Διακριτά Μαθηματικά

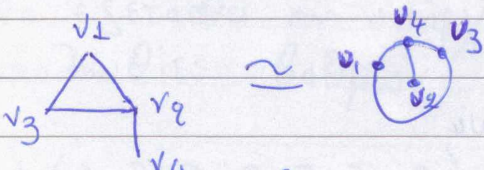
Γραφήματα

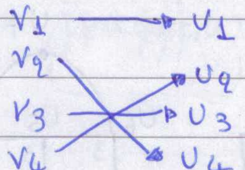
Άσκηση 1

Να εξετασθεί αν τα παρακάτω ζεύγη γραφημάτων είναι ισόμορφα

Υπενθύμιση

Για να δείξουμε ότι 2 γραφήματα είναι ισόμορφα υπάρχει μόνο ένας τρόπος: Θα κατασκευάσουμε μία 1-1 και επί απεικόνιση ανάμεσα στις κορυφές τους η οποία διατηρεί την σχέση γειτνίασης

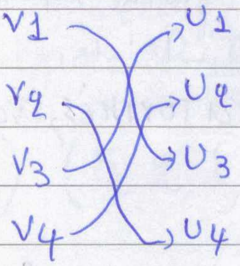




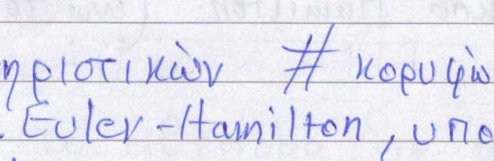
$f(v_1) = u_1$
$f(v_2) = u_4$
$f(v_3) = u_3$
$f(v_4) = u_2$

Ισομορφισμός
f

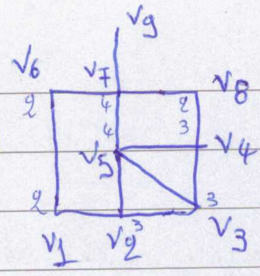
Υπάρχει και άλλος ισομορφισμός



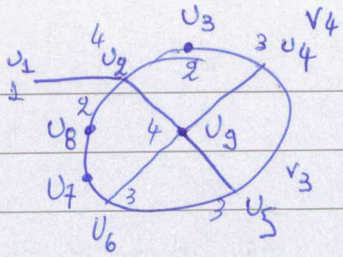
Για να δείξουμε ότι 2 γραφήματα δεν είναι ισόμορφα υπάρχουν πολλοί τρόποι
Θα βρούμε κάποιο χαρακτηριστικό που έχει το ένα γράφημα και δεν το έχει το άλλο ενώ θα έπρεπε να το έχει αν ήταν ισόμορφο



Παραδείγματα χαρακτηριστικών # κορυφών, # δεσμών ακολουθία βαθμών, Euler-Hamilton, υπογραφήματα (κύκλοι, μονοπάτια, αποστάσεις ανάμεσα στις κορυφές τους κοκ α)



G_1



G_2

4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1

4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1

$v_1 \longrightarrow u_7$

$v_2 \longrightarrow u_6$

$v_3 \longrightarrow u_5$

$v_4 \longrightarrow u_4$

$v_5 \longrightarrow u_9$

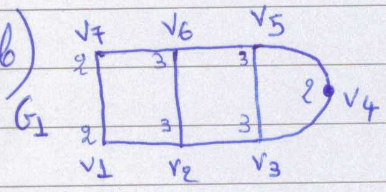
$v_6 \longrightarrow u_8$

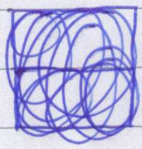
$v_7 \longrightarrow u_2$

$v_8 \longrightarrow u_3$

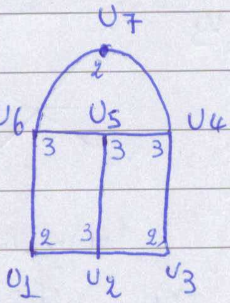
$v_9 \longrightarrow u_1$

β)





G_2



Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα διότι

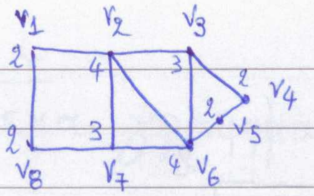
$\boxed{1}$ Το G_2 έχει κορυφή βαθμού 3 (την u_5) η οποία συνδέεται μόνο με κορυφές βαθμού 3, ενώ στο G_1 δεν υπάρχει τέτοια κορυφή

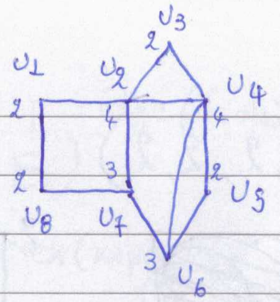
$\boxed{2}$ Το G_1 έχει 2 κορυφές βαθμού 2 που είναι γειτονικές, ενώ στο G_2 δεν υπάρχουν τέτοιες κορυφές

$\boxed{3}$ Το G_1 έχει κύκλο μήκους 3 $(v_5 - v_4 - v_3 - v_5)$ ενώ το G_2 δεν έχει κύκλο μήκους 3

$\boxed{4}$ Το G_1 έχει κύκλο Hamilton (ενώ το G_2 όχι) κ

κ.ο.κ

γ) G_1 

G_2 

4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2

Δεν είναι γιατί.

$\boxed{1}$ Στο G_2 υπάρχουν 2 υπάρχουν γειτονικές κορυφές με βαθμό 3, ενώ στο G_1 όχι

Άσκηση 2

Να εξετασθεί αν υπάρχουν γραφήματα δεσμών με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών

α) (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)

Δεν υπάρχει διότι το άθροισμά τους είναι περιττός

β) (5, 2, 2, 2, 1)

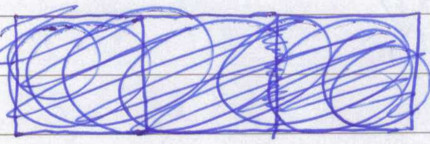
Δεν υπάρχει διότι ένα γράφημα με 5 κορυφές έχει μέγιστο βαθμό το 4

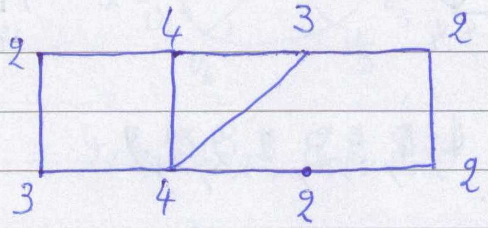
γ) (5, 2, 1, 1, 1, 0)

Δεν υπάρχει διότι θα είχε (αν υπήρχε) μια κορυφή που ~~[illegible]~~ δεν συνδέεται με καμία. Που δεν γίνεται

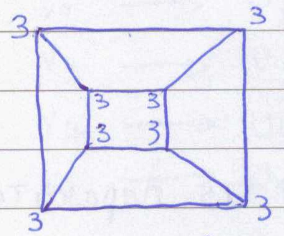
δ) (4, 2, 1, 1, 1, 0)

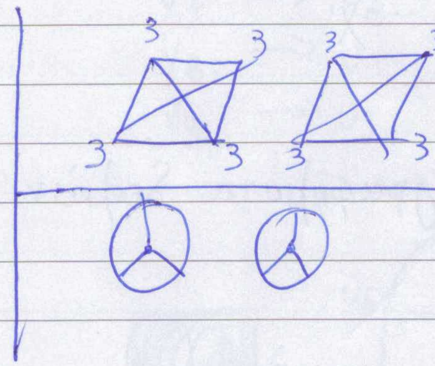
Δεν υπάρχει διότι το άθροισμα δεν είναι άρτιος ε) (4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2)





στ) (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3) + ΜΗ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟ

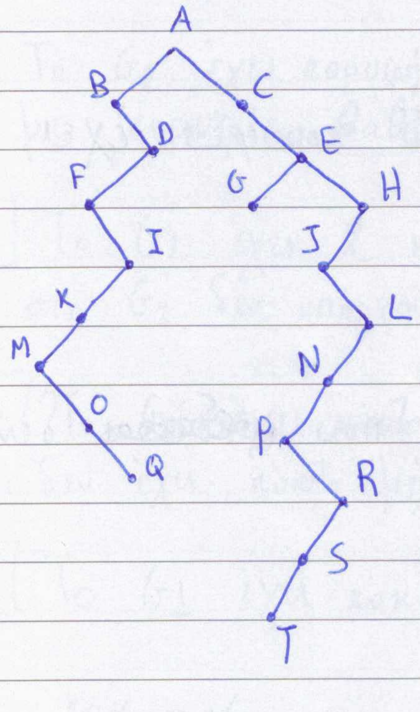




ΣΥΝΕΚΤΙΚΟ

Ασκηση 3

Να γίνει διάτρεξη σε προδιάταξη, μεταδιάταξη και ενδοδιάταξη στο παρακάτω δυαδικό δέντρο (με ρίζα A)



Προδιάταξη

ABDFIKMOQCEGHJLNPRST

Μεταδιάταξη

QOMKIFDBGTSRPNLJHECA

Ενδοδιάταξη (Αριστερό υποδένδρο → ρίζα → Δεξιό υποδένδρο)

BFMOQKIDACGEJPTSRNLH

Άσκηση 4

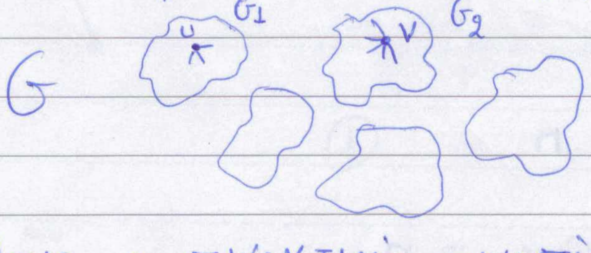
Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$

→ Edge (δεσμός)

↳ Vertex (κορυφές)

στο οποίο υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές με περιττό βαθμό. Να αποδειχθεί ότι αυτές οι δύο κορυφές συνδέονται με μονοπάτι

Έστω u, v οι συγκεκριμένες κορυφές
Ας υποθέσουμε ότι οι u, v δεν συνδέονται με κανένα μονοπάτι
Τότε θα βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες.



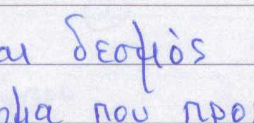
(κάθε ένα είναι μια συνεκτική συνιστώσα)

Τότε όμως η συνεκτική συνιστώσα G_1 στην οποία ανήκει η u θα είναι γράφημα επίσης. Αυτό είναι άτοπο, διότι το G_1 θα έχει μόνο μια κορυφή περιττού βαθμού.

Άσκηση 5

Έστω ένα συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ στο οποίο όλες οι κορυφές του έχουν άρτιο βαθμό. Να δειχθεί ότι το G δεν περιέχει ισθμούς (γέφυρα)

Ισθμός (Γέφυρα): Είναι δεσμός που αν τη "σβήσουμε" το γράφημα που προκύπτει δεν είναι συνεκτικό



Έστω ότι υπάρχει ισθμός ο οποίος συνδέει τις u, v. Αν τον σβήσουμε το γράφημα θα χωριστεί σε 2 συνεκτικές συνιστώσες. Όμως, η συνιστώσα G_1 που περιέχει το u. θα έχει την u με περιττό βαθμό και όλες τις άλλες κορυφές με άρτιο βαθμό, άτοπο