Συνάρτηση Grundy - Sprague

MEX

Έστω $A \subseteq N$.
Ορίζουμε το mex **(minimum excluded value)** του A ως εξής:

$$\operatorname{mex} A = \min N \setminus A,$$

δηλαδή $\operatorname{mex} A$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που δεν ανήκει στο A.

Παράδειγμα

- $\operatorname{mex}\{1, 2, 4\} = 0$
- $\operatorname{mex}\{0, 1, 2, 6\} = 3$
- $\operatorname{mex}\{0, 1, 2, 3\} = 4$
- $\operatorname{mex} \emptyset = 0$.

Σύνολο γειτονικών κορυφών

Για κάθε κορυφή v ενός γραφήματος τόξων $G = (X, U)$ ορίζουμε

$$\Gamma(v) = \{u \in X : (v, u) \in U\}$$

δηλαδή $\Gamma(v)$ είναι το σύνολο των κορυφών u που είναι άκρα τόξων με αρχή την κορυφή v (γείτονες της v).

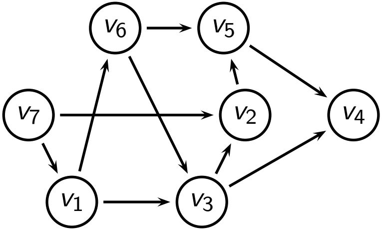
Σύνολο γειτονικών κορυφών

Για το γράφημα τόξων $G = (X, U)$ όπου $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ και

$$U = \{(v_1, v_3), (v_1, v_6), (v_2, v_5), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_4), (v_6, v_3), (v_6, v_5), (v_7, v_1), (v_7, v_2)\}.$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Gamma(v_1) &= \{v_3, v_6\} \\
\Gamma(v_2) &= \{v_5\} \\
\Gamma(v_3) &= \{v_2, v_4\} \\
\Gamma(v_4) &= \emptyset \\
\Gamma(v_5) &= \{v_4\} \\
\Gamma(v_6) &= \{v_3, v_5\} \\
\Gamma(v_7) &= \{v_1, v_2\}.
\end{aligned}$$



Συνάρτηση Grundy - Sprague

Για κάθε γράφημα τόξων $G = (X, U)$ **χωρίς κύκλους** ορίζεται μια (μοναδική) συνάρτηση $g : X \to \mathbb{N}$ με

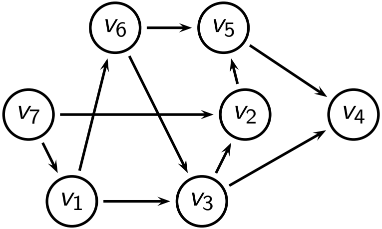
$$g(v) = \text{mex}\{g(u) : \text{ για κάθε } u \in \Gamma(v)\},$$

η οποία ονομάζεται **συνάρτηση Grundy - Sprague** του G.

$$g(v) = \text{mex}\{g(u) : \text{ για κάθε } u \in \Gamma(v)\},$$

Παράδειγμα Να βρεθούν οι τιμές της συνάρτησης g του γραφήματος τόξων (χωρίς κύκλους) G:

$$\Gamma(v_1) = \{v_3, v_6\}$$
$$\Gamma(v_2) = \{v_5\}$$
$$\Gamma(v_3) = \{v_2, v_4\}$$
$$\Gamma(v_4) = \emptyset$$
$$\Gamma(v_5) = \{v_4\}$$
$$\Gamma(v_6) = \{v_3, v_5\}$$
$$\Gamma(v_7) = \{v_1, v_2\}.$$



Συνάρτηση Grundy - Sprague

$$g(v) = \text{mex}\{g(u) :\ \text{για κάθε } u \in \Gamma(v)\},$$

Στόχος μας είναι να συμπληρώσουμε τις κενές θέσεις στον επόμενο πίνακα

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$g(v)$							

Συνάρτηση Grundy - Sprague

$$g(v) = \text{mex}\{g(u) : \text{ για κάθε } u \in \Gamma(v)\},$$

Έχουμε ότι

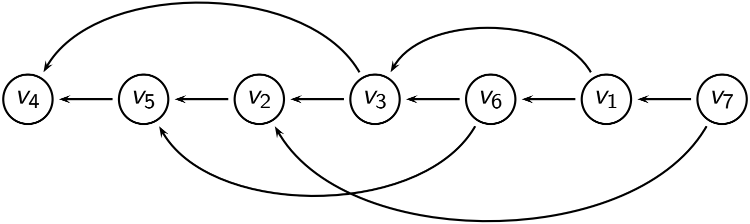
$$\begin{aligned}
\Gamma(v_1) &= \{v_3, v_6\} \\
\Gamma(v_2) &= \{v_5\} \\
\Gamma(v_3) &= \{v_2, v_4\} \\
\Gamma(v_4) &= \emptyset \\
\Gamma(v_5) &= \{v_4\} \\
\Gamma(v_6) &= \{v_3, v_5\} \\
\Gamma(v_7) &= \{v_1, v_2\}.
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
g(v_1) &= \text{mex}\{g(v_3), g(v_6)\} \\
g(v_2) &= \text{mex}\{g(v_5)\} \\
g(v_3) &= \text{mex}\{g(v_2), g(v_4)\} \\
g(v_4) &= \text{mex}\emptyset \\
g(v_5) &= \text{mex}\{g(v_4)\} \\
g(v_6) &= \text{mex}\{g(v_3), g(v_5)\} \\
g(v_7) &= \text{mex}\{g(v_1), g(v_2)\}.
\end{aligned}$$

Συνάρτηση Grundy - Sprague

Παρατηρούμε ότι:
Για να υπολογισθεί το $g(v_1)$ πρέπει να υπολογισθούν πρώτα τα $g(v_3)$, $g(v_6)$.
Για να υπολογισθεί το $g(v_2)$ πρέπει να υπολογισθεί πρώτα το $g(v_5)$,
Για να υπολογισθεί το $g(v_3)$ πρέπει να υπολογισθούν πρώτα τα $g(v_2)$, $g(v_4)$.
Για να υπολογισθεί το $g(v_5)$ πρέπει να υπολογισθεί πρώτα το $g(v_4)$,
Για να υπολογισθεί το $g(v_6)$ πρέπει να υπολογισθούν πρώτα τα $g(v_3)$, $g(v_5)$.
Για να υπολογισθεί το $g(v_7)$ πρέπει να υπολογισθούν πρώτα τα $g(v_1)$, $g(v_2)$.
Αντίθετα, για τον υπολογισμό του $g(v_4)$ δεν χρειάζονται άλλες τιμές της g και ισχύει ότι $g(v_4) = \mathrm{mex}\emptyset = 0$.
Οι προηγούμενοι περιορισμοί απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα



(από την κορυφή v_i ξεκινάει βέλος προς την κορυφή v_j αν ο υπολογισμός της $g(v_i)$ απαιτεί τον υπολογισμό της $g(v_j)$).
Αν υπολογίσουμε τις τιμές της συνάρτησης g με την σειρά

$$v_4, v_5, v_2, v_3, v_6, v_1, v_7$$

τότε σε κάθε βήμα οι τιμές της g που απαιτούνται έχουν υπολογισθεί σε κάποιο προηγούμενο βήμα.

Πράγματι, έχουμε τα εξής:

$$g(v_4) = \mathrm{mex}\emptyset = 0.$$

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$g(v)$				0			

$$g(v_5) = \mathrm{mex}\{g(v_4)\} = \mathrm{mex}\{0\} = 1.$$

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$g(v)$				0	1		

$$g(v_2) = \mathrm{mex}\{\mathrm{g(v_5)}\} = \mathrm{mex}\{1\} = 0.$$

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$g(v)$		0		0	1		

Συνάρτηση Grundy - Sprague

$$g(v_3) = \mathrm{mex}\{g(v_2), g(v_4)\} = \mathrm{mex}\{0, 0\} = \mathrm{mex}\{0\} = 1.$$

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$g(v)$		0	1	0	1		

$$g(v_6) = \mathrm{mex}\{g(v_3), g(v_5)\} = \mathrm{mex}\{1, 1\} = \mathrm{mex}\{1\} = 0.$$

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$g(v)$		0	1	0	1	0	

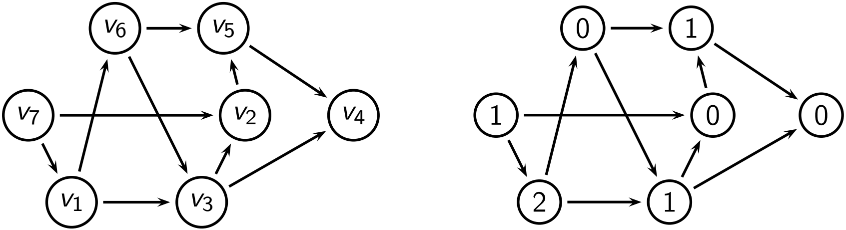
$$g(v_1) = \mathrm{mex}\{g(v_3), g(v_6)\} = \mathrm{mex}\{1, 0\} = 2.$$

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$g(v)$	2	0	1	0	1	0	

Τέλος,

$$g(v_7) = \mathrm{mex}\{\mathrm{g}(\mathrm{v}_1), \mathrm{g}(\mathrm{v}_2)\} = \mathrm{mex}\{2, 0\} = 1.$$

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
$g(v)$	2	0	1	0	1	0	1.



Συνάρτηση Grundy - Sprague

Ιδιότητες

- Αν για την κορυφή v ισχύει ότι $g(v) \neq 0$, τότε υπάρχει $u \in \Gamma(v)$ με $g(u) = 0$.
- Αν για την κορυφή v ισχύει ότι $g(v) = 0$, τότε για κάθε $u \in \Gamma(v)$ ισχύει ότι $g(u) \neq 0$.

Μια παραλλαγή του Nim

Δύο παίχτες A και B παίζουν το εξής παιχνίδι:
Υπάρχουν δύο σωροί με σπίρτα.
Ο πρώτος σωρός αποτελείται από x σπίρτα και ο δεύτερος σωρός αποτελείται από y σπίρτα.
Εναλλάξ κάθε παίχτης πρέπει να κάνει μια από τις παρακάτω κινήσεις:

- Διαλέγει ένα από τους δύο σωρούς, και αφαιρεί 1 ή περισσότερα σπίρτα από αυτόν τον σωρό.
- Διαλέγει και τους δύο σωρούς, και αφαιρεί 1 ή περισσότερα σπίρτα και από τους δύο σωρούς. (Τον ίδιο αριθμό σε κάθε σωρό).

Χάνει ο παίχτης που δεν μπορεί να κάνει κίνηση.

Ερώτηση

Αν ο πρώτος σωρός περιέχει 8 σπίρτα και ο δεύτερος σωρός 12 σπίρτα ποιος από τους δύο παίχτες θα κερδίσει;

Μια παραλλαγή του Nim

Μπορούμε να μοντελοποίησουμε το παιχνίδι ως ένα γράφημα τόξων.
Οι κορυφές είναι οι καταστάσεις του παιχνιδιού.
Κάθε κορυφή αντιστοιχεί σε ένα διατεταγμένο ζεύγος (x, y) όπου x ο αριθμός των σπίρτων στον πρώτο σωρό και y ο αριθμός των σπίρτων στον δεύτερο σωρό.
Ισχύει ότι $0 \leq x \leq 8$ και $0 \leq y \leq 12$.
Συνολικά υπάρχουν $9 \times 13 = 117$ καταστάσεις.

Μια παραλλαγή του Nim

x \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	8	6	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
7	7	8	6	10	0	–	–	–	–	–	–	–	–
6	6	7	8	9	3	10	4	–	–	–	0	–	–
5	5	3	4	0	7	8	10	–	–	–	–	–	–
4	4	5	1	2	6	7	3	0	–	–	–	–	–
3	3	4	5	1	2	0	9	10	–	–	–	–	–
2	2	0	3	5	1	4	8	6	7	–	–	–	–
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	–	–	–
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Συνάρτηση Grundy - Sprague

Για κάθε παιχνίδι δύο παιχτών (χωρίς ισοπαλία) μπορούμε να κατασκευάσουμε το γράφημα των καταστάσεων του παιχνιδιού. Το γράφημα αυτό δεν θα περιέχει κύκλους (αφού μπορεί να οδηγήσουν σε ισοπαλία).

Πόρισμα

Κάθε παιχνίδι δύο παιχτών (χωρίς ισοπαλία) έχει συνάρτηση g. Επομένως, μπορεί να κερδίζει πάντα ή ο πρώτος, ή ο δεύτερος παίχτης. (Αρκεί να γνωρίζει τις καταστάσεις που μηδενίζουν την συνάρτηση g.)