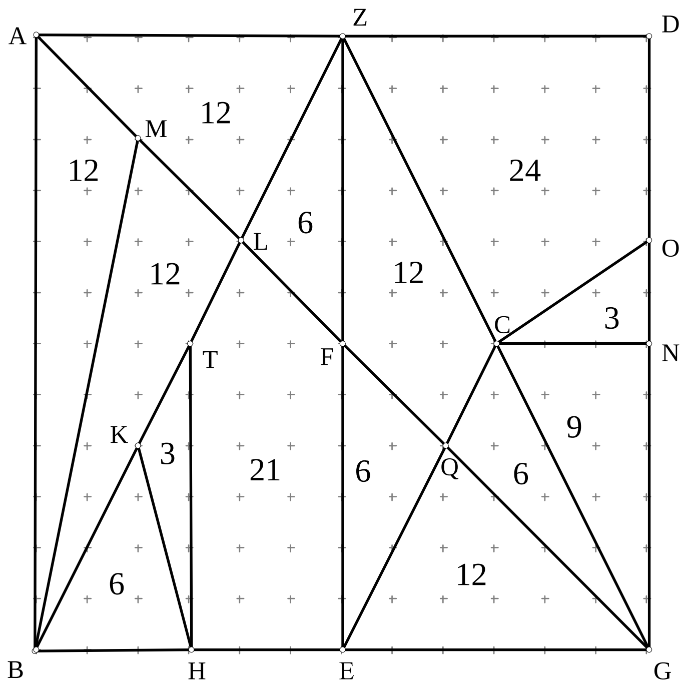
Εμβ(BKH)=Εμβ(FLZ)=Εμβ(EQF)=Εμβ(GQC)=6

Εμβ(ALZ)=Εμβ(EQG)=Εμβ(ABM)=Εμβ(BLM)=Εμβ(ZFQC)=12

Εμβ(HEFLT)=21

Εμβ(ZCOD)=24.

Οπότε οι λόγοι των πολυγώνων προς το αρχικό τετράγωνο είναι όλοι ρητοί και ίσοι αντίστοιχα με: $\frac{3}{144}=\frac{1}{48}$, $\frac{6}{144}=\frac{1}{24}$, $\frac{12}{144}=\frac{1}{12}$, $\frac{21}{144}=\frac{7}{48}$, $\frac{24}{144}=\frac{1}{6}$.



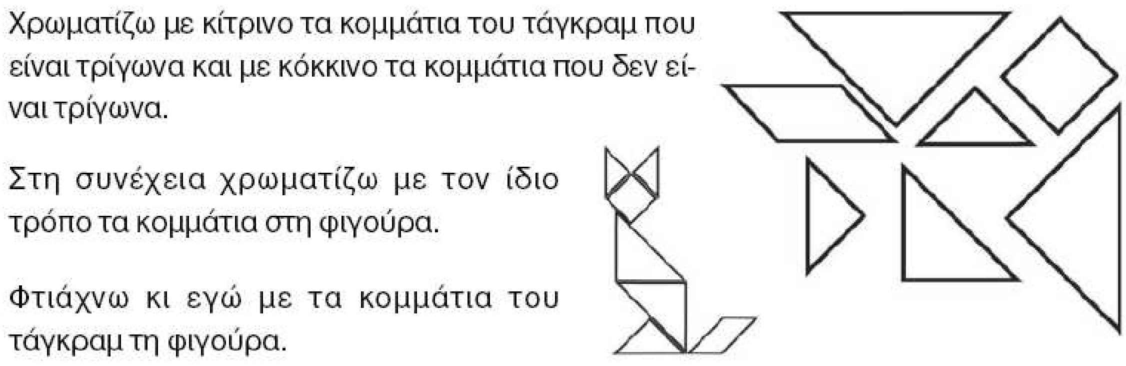
ΣΧΗΜΑ 5.16

6. Διδακτικές προεκτάσεις

Σε αυτή την ενότητα θα προσπαθήσουμε να δώσουμε κάποιες ιδέες και σκέψεις για διδακτική αξιοποίηση του Στομαχίου στο υπάρχον αναλυτικό πρόγραμμα.

6.1. Δημοτικό.

Το παιχνίδι Στομάχιον βασίζεται στην ίδια αρχική ιδέα με το κινέζικο παιχνίδι τάγκραμ. Το τάγκραμ έχει εισαχθεί στα βιβλία του δημοτικού του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος. Χρησιμοποιείται ήδη από τη δευτέρα τάξη του δημοτικού για την εξοικείωση των μαθητών με την έννοια του πολυγώνου. Για παράδειγμα, στο τετράδιο εργασιών της β΄ τάξης (σελίδα 10) βρίσκουμε την παρακάτω άσκηση:

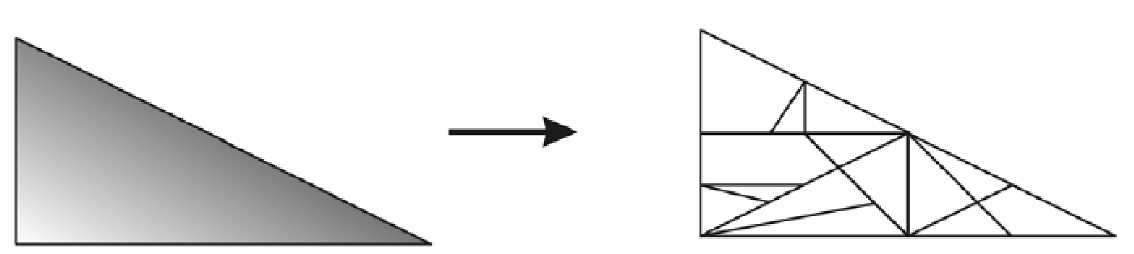


ΕΙΚΟΝΑ 6.1

Το τάγκραμ αποτελείται από πιο απλά σχήματα σε σχέση με το Στομάχιον και αυτή τους η διαφορά ίσως κάνει το τάγκραμ καταλληλότερο διδακτικό υλικό για τις μικρές τάξεις του δημοτικού. Όμως, από την τετάρτη τάξη του δημοτικού πιθανά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το Στομάχιο με αντίστοιχους διδακτικούς στόχους. Στο βιβλίο του δασκάλου της δ΄ τάξης, στο κεφάλαιο 5 για τα πολύγωνα, ο βασικός διδακτικός στόχος που τίθεται είναι η εξοικείωση των παιδιών με τα πολύγωνα. Θα πρέπει τα παιδιά:

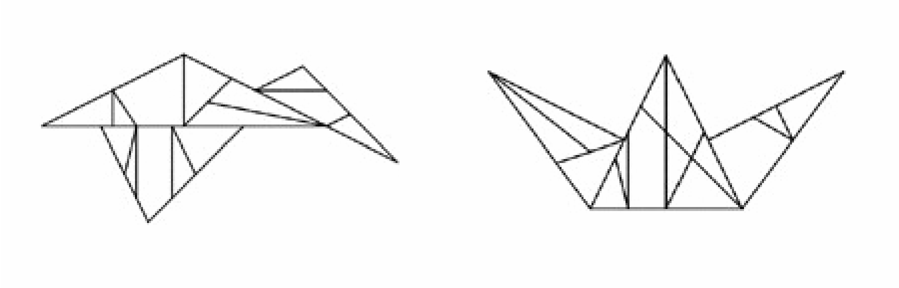
- ✓ να αναγνωρίζουν επίπεδα σχήματα σε σύνθετο σχήμα,
- ✓ να κατατάσσουν τα πολύγωνα με βάση το πλήθος πλευρών-γωνιών,
- ✓ να σχεδιάζουν πολύγωνα με χάρακα σε πλέγμα και χωρίς πλέγμα,
- ✓ να χωρίζουν πολύγωνα σε τυχαία ή συγκεκριμένα σχήματα,
- ✓ να συνθέτουν ένα πολύπλοκο σχήμα χρησιμοποιώντας επιμέρους επίπεδα σχήματα,
- ✓ να χρησιμοποιούν ορολογία για να στηρίξουν με επιχειρήματα μια άποψη τους (Βαμβακούση κ.α., 2007).

Ένα από τα πλαίσια ανάπτυξης του κύριου διδακτικού στόχου θα μπορούσε να είναι το παιχνίδι Στομάχιον. Μια προτεινόμενη δραστηριότητα: η τάξη χωρίζεται σε ομάδες και κάθε ομάδα αρχικά κατασκευάζει ένα σχήμα με το Στομάχιον. Κατόπιν, παρουσιάζει το περίγραμμα του σχήματος στις άλλες ομάδες, οι οποίες προσπαθούν να αναπαράγουν το σχήμα με τα κομμάτια του Στομαχίου, όπως στο παρακάτω σχήμα (**ΣΧΗΜΑ 6.1**). Προφανώς η λύση δεν είναι μοναδική.



ΣΧΗΜΑ 6.1

Τα σχήματα που μπορούν να προκύψουν από μια τέτοια διαδικασία μπορεί να είναι απλά, όπως τρίγωνα, παραλληλόγραμμα ή τραπέζια, μπορεί όμως να είναι και πιο σύνθετα σχήματα που να τα δημιουργούν τα παιδιά με την πλούσια φαντασία τους (**ΣΧΗΜΑ 6.2**).



ΣΧΗΜΑ 6.2

Στην ε΄ δημοτικού, στο κεφάλαιο 25, («Ισοεμβαδικά σχήματα») ο κύριος διδακτικός στόχος είναι οι μαθητές να μπορούν να κατανοούν το εμβαδό ενός γεωμετρικού σχήματος υπό την έννοια της επιφάνειας που αυτό καλύπτει. Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να διακρίνουν ότι διαφορετικά σχήματα πιθανά να είναι ισοεμβαδικά. Επίσης, σύνθετα σχήματα που δεν μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το εμβαδό τους, μπορούμε να τα αναλύσουμε σε άλλα, στα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα το εμβαδό τους.

Στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο 26 («Εμβαδόν τετραγώνου, ορθογωνίου παραλληλογράμμου, ορθογωνίου τριγώνου») οι μαθητές θα πρέπει να υπολογίζουν τα εμβαδά του τετραγώνου, ορθογωνίου παραλληλογράμμου και ορθογωνίου τριγώνου με χρήση τύπων. Αναλυτικά, κάποιοι επιμέρους διδακτικοί στόχοι (και για τα δύο κεφάλαια): οι μαθητές πρέπει να είναι ικανοί:

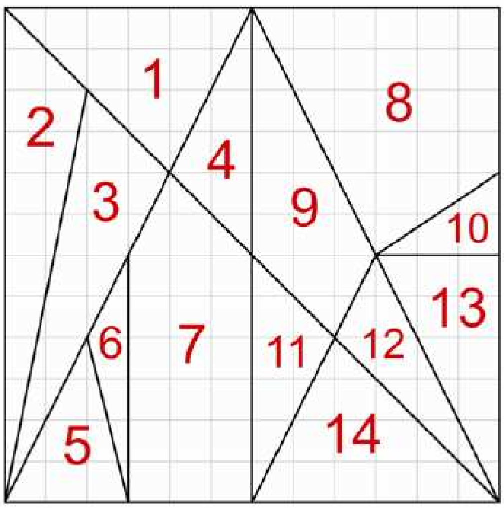
- ✓ να μπορούν να αναλύουν σύνθετα γεωμετρικά σχήματα σε άλλα πιο απλά και το αντίστροφο,
- ✓ να κατανοούν την έννοια του εμβαδού ως κάλυψη επιφάνειας και να μπορούν να το υπολογίζουν χωρίς τους τύπους εύρεσης του

(κεφάλαιο 25), αλλά με τη χρήση τετραγωνισμένου χαρτιού και με σύγκριση με άλλα μικρότερα ή μεγαλύτερα σχήματα,

- ✓ να εφαρμόζουν τη γνώση για τα ισοεμβαδικά σχήματα σε προβλήματα,
- ✓ να ανακαλύψουν τη σχέση του εμβαδού τυχαίου ορθογωνίου τριγώνου και ορθογωνίου παραλληλογράμμου,
- ✓ να βρίσκουν νοερά (κεφάλαιο 26) το εμβαδό τετραγώνου, ορθογωνίου παραλληλογράμμου και ορθογωνίου τριγώνου αν γνωρίζουν τις διαστάσεις τους (Κακαδιάρης κ.α., 2007).

Και σε αυτή την περίπτωση, ένα από τα πλαίσια ανάπτυξης των διδακτικών στόχων θα μπορούσε να είναι το παιχνίδι Στομάχιον. Το Στομάχιον αυτή τη φορά θα πρέπει να είναι σχεδιασμένο σε τετραγωνισμένο χαρτί. Ενδείκνυται το αρχικό τετράγωνο να είναι 12 × 12. Μια προτεινόμενη δραστηριότητα θα μπορούσε να είναι η εξής:

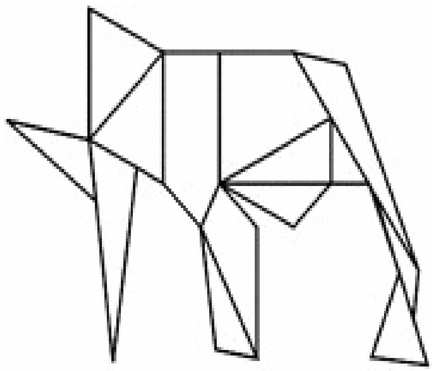
Το αρχαίο παιχνίδι Στομάχιον αποτελείται από 14 κομμάτια τα οποία μπορούν να τοποθετηθούν σε ένα τετράγωνο 12 × 12 όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (**ΣΧΗΜΑ 6.3**).



ΣΧΗΜΑ 6.3

α. Μπορείς να υπολογίσεις το εμβαδό ολόκληρου του τετραγώνου;

β. Με τα 14 κομμάτια του Στομαχίου μπορούν να σχηματιστούν διάφορες φιγούρες, όπως ελέφαντας. Μπορείς να υπολογίσεις το εμβαδό του ελέφαντα;



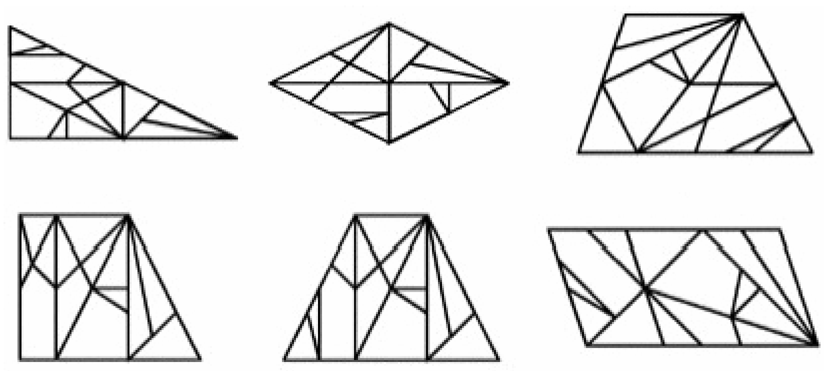
ΣΧΗΜΑ 6.4

γ. Μπορείς να σχηματίσεις άλλες φιγούρες και να υπολογίσεις το εμβαδό τους;

δ. Μπορείς να υπολογίσεις το εμβαδό κάθε κομματιού στο αρχικό τετράγωνο με τη βοήθεια του τετραγωνισμένου χαρτιού;

Στην έκτη τάξη του δημοτικού στα κεφάλαια 61 «Μετρώ επιφάνειες», 62 «Βρίσκω το εμβαδό παραλληλογράμμου», 63 «Βρίσκω το εμβαδό τριγώνου», 64 «Βρίσκω το εμβαδό τραπεζίου» του σχολικού βιβλίου, θα μπορούσε επίσης να γίνει ως επαναληπτική η εξής δραστηριότητα:

Με τα 14 κομμάτια του Στομαχίου μπορούν να σχηματιστούν διάφορα σχήματα όπως τα παρακάτω:



ΣΧΗΜΑ 6.5

α. Ονόμασε κάθε ένα από τα παραπάνω σχήματα.
β. Μπορείς να σχηματίσεις με τα κομμάτια από το Στομάχιο τα παραπάνω σχήματα;
γ. Μπορείς να μετρήσεις με το χάρακά σου το ύψος και τη βάση σε κάθε ένα από αυτά και να υπολογίσεις το εμβαδόν του; Τι παρατηρείς; Πως το εξηγείς;

Σε όλες τις προηγούμενες δραστηριότητες, σε όλες τις τάξεις του δημοτικού, πρέπει να τονίσουμε ότι μεγάλη σημασία έχει η δυνατότητα που δίνει το Στομάχιον να χρησιμοποιηθεί ως χειραπτικό και εποπτικό υλικό, καθώς και η ιστορική του διαδρομή (ως παιχνίδι) η οποία θα πρέπει να έχει αναφερθεί στα παιδιά. Θα ήταν επιθυμητό να κατασκευαστεί από κάθε παιδί ένα ομοίωμα του Στομαχίου από σκληρό χαρτόνι, και ο δάσκαλος να παραπέμπει τα παιδιά σε αυτό όταν το κρίνει σκόπιμο.

Να σχολιάσουμε ότι και οι Persi Diaconis, Susan Holmes, Fan Chung και Ron Graham προσπαθώντας να καταλήξουν σε κάποιο αποτέλεσμα για το πλήθος των δυνατών διευθετήσεων των πολυγώνων εντός του αρχικού τετραγώνου, πέρασαν ατέλειωτες ώρες παίζοντας με τα κομμάτια ενός αληθινού παιχνιδιού Στομαχίου το οποίο είχαν παραγγείλει σε εργαστήριο κατασκευής puzzle (Chung, Graham, 2003).

6.2. Γυμνάσιο.

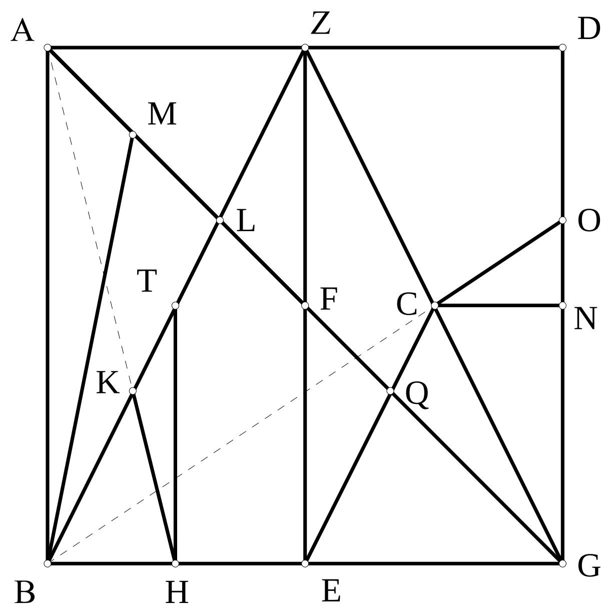
Στην α΄ γυμνασίου το Στομάχιον (ως σχήμα) μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα κεφάλαια 2 και 3 του Β΄ μέρους του σχολικού βιβλίου των Βανδουλάκη κ.α. (2007). Πλούσια πηγή ασκήσεων για παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη, για κατακορυφήν γωνίες, για κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου για ισοσκελή και ορθογώνια τρίγωνα.

Επίσης κατά τη διδασκαλία των κλασμάτων στο κεφάλαιο 2 του Α΄ μέρους, το αρχικό πρόβλημα που αναφέρεται στο αραβικό χειρόγραφο (να δειχθεί ότι το εμβαδό κάθε πολυγώνου είναι ένα κλάσμα του αρχικού τετραγώνου) θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως δραστηριότητα για το σπίτι. Βέβαια, ο υπολογισμός των εμβαδών θα πρέπει να γίνει με τη βοήθεια τετραγωνισμένου χαρτιού. Επίσης, θα μπορούσε μέσω ενός ιστορικού σημειώματος να γίνει και κάποια συσχέτιση του περιεχομένου αυτού του κεφαλαίου (κλάσματα) με την εισαγωγική του διακοσμητική εικόνα (σελ.33) που είναι κομμάτι του ψηφιδωτού που αναφέρουμε στη παράγραφο 1.6 της παρούσας εργασίας.

Στην β΄ γυμνασίου το Στομάχιον μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως σχήμα αναφοράς για διάφορες συνδυαστικές ασκήσεις. Συνδυάζοντας από το Β΄ μέρος το κεφάλαιο 1 (Εμβαδά επίπεδων σχημάτων - Πυθαγόρειο θεώρημα) και το κεφάλαιο 2 (Τριγωνομετρία - Διανύσματα) με το κεφάλαιο 2 (Πραγματικοί αριθμοί) του μέρους Α΄ του σχολικού βιβλίου των Βλάμου κ.α. (2007).

Στα *Μαθηματικά* της γ΄ γυμνασίου των Αργυράκη κ.α. (2007) το Στομάχιον μπορεί να ενταχθεί ως θέμα από την ιστορία των μαθηματικών και ομαδική, εργασία για τους μαθητές μετά το τέλος του κεφαλαίου 1, από το μέρος Β΄. Παραθέτουμε μια πιθανή μορφή μιας τέτοιας εργασίας με ένα μεγάλο αριθμό ερωτημάτων (ασκήσεων) τα οποία δεν χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν όλα :

Το μαθηματικό παιχνίδι Στομάχιον παίζεται με επίπεδα πολυγωνικά πλακίδια, τα οποία έχουν προκύψει από τον τεμαχισμό ενός τετραγώνου όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.



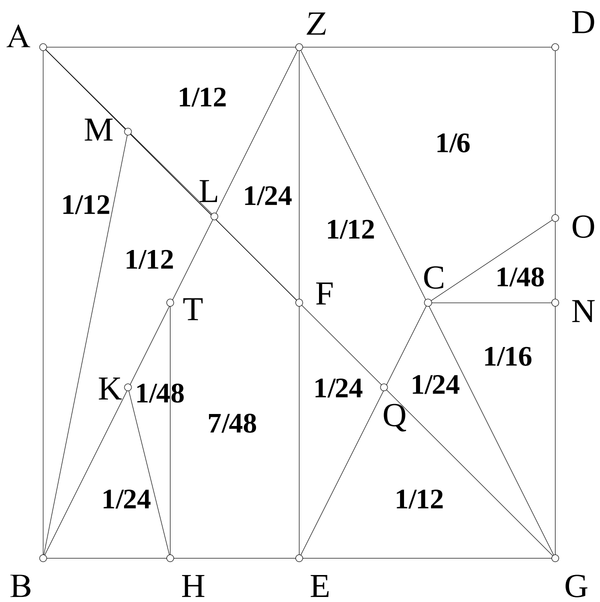
ΣΧΗΜΑ 6.6

Ο μεγαλύτερος μαθηματικός της αρχαιότητας ο Αρχιμήδης ο Συρακούσιος (περίπου 287-212 π.Χ.), έγραψε μια εργασία για το Στομάχιον, στην οποία μεταξύ άλλων αποδεικνύει ότι τα εμβαδά των επίπεδων πολυγωνικών χωρίων σχηματίζουν ρητό λόγο σε σχέση με το εμβαδό ολόκληρου του τετραγώνου.

- ✓ Βρείτε πληροφορίες (είτε μέσω διαδικτύου, είτε από βιβλιοθήκες) για τον Αρχιμήδη και για το Στομάχιον.

- ✓ Μπορείτε βασιζόμενοι στο σχήμα να περιγράψετε τη διαδικασία κατασκευής του; (Εναλλακτικά, μπορεί να μην δοθεί το σχήμα αλλά να δοθεί το μεταφρασμένο αραβικό απόσπασμα και να ζητάμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν το σχήμα).
- ✓ Μπορείτε να δείξετε ότι τα τρίγωνα AZF και EGF είναι ίσα;
- ✓ Δείξτε ότι τα τρίγωνα ZDG και CNG είναι όμοια. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητάς τους; Ποιος είναι ο λόγος των εμβαδών τους; Υπολογίστε τους λόγους $\frac{\text{εμβ(ZDG)}}{\text{εμβ(ABGD)}}$ και $\frac{\text{εμβ(CNG)}}{\text{εμβ(ABGD)}}$.
- ✓ Δείξτε ότι τα τρίγωνα OCN και OBG είναι όμοια. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητάς τους; Υπολογίστε τους λόγους των ευθύγραμμων τμημάτων $\frac{ON}{OG}$ και $\frac{ON}{NG}$. Μπορείτε να υπολογίσετε τους λόγους των εμβαδών $\frac{\text{εμβ(OCN)}}{\text{εμβ(GCN)}}$ και $\frac{\text{εμβ(OCN)}}{\text{εμβ(ABGD)}}$;
- ✓ Πως μπορείτε να υπολογίσετε το λόγο $\frac{\text{εμβ(OCZD)}}{\text{εμβ(ABGD)}}$;
- ✓ Δείξτε ότι $\text{εμβ(ZFG)} = \text{εμβ(EFG)}$. Υπολογίστε τον λόγο $\frac{\text{εμβ(EFG)}}{\text{εμβ(ABGD)}}$.
- ✓ Εξηγήστε γιατί $BZ // EC$. Δικαιολογήστε γιατί $AL = LQ = QG$.
- ✓ Υπολογίστε το λόγο $\frac{FQ}{QG}$ και στη συνέχεια το λόγο $\frac{\text{εμβ(EFQ)}}{\text{εμβ(EQG)}}$.
- ✓ Δικαιολογήστε γιατί $\text{εμβ(CQG)} = \text{εμβ(EFQ)}$ και στη συνέχεια υπολογίστε τους λόγους $\frac{\text{εμβ(EFQ)}}{\text{εμβ(ABGD)}}$, $\frac{\text{εμβ(CQG)}}{\text{εμβ(ABGD)}}$, $\frac{\text{εμβ(EQG)}}{\text{εμβ(ABGD)}}$, $\frac{\text{εμβ(ZFQC)}}{\text{εμβ(ABGD)}}$.

- ✓ Μπορείτε να δικαιολογήσετε ότι τα τρίγωνα ABK και TKH είναι όμοια; Βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. Υπολογίστε τους λόγους $\frac{KT}{KB}$ και $\frac{εμβ(KHT)}{εμβ(BKH)}$. Δικαιολογήστε γιατί τα τρίγωνα BHT και CNG είναι ίσα και υπολογίστε τους λόγους $\frac{εμβ(BKH)}{εμβ(ABGD)}$, $\frac{εμβ(KHT)}{εμβ(ABGD)}$.
- ✓ Δείξτε ότι τα τρίγωνα ALB και ZLF είναι όμοια. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας τους; Ποιος είναι ο λόγος των εμβαδών τους;
- ✓ Δείξτε ότι τα τρίγωνα ABM και MBL είναι ισοεμβαδικά και υπολογίστε τους λόγους $\frac{εμβ(ABL)}{εμβ(ABGD)}$, $\frac{εμβ(ABM)}{εμβ(ABGD)}$.
- ✓ Υπολογίστε το λόγο $\frac{εμβ(HEFLT)}{εμβ(ABGD)}$.
- ✓ Ο Αρχιμήδης υπολόγισε ότι τα εμβαδά των επίπεδων πολυγωνικών χωρίων σε σχέση με το εμβαδό ολόκληρου του τετραγώνου σχηματίζουν τους εξής λόγους:



ΣΧΗΜΑ 6.7

Συμφωνείτε μαζί του; Ελέγξτε τα αποτελέσματά σας.

Τονίζουμε ότι τα ερωτήματα δεν χρειάζεται να τεθούν όλα, ούτε και σε αυτήν ακριβώς τη μορφή. Στόχος μας είναι να δώσουμε ιδέες για το πώς μπορούν να σχεδιαστούν ασκήσεις, εργασίες, δραστηριότητες (εντός ή εκτός τάξης), βασιζόμενοι σε ένα θέμα από την ιστορία των μαθηματικών.

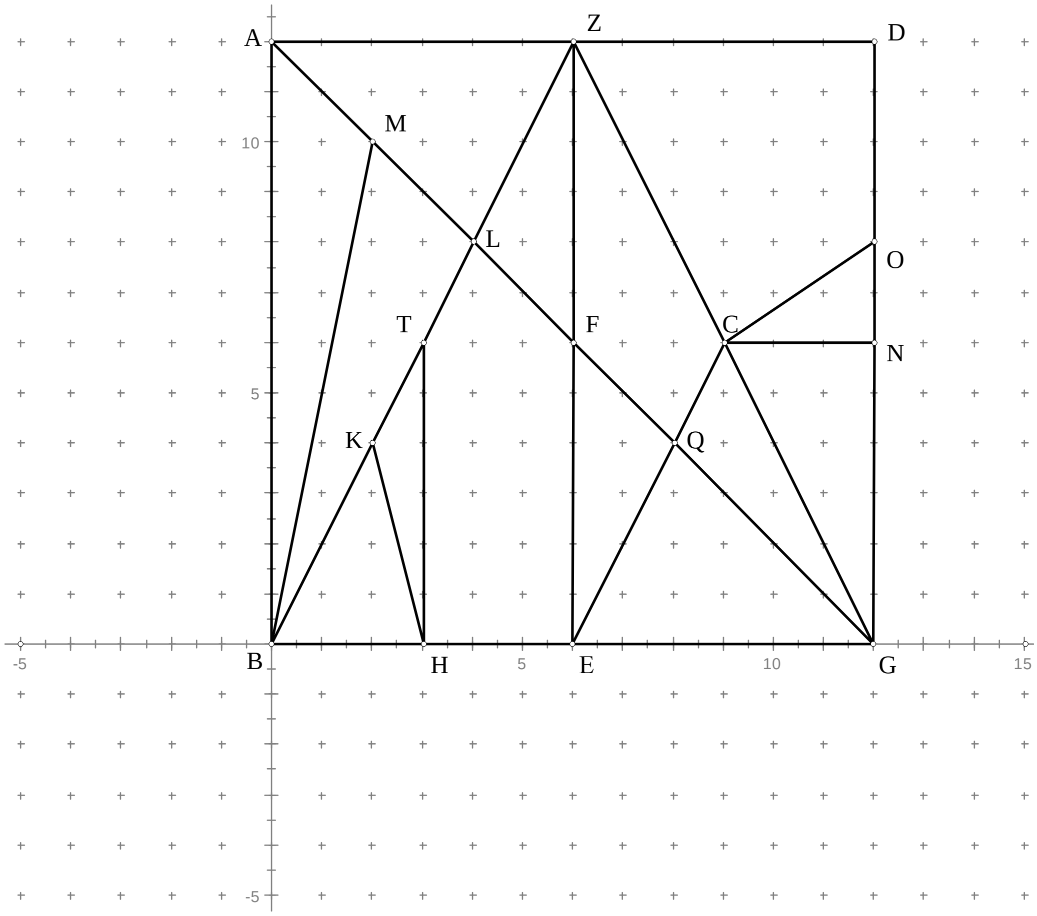
6.3. Λύκειο.

Στις τάξεις α΄ και β΄ λυκείου στο μάθημα της γεωμετρίας, η προηγούμενη εργασία με τα ίδια ή/και διαφορετικά ερωτήματα μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα κεφάλαια με την αντίστοιχη ύλη. Επιπλέον, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η πρώτη πρόταση από το ελληνικό χειρόγραφο σαν άσκηση, στη παράγραφο (3.11) που αφορά τις ανισωτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών τριγώνου στο σχολικό βιβλίο των Αργυρόπουλου κ.α. (2005).

Μια άλλη ενδιαφέρουσα εργασία (στην ύλη της ευκλείδειας γεωμετρίας) με χρήση του πρωτότυπου κειμένου του Στομαχίου είναι η εξής: δίνεται ολόκληρο ή απόσπασμα από το κείμενο του Στομαχίου και ζητάμε από τους μαθητές να προσδιορίσουν ποιες προτάσεις των *Στοιχείων* του Ευκλείδη κάθε φορά χρησιμοποιεί ο Αρχιμήδης για τις επιμέρους συνεπαγωγές που κάνει. Κάτι αντίστοιχο κάναμε και εμείς στην παρούσα εργασία, βάζοντας σε παρένθεση τις προτάσεις οι οποίες χρησιμοποιούνται χωρίς ρητά να δηλώνονται.

Τέλος, να αναφέρουμε ότι μια πρόταση για μια συνθετική εργασία πάνω στο ¨Στομάχιο¨ του Αρχιμήδη μπορεί να βρει κάποιος στο βιβλίο *Διδακτική της Ευκλείδειας γεωμετρίας* των Θωμαϊδη, Πούλου (2000) στη σελίδα 316.

Κλείνοντας αυτή την παράγραφο θα δώσουμε κάποιες ιδέες και σκέψεις για διδακτική αξιοποίηση του Στομαχίου στα πλαίσια του μαθήματος της άλγεβρας (α΄ λυκείου) και της αναλυτικής γεωμετρίας (μαθηματικά κατεύθυνσης β΄ λυκείου). Σε αυτή την περίπτωση μετά την παρουσίαση των ιστορικών στοιχείων που αφορούν το Στομάχιον θα πρέπει να τοποθετήσουμε το σχήμα Στομάχιον σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Για απλοποίηση των υπολογισμών και των αριθμητικών δεδομένων θα πρέπει να τοποθετήσουμε τις κορυφές του τετραγώνου στα σημεία (0,0), (12,0), (12, 12), (0,12) όπως στο παρακάτω σχήμα (**ΣΧΗΜΑ 6.8**).



ΣΧΗΜΑ 6.8

Εκκινώντας από αυτό το σχήμα μπορούμε να ζητήσουμε:

- ✓ συντεταγμένες διανυσμάτων που τα άκρα τους είναι σημεία του σχήματος,
- ✓ σχέσεις ανάμεσα σε αυτά τα διανύσματα,
- ✓ υπολογισμό εσωτερικών γινομένων,
- ✓ τις εξισώσεις διαφόρων ευθειών που εμφανίζονται στο σχήμα καθώς και περιορισμούς (ανισωτικές σχέσεις) που να καθιστούν τις προηγούμενες ευθείες ευθύγραμμα τμήματα,
- ✓ υπολογισμό εμβαδών.

Θα μπορούσε, επίσης, να μη δοθεί ολόκληρο το σχήμα παρά μόνο το εξωτερικό τετράγωνο με κορυφές του τα σημεία (0,0), (12,0), (12, 12), (0,12) και το κείμενο που περιγράφει την κατασκευή του Στομαχίου. Στη συνέχεια, να ζητηθεί από τους μαθητές να ακολουθούν το κείμενο και να βρίσκουν με τη βοήθεια της αναλυτικής γεωμετρίας τις εξισώσεις των πλευρών των πολυγώνων που αποτελούν το Στομάχιον καθώς και τα σημεία τομής τους.

Προφανώς όλες οι προηγούμενες προτάσεις είναι ενδεικτικές και ο κάθε διδάσκων τις προσαρμόζει και τις τροποποιεί ώστε να καλύψουν τις ανάγκες του δικού του μαθήματος.

Επίλογος

Η εργασία προσπάθησε:

i. Να παρουσιάσει αναλυτικά μια από τις θεωρούμενες λιγότερο σημαντικές πραγματείες του Αρχιμήδη, το ¨Στομάχιον¨. Το γεγονός ότι το ¨Στομάχιον¨ χαρακτηρίζεται από αρκετούς μελετητές ως λιγότερο σημαντικό από άλλες πραγματείες του Αρχιμήδη έχει να κάνει με την έλλειψη στοιχείων για αυτή. Τα σωζόμενα αποσπάσματα, ένα αραβικό και ένα ελληνικό, δεν είναι αρκετά για να καταλάβουμε με βεβαιότητα το είδος της μαθηματικής διερεύνησης που ο Αρχιμήδης αναπτύσσει. Παρόλα αυτά, πρόσφατα κάποιοι ερευνητές (Netz, Accerbi, Wilson) διατύπωσαν την εικασία ότι το ¨Στομάχιον¨ αποτελεί μια πραγματεία συνδυαστικής ανάλυσης. Προκειμένου, λοιπόν, να κατανοήσουμε όσο το δυνατόν καλύτερα το πλαίσιο στο οποίο δημιουργήθηκε η συγκεκριμένη πραγματεία, παρουσιάσαμε συνοπτικά τη ζωή και το έργο του Αρχιμήδη, αναφέραμε διάφορες πηγές οι οποίες μας δίνουν πληροφορίες για το ¨Στομάχιον¨ και εξετάσαμε τα δυο σωζόμενα αποσπάσματα. Επιπλέον, εξετάσαμε την άποψη ότι οι αρχαίοι Έλληνες είχαν γνώσεις συνδυαστικής και πιθανά διέθεταν μη τετριμμένες μεθόδους απαρίθμησης και καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι οι υπάρχουσες πηγές υποστηρίζουν ισχυρά ένα τέτοιο ενδεχόμενο. Αυτό βέβαια, δε συνεπάγεται αυτόματα ότι το ¨Στομάχιον¨ είναι μια πραγματεία συνδυαστικής. Γι΄ αυτό, προσπαθήσαμε να περιγράψουμε, όσο το δυνατόν πληρέστερα, τους υπολογισμούς και την ταξινόμηση, που έγιναν από επιστήμονες της συνδυαστικής, όλων των δυνατών διευθετήσεων των 14 πολυγώνων του ¨Στομαχίου¨. Οι προηγούμενοι υπολογισμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εικασία για τον τρόπο με τον οποίο δούλεψε ο Αρχιμήδης. Κατά την άποψη μας η προηγούμενη εικασία δεν είναι πειστική, ενώ συμφωνούμε με την άποψη του Dijksterhuis ότι δεν μπορούμε να βγάλουμε ένα ασφαλές συμπέρασμα για το μαθηματικό περιεχόμενο του ¨Στομαχίου¨ με τα διαθέσιμα στοιχεία.

ii. Να παρουσιάσει το θεώρημα του Pick ιδωμένο από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών. Το θεώρημα του Pick έχει χαρακτηριστεί από πολλούς ως ¨στολίδι¨ των μαθηματικών γιατί με τα πλέον απλά μαθηματικά εργαλεία πετυχαίνει ένα απρόσμενο και κομψό αποτέλεσμα. Η εφαρμογή του θεωρήματος του Pick μπορεί να γίνει κατανοητή και από κάποιον μαθητή του δημοτικού, όμως η απόδειξή του περιέχει σημαντικές μαθηματικές ιδέες και οι δυνατές προεκτάσεις του είναι αρκετά δύσκολες και μπορούν να οδηγήσουν σε διάφορους τομείς των ανώτερων μαθηματικών. Εμείς δεν ασχοληθήκαμε με τις προεκτάσεις του θεωρήματος του Pick, οι οποίες θα μπορούσε να είναι θέμα για κάποια άλλη διπλωματική εργασία, αλλά δώσαμε τρεις διαφορετικές αποδείξεις του θεωρήματος οι οποίες πιστεύουμε ότι περιέχουν σημαντικές μαθηματικές ιδέες και μεθόδους.

iii. Να συνδέσει την πραγματεία του Αρχιμήδη ¨Στομάχιον¨ με το θεώρημα του Pick. Η μεταξύ τους σύνδεση στηρίχθηκε σε δυο άξονες:

- ✓ Ο πρώτος είναι ο υπολογισμός των εμβαδών των 14 πολυγώνων, που απαρτίζουν το ¨Στομάχιον¨, με εφαρμογή του θεωρήματος του Pick. Αυτό επιτυγχάνεται ¨τοποθετώντας¨ το Στομάχιον σε ένα πλέγμα, ώστε τα 14 πολύγωνα να γίνουν πολύγωνα πλέγματος (lattice polygons) και στη συνέχεια με εφαρμογή σε αυτά του θεωρήματος του Pick. Ο πιο βολικός τρόπος να γίνει αυτό είναι η τοποθέτηση του αρχικού τετραγώνου (όπως αυτό περιγράφεται στο αραβικό χειρόγραφο) σε ένα πλέγμα διαστάσεων 12×12.

- ✓ Ο δεύτερος άξονας είναι η ανάδειξη του γεγονότος ότι δύο ζητήματα (το ¨Στομάχιον¨ και το θεώρημα του Pick) τα οποία αρχικά φαίνονται να αφορούν τη γεωμετρία και συγκεκριμένα τον υπολογισμό εμβαδού, μπορούν να ειδωθούν ως ζητήματα της συνδυαστικής ανάλυσης. Στην περίπτωση του ¨Στομαχίου¨ ζητούμενο είναι η απαρίθμηση όλων των δυνατών διευθετήσεων των 14 πολυγώνων εντός του αρχικού τετραγώνου. Στην περίπτωση του θεωρήματος του Pick το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός όλων των πρωταρχικών τριγώνων (primitive triangles) σε μια πλήρη τριγωνοποίηση ενός πολυγώνου πλέγματος.

Η σχέση του ¨Στομαχίου¨ με τη γεωμετρία πλέγματος πιθανά είναι πιο βαθιά και θα άξιζε να διερευνηθεί. Αυτό προκύπτει από το αξιοσημείωτο γεγονός ότι με οποιονδήποτε τρόπο και να διευθετήσουμε τα πολύγωνα εντός του αρχικού τετραγώνου (από τους 536 διαφορετικούς που υπάρχουν) τα ¨πλακίδια¨ του ¨Στομαχίου¨ πάντα παραμένουν πολύγωνα πλέγματος, δηλαδή πάντα οι κορυφές τους έχουν ακέραιες συντεταγμένες. Το γεγονός αυτό το παρατήρησε και το επιβεβαίωσε ο Bill Cutler από τις λύσεις που έδωσε ο υπολογιστής. Κάτι τέτοιο, όμως, δεν ισχύει για όλες τις πιθανές υποδιαιρέσεις του τετραγώνου σε πολύγωνα πλέγματος. Έχει ενδιαφέρον, λοιπόν, να αναρωτηθούμε τι είδους ιδιότητες έχουν τα πολύγωνα που απαρτίζουν το ¨Στομάχιον¨ ώστε να ισχύει κάτι τέτοιο.

iv. Να καταγράψει ιδέες και σκέψεις για διδακτική αξιοποίηση του ¨Στομαχίου¨, τόσο ως θέμα από την ιστορία των μαθηματικών, όσο και ως σχήμα, στη πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Αναφορές

[1] Αθανασιάδης Α. Χρήστος, (2007). *Διακριτά μαθηματικά*. Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα http://users.uoa.gr/~caath/

[2] Αθανασιάδης Α. Χρήστος, (2009). *Αλγεβρική και Απαριθμητική Συνδυαστική*, τόμος Α. Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα http://users.uoa.gr/~caath/

[3] Αργυράκης Δ., Βουργάνας Π., Μεντής Κ., Τσικοπούλου Σ., Χρυσοβέργης Μ., (2007). *Μαθηματικά* Γ΄ Γυμνασίου. Ο.Ε.Δ.Β.

[4] Αργυρόπουλος Η., Βλάμος Π., Κατσούλης Γ., Μαρκάτης Σ., Σιδέρης Π., (2005). *Ευκλείδεια Γεωμετρία*. Ο.Ε.Δ.Β.

[5] Βαμβακούση Ξ., Καργιωτάκης Γ., Μπομποτίνου Α., Σαΐτης Α., (2007). *Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού*, βιβλίο δασκάλου. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

[6] Βανδουλάκης Ι., Καλλιγάς Χ., Μαρκάκης Ν., Φερεντίνος Σ., (2007). *Μαθηματικά* Α΄ Γυμνασίου. Ο.Ε.Δ.Β.

[7] Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ., Ρεκούμης Κ., (2007). *Μαθηματικά* Β΄ Γυμνασίου. Ο.Ε.Δ.Β

[8] Γαβρόγλου Κ., Διαλέτης Δ., Χριστιανίδης Γ., (2001). Αρίσταρχος και ηλιοκεντρισμός. *Νεύσις*, τεύχος 10.

[9] Θωμαΐδης Γ., Πούλος Α., (2000). *Διδακτική της Ευκλείδειας γεωμετρίας*. Εκδόσεις ΖΗΤΗ.

[10] Κακαδιάρης Χ., Μπελίτσου Ν., Στεφανίδης Γ., Χρονοπούλου Γ., (2007). *Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού*, βιβλίο δασκάλου. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

[11] Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.(Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης), (2001). *Ευκλείδη ¨Στοιχεία¨*. 3 τόμοι. Αθήνα 2001.

[12] Πλούταρχος. *Βίοι Παράλληλοι, Πελοπίδας- Μάρκελλος*. Τόμος 8, εκδόσεις ΚΑΚΤΟΣ, (1992).

[13] Πλούταρχος. *Ηθικά, Περί Στωικών εναντιωμάτων*. Τόμος 27, εκδόσεις ΚΑΚΤΟΣ, (1996).

[14] Σταμάτης, Ε., (1970). *Αρχιμήδους Άπαντα*. Τόμος Α, μέρος Α. Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδος, Αθήνα.

[15] Σταμάτης, Ε., (1970). *Αρχιμήδους Άπαντα*. Τόμος Α, μέρος Β. Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδος, Αθήνα.

[16] Σταμάτης, Ε., (1974). *Αρχιμήδους Άπαντα*. Τόμος Β. Έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδος, Αθήνα.

[17] Σταμάτης, Ε. (1975). *Ευκλείδου Γεωμετρία. Στοιχεία*. (3 τόμοι). Οργανισμός εκδόσεως διδακτικών βιβλίων, Αθήνα.

[18] Τζέτζης Ιωάννης, (1826). *Βιβλίον Ιστορικής της δια στίχων πολιτικών*. CHILIADES. Theophilus Kiesslingius, Lipsiae.

[19] Χριστιανίδης Γιάννης, (2008). *Θέματα από την ιστορία των μαθηματικών*. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 2η έκδοση, Ηράκλειο.

[20] Χριστιανίδης Γιάννης, (2006). *Το Στομάχιον του Αρχιμήδη*. Ένθετο με το περιοδικό GEO, τεύχος 8, 2006.

[21] F. Acerbi, (2003). On the shoulders of Hipparchus. *Archive for History of Exact Sciences* **57**, pp.465-502.

[22] Bell E.T., (1998). *Οι μαθηματικοί*. Τόμος Ι. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 3η έκδοση, Ηράκλειο.

[23] Biggs, N.L., (1979). The roots of combinatorics. *Historia Mathematica* 6, pp. 109-136.

[24] Bóna Miklós (2006). *A walk through combinatorics*. World Scientific (second edition).

[25] Boyer, C.B.- Merzbach, U.C., (1997). *Η ιστορία των μαθηματικών*. Εκδόσεις Πνευματικός, Αθήνα.

[26] Fan Chung, Ron Graham, (2003). A tour of Archimedes's Stomachion. http://www.math.ucsd.edu/~fan/stomach/

[27] Dijksterhuis, E.J. (1987). *Archimedes*. Princeton university press.

[28] Gaskell R.W., M.S. Klamkin, P. Watson, (1976). Triangulations and Pick's theorem. *Mathematics magazine*, *vol.49*, No.1, pp 35-37.

[29] Grünbaum B., Shephard G.C., (1993). Pick's theorem. *The American Mathematical Monthly*, vol.100, No.2, pp.150-161.

[30] Laurent Habsieger, Maxim Kazarian, Sergei Lando, (1998). On the second number of Plutarch. *The American Mathematical Monthly*, vol.105, No.5, p446.

[31] Hardy G.H., Wright E.M., (1975). *An introduction to the theory of numbers*. (Fourth edition 1960, with corrections), Oxford University Press.

[32] Heath, T.L., (1897). *The works of Archimedes*. Cambridge university press.

[33] Heath, T.L., (1956). *Euclid. The thirteen books of the elements.Vol*.2. Dover publications, New York. (Unabridged edition from second edition (1925) Cambridge university press).

[34] Heath, T.L., (2001). *Ιστορία των Ελληνικών μαθηματικών*. Τόμος ΙΙ, (μετάφραση από την αρχική έκδοση του 1921). Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.(Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης).

[35] Howard Eves, (1963). *A Survey of Geometry, vol.1*. Allyn and Bacon, Boston.

[36] Howard Eves, (1969). *An introduction to the history of mathematics*. 3rd edition, Holt, Rinehart and Winston, inc.

[37] J.J. O'Connor and E.F. Robertson, (2005). Άρθρο διαθέσιμο στην ιστοσελίδα: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pick.html

[38] J.J. O'Connor and E.F. Robertson, (2009). Άρθρο διαθέσιμο στην ιστοσελίδα: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Schroder.html

[39] Ivan Niven and H.S. Zuckerman, (1967). Lattice points and polygonal area. *The American Mathematical Monthly*, vol.74, No.10, pp 1195-1200.

[40] Netz Reviel, Noel William, (2007). *Ο κώδικας του Αρχιμήδη*. Εκδόσεις Αλεξάνδρεια, Αθήνα.

[41] Netz Reviel, Acerbi Fabio, Wilson Nigel, (2004). Towards a reconstruction of Archimedes' stomachion. *Sciamus 5*, pp.67-99.

[42] Polybius, Historiae, TLG.

[43] Plutarchus, De stoicorum repugnatiis, TLG.

[44] Richard P. Stanley, (1986). *Enumerative combinatorics*, vol.1, Wadsworth & Brooks; second printing, Cambridge University Press, 1996.

[45] Richard P. Stanley, (1997). Hipparchus, Plutarch, Schröder and Hough. *The American Mathematical Monthly*, vol.104, No. 4, pp 344-350.

[46] J.H. van Lint, R.M. Wilson, (1992). *A Course in Combinatorics*. Cambridge University Press (reprinted 1994, 1996).

[47] Van der Waerden B.L.,(2003). *Η αφύπνιση της επιστήμης*. Μετάφραση-επιστημονική επιμέλεια Γιάννης Χριστιανίδης. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 2η έκδοση, Ηράκλειο.

[48] Dale E. Varberg, (1985). Pick's Theorem Revisited. *The American mathematical Monthly*, vol.92, No.8, pp584-587.