Διακριτά Μαθηματικά (9ρ)

Άσκηση (από την εργασία)

Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό απλό γράφημα δεσμών με $|V| > |E|$. Να δειχθεί ότι υπάρχει κόμβος βαθμού 1.

κορυφές

δεσμοί

Λύση: Αφού το G είναι συνεκτικό ισχύει ότι

$$d(v) \geq 1 \text{ για κάθε } v \in V$$

Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει $v \in V$ με $d(v) = 1$, τότε

$$d(v) \geq 2 \text{ για κάθε } v \in V$$

Άρα,

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V| > 2|E| \text{ , άτοπο}$$

αφού σε κάθε γράφημα $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$

Βασικά συνδυαστικά / αλγοριθμικά προβλήματα

Έστω X ένα σύνολο (συνδυαστικών) αντικειμένων

1. Πόσα στοιχεία έχει το X; (πρόβλημα απαρίθμησης)
2. Ποια είναι τα στοιχεία του X; (πρόβλημα κατασκευής)
3. Να δοθεί ένα τυχαίο στοιχείο του X (πρόβλημα της τυχαίας επιλογής)

Βασικά συνδυαστικά αντικείμενα

Σύνολα

		$n=5$	$k=2$
Υποσύνολα του $[n]$	2^n	$\{1,2,5\}$,	$\{2,3\}$
κ-υποσύνολα του $[n]$	$\binom{n}{k}$	$\{2,3\}$,	$\{1,3\}$, ...

Μεταθέσεις του [n]	$n!$	13425
Μεταθέσεις του [n] με κ κύκλους	$\lvert s(n,k) \rvert$ Stirling πρώτου είδους	(14)(532)
Διαμερίσεις του [n]	Αριθμοί Bell	$\{\{1\},\{2,5\},\{3,4\}\}$
Διαμερίσεις του [n] σε κ σύνολα	$\bar{S}(n,k)$ Stirling δεύτερου είδους	$\{\{1,5\},\{2,3,4\}\}$

Αριθμοί

Διαμερίσεις του n (χωρίς σειρά)	$p(n)$	$5 = 4+1 = 3+2 = 2+2$
Διαμερίσεις του n σε κ μέρη (χωρίς σειρά)		$5 = 4+1 = 3+2$
Διαμερίσεις του n (με σειρά)	2^{n-1}	$5 = 2+2+1 = 2+1+2 = 1+2+2$
Διαμερίσεις του n σε κ μέρη (με σειρά)	$\binom{n-1}{k-1}$	$5 = 3+2 = 2+3 = 4+1 = 1+4$

Δένδρα

Δυαδικά δένδρα με n κόμβους	$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$	αριθμοί Catalan	
Διατεταγμένα δένδρα με n δεσμούς	$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$		

Τρόποι κατασκευής

Υπάρχουν 2 γενικές μέθοδοι
Βασίζονται στην εύρεση κατάλληλης αναπαράστασης των αντικειμένων

π.χ. Υποσύνολα του [5]

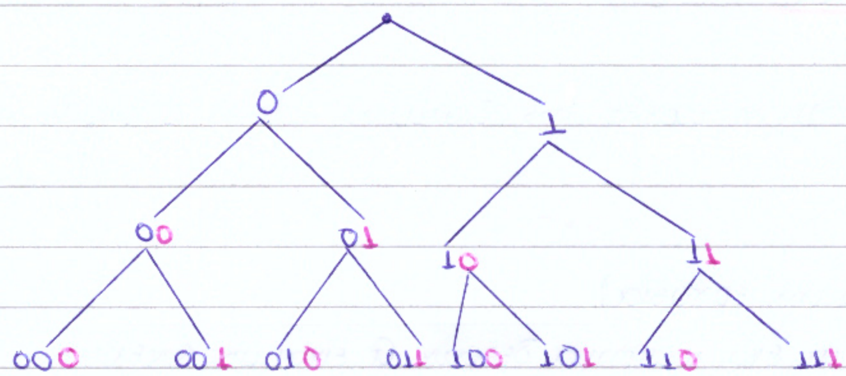
{1, 3, 5}

10101

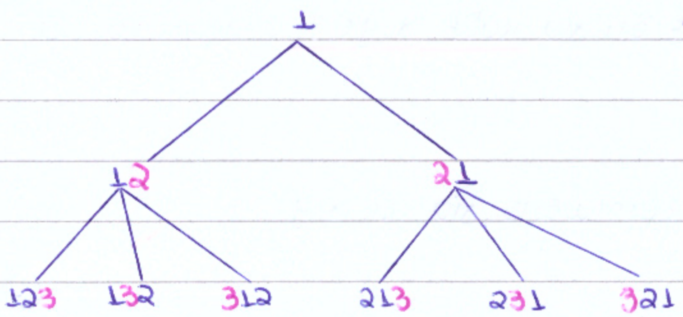
① Αναδρομική κατασκευή

Συνήθως κάθε αντικείμενο έχει κάποιο "μέγεθος" ή "μήκος"

Δυαδικές λέξεις μήκους 3



Μεταθέσεις του [3]



Στην αναδρομική μέθοδο κατασκευάζουμε αντικείμενα μεγέθους n από αντικείμενα με μικρότερο μέγεθος.

② Λεξικογραφική κατασκευή

Ορίζουμε μια (ολική) διάταξη στο σύνολο των αντικειμένων "μεγέθους" n. Αρχίζουμε από το ελάχιστο στοιχείο της διάταξης. Κάθε φορά βρίσκουμε το αμέσως μεγαλύτερο σταχείο στη διάταξη (επόμενο στοιχείο). Σταματάμε όταν φτάσουμε στο μέγιστο στοιχείο της διάταξης.

Πλεονεκτήματα

Μπορεί να ξεκινήσει από οποιοδήποτε στοιχείο. Μπορεί να γίνει παράλληλα. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή τυχαίων αντικειμένων

Μειονεκτήματα

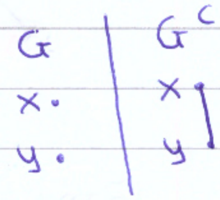
Σχετικά δύσκολη η εύρεση της διάταξης. Ίσως δύσκολη η εύρεση του επόμενου.

Άσκηση (από την εργασία)
Να δειχθεί ότι αν ένα γράφημα δεσμών G είναι μη συνεκτικό, τότε το συμπλήρωμά του είναι συνεκτικό.

Λύση: Θα δείξουμε ότι για κάθε $x, y \in V$ υπάρχει το G^c μονοπάτι που τους συνδέει

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις για τα x, y

① Τα x, y δεν συνδέονται στο G

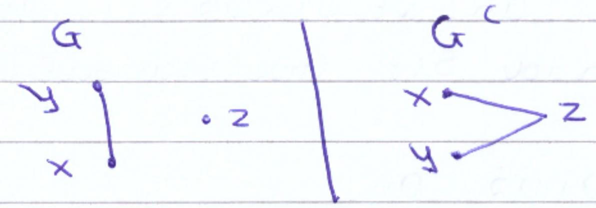


Άρα τα x, y θα συνδέονται στο G^c με δεσμό.

② Τα x,y συνδέονται στο G

Επειδή το G είναι μη συνεκτικό, υπάρχει κορυφή $z \in V$ η οποία δεν συνδέεται ούτε με το x, ούτε με το y

Άρα η z θα συνδέεται στο G^c και με τη x και την y. Άρα θα υπάρχει το μονοπάτι $x \to z \to y$



Λεξικογραφική κατασκευή των μεταθέσεων του $[n]$

Έστω $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n$ και $\tau = \tau_1\tau_2 \dots \tau_n \in S_n$

Η λεξικογραφική διάταξη στο S_n ορίζεται ως εξής

$$\sigma < \tau \iff \begin{cases} \text{υπάρχει } k \in \{1,2,\dots,n\} \text{ ώστε} \\ \sigma(i) = \tau(i) \text{ για κάθε } i = 1,2,\dots,k-1 \\ \text{και } \sigma(k) < \tau(k) \end{cases}$$

Παραδείγματα

- $\sigma = 1372564$ $\quad\quad$ $\tau = 1374256$

  $\sigma < \tau$ $\quad\quad$ $137|2564$

  $\quad\quad\quad\quad\quad\;$ $137|4256$

- $\pi = 2|673145$ $\quad\quad$ $\rho < \pi$

  $\rho = 2|154763$ $\quad\quad$ $\sigma < \pi$

Παρατηρήσεις

① Η διάταξη αυτή θα είναι ολική

② Το ελάχιστο στοιχείο του S_n (ως προς τη διάταξη) είναι η μετάθεση

$$123\ldots(n-2)(n-1)n$$

③ Το μέγιστο στοιχείο του S_n (ως προς τη διάταξη) είναι η μετάθεση

$$n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$$

④ Έστω $X=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ με $a_1<a_2<\ldots a_n$

Η ελάχιστη μετάθεση του $S(X)$ (που είναι συμβιβαστή με τη λεξικογραφική) είναι

$$a_1a_2\ldots a_n$$

και η μέγιστη

$$a_n\ldots a_2a_1$$

π.χ.

$n=5$	$n=6$
→ 12543	316425
→ 13245	316452

$n=7$	$n=8$
7625341	18546732
7625413	18547236

Λέμε ότι η μετάθεση $\sigma=\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ παρουσιάζει ανάβαση (ascent) στη θέση $j\in[n-1]$ αν

όταν αριστερά μεγαλύτερο από δεξιά

$$\sigma(j)<\sigma(j+1)$$

- Μια μετάθεση σ μπορεί να έχει πολλές αναβάσεις. Μετά την τελευταία ανάβαση της σ, τα υπόλοιπα στοιχεία είναι σε φθίνουσα σειρά.
- Αν η σ έχει ανάβαση στη θέση j υπάρχει $k\in\{j+1,\ldots,n\}$ με

$$\sigma(j)<\sigma(k)$$

Πρόταση

Έστω $σ = σ_1 σ_2 \ldots σ_n$ με τελευταία ανάβαση στη θέση j και

$$σ(k) = \min\{σ(j+1), σ(j+2), \ldots σ(n)\}$$

τα οποία είναι μεγαλύτερα από το $σ(j)$.

Τότε η επόμενη μετάθεση της $σ$ είναι η μετάθεση

$$σ_1 σ_2 \ldots σ_{j-1} σ_k σ_n σ_{n-1} \ldots σ_{k+1} σ_j σ_{k-1} \ldots σ_{j+2} σ_{j+1}$$

Με άλλα λόγια

Βρίσκουμε την τελευταία ανάβαση της $σ$ στη θέση j. Βρίσκουμε το ελάχιστο $σ_k$ που υπερβαίνει το $σ_j$. Εναλλάσουμε τα $σ_j, σ_k$. Αντιστρέφουμε τη σειρά των $σ_{j+1} σ_{j+2} \quad σ_{n-1} σ_n$.

Παράδειγμα

$n = 4$ # μεταθέσεων του [:] $= 4! = 24$

1234	3124
1243	3142
1324	3214
1342	3241
1423	3412
1432	3421
2134	4123
2143	4132
2314	4231
2341	4312
2413	4321
2431	

Σύμφωνα με την λεξικογραφική διάταξη κάθε μεταθετή σ του S_n έχει μια θέση στη διάταξη.

Ο αριθμός των μεταθέσεων του S_n προηγούνται (στη διάταξη) της $\sigma \in S_n$ ονομάζεται rank της σ και συμβολίζεται με $rank_n(\sigma)$ ή απλούστερα $rank(\sigma)$

Παραδείγματα

$rank(1234) = 0$

$rank(3124) = 12$

$rank(4321) = 23 = 4! - 1$

$rank(2134) = 6$

Πρόβλημα

Να υπολογισθεί το $rank(\sigma)$ χωρίς να κατασκευάσουμε άλλες μεταθέσεις.

Πρόταση

Έστω $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n$. Τότε ισχύει ότι $rank_1(1) = 0$.

$$rank_n(\sigma) = (\sigma_1 - 1)(n-1)! + rank_{n-1}(\sigma')$$

όπου $\sigma' = \sigma'_1\sigma'_2 \dots \sigma'_{n-1}$ η μετάθεση που προκύπτει απο τη σ διαγράφοντας το σ_1 και μειώνοντας κατά ένα όλα τα άλλα στοιχεία που είναι μεγαλύτερα από το σ_1.

π.χ.
$$\begin{aligned} rank_4(3124) &= (3-1)(4-1)! + rank_3(123) \\ &= 2 \cdot 3! + rank_3(123) \\ &= 2\cdot 3! + 0 \cdot 2! + rank_2(12) \\ &= 2\cdot 3! + 0\cdot 2! + 0 \cdot 1! + rank_1(1) \\ &= 2 \cdot 6 = 12 \end{aligned}$$

$rank_5(31542) = 2 \cdot 4! + rank_4(1432)$

$\sigma = 31542 \qquad \sigma' = 1542 \rightsquigarrow 1432$

Άρα

$$
\begin{aligned}
rank_5(31542) &= 2\cdot 4! + rank_4(1432) \\
&= 2\cdot 4! + 0\cdot 3! + rank_3(321) \\
&= 2\cdot 4! + 0\cdot 3! + 2\cdot 2! + 1\cdot 1! + rank_1(1) \\
&= 2\cdot 24 + 2\cdot 2 + 1 = 48 + 5 = 53
\end{aligned}
$$

Άσκηση

$$
\begin{aligned}
rank_6(432516) &= 3\cdot 5! + rank_5(32415) \\
&= 3\cdot 5! + 2\cdot 4! + rank_4(2314) \\
&= 3\cdot 5! + 2\cdot 4! + 1\cdot 3! + rank_3(213) \\
&= 3\cdot 5! + 2\cdot 4! + 3! + 2! + rank_2(12) \\
&= 3\cdot 5! + 2\cdot 4! + 3! + 2! + rank_1(1) \\
&= 3\cdot 120 + 2\cdot 24 + 6 + 2 \\
&= 360 + 48 + 6 + 2 \\
&= 416
\end{aligned}
$$

Αντίστροφο πρόβλημα

Δίνεται ένα $j \in \{0, 1, 2, \ldots, n!-1\}$
Να βρεθεί η $\sigma \in S_n$ με $rank(\sigma) = j$;

Η αντίστοιχη συνάρτηση ονομάζεται unrank: $\{0, 1, \ldots n!-1\} \to S_n$. Η συνάρτηση unrank βασίζεται στην ιδιότητα ότι κάθε φυσικός αριθμός $j \in \{0, \ldots, n!-1\}$ μπορεί να εκφραστεί κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$j = d_{n-1}(n-1)! + d_{n-2}(n-2)! + \ldots + d_3 3! + d_2 2! + d_1 1!$$

όπου $0 \leq d_i \leq i+1$ για κάθε i.

Αυτό το σύστημα αρίθμησης ονομάζεται παραγοντικό σύστημα αρίθμησης ή σύστημα αρίθμησης του Cantor.

Παράδειγμα

$j=53$

$$\begin{aligned} 53 &= 2\cdot 4! + 5 \\ &= 2\cdot 4! + 0\cdot 3! + 5 \\ &= 2\cdot 4! + 0\cdot 3! + 2\cdot 2! + 1 \\ &= \underset{d_4}{2}\cdot 4! + \underset{d_3}{0}\cdot 3! + \underset{d_2}{2}\cdot 2! + \underset{d_1}{1}\cdot 1! \end{aligned}$$

$j=160$

$$\begin{aligned} 160 &= 1\cdot 5! + 40 \\ &= 1\cdot 5! + 1\cdot 4! + 16 \\ &= 1\cdot 5! + 1\cdot 4! + 2\cdot 3! + 4 \\ &= \underset{d_5}{1}\cdot 5! + \underset{d_4}{1}\cdot 4! + \underset{d_3}{2}\cdot 3! + \underset{d_2}{2}\cdot 2! + \underset{d_1}{0}\cdot 1! \end{aligned}$$

Υπολογισμός της unrank

Έστω $j \in \{0, 1, \ldots, n!-1\}$

Αρχικά, βρίσκουμε την αναπαράσταση του j στο παραγοντικό σύστημα αρίθμησης, έστω ότι είναι η

$$d_{n-1} d_{n-2} \ldots d_3 d_2 d_1$$

Εργαζόμαστε αναδρομικά

Κατασκευάζουμε τη μετάθεση σ' του $[n-1]$ με rank

$$d_{n-2}(n-2)! + d_{n-3}(n-3)! + \ldots + d_2 2! + d_1 1!$$

και αυξάνουμε κατά 1 όλα τα στοιχεία της που είναι μεγαλύτερα από το d_{n-1}. Τέλος, το $d_{n-1}+1$ τίθεται ως πρώτο στοιχείο της σ.

Η μετάθεση με rank 0 είναι 1.

Παραδείγματα

- $j=63$ $\qquad 53 = \underset{d_4}{2}\cdot 4! + \underset{d_3}{0}\cdot 3! + \underset{d_2}{2}\cdot 2! + \underset{d_1}{1}\cdot 1!$

Θα ξεκινήσουμε από το τέλος προς την αρχή

$\sigma = 1$ $\qquad \sigma = 1432$

$\sigma = 21$ $\qquad \boxed{\sigma = 31542}$

$\sigma = 321$

- $j = 416$ $\qquad n = 6$

$$416 = \underset{d_5}{3}\cdot 5! + \underset{d_4}{2}\cdot 4! + \underset{d_3}{1}\cdot 3! + \underset{d_2}{1}\cdot 2! + \underset{d_1}{0}\cdot 1!$$

$\sigma = 1$ $\qquad \sigma = 32415$

$\sigma = 12$ $\qquad \sigma = 432516$

$\sigma = 213$

$\sigma = 2314$

- $n = 6$ $\qquad j = 300$

$$300 = 2\cdot 5! + 2\cdot 4! + 12$$
$$= \underset{\downarrow\, d_5}{2}\cdot 5! + \underset{\downarrow\, d_4}{2}\cdot 4! + \underset{\downarrow\, d_3}{2}\cdot 3! + \underset{\downarrow\, d_2}{0}\cdot 2! + \underset{\downarrow\, d_1}{0}\cdot 1!$$

$\sigma = 1$ $\qquad \sigma = 34125$

$\sigma = 12$ $\qquad \sigma = 345126$

$\sigma = 123$

$\sigma = 3124$