2ο Φροντιστήριο   Διακριτά Μαθημ

1) Να κατασκευαστούν τα παρακάτω αντικείμενα

α) δυαδικές λέξεις Dyck με ημιμήκος 4 $\rightarrow$ 4 άσσοι, 4 μηδενικά

Οι δυαδικές λέξεις Dyck με ημιμήκος 4 είναι σε πλήθος

$$C_4 = \frac{1}{4+1}\binom{2\cdot 4}{4} = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5}}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{5}} = 14$$

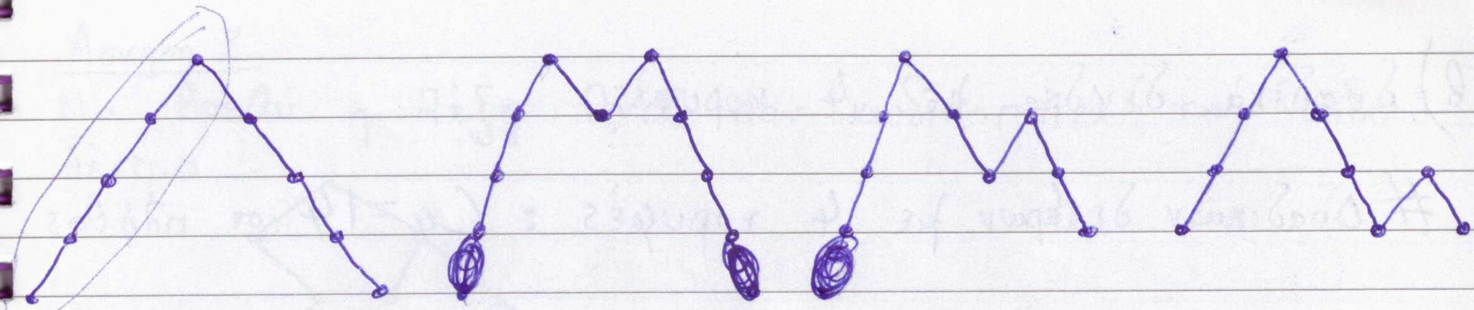
Υπενθύμιση:

Λέξη Dyck ημιμήκους n

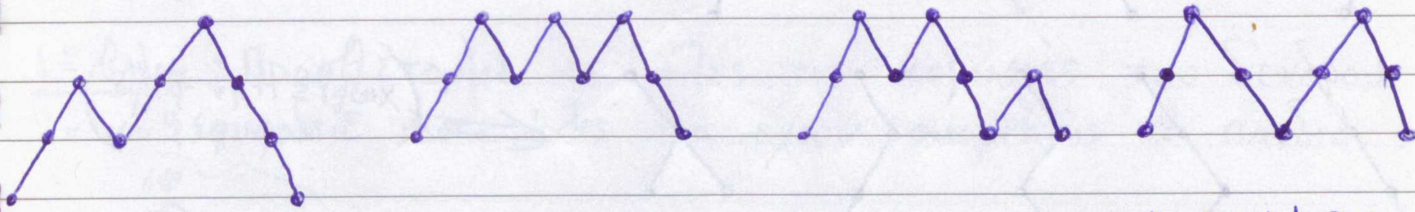
1 # άσσων = # μηδενικών = n

2 Σε οποιοδήποτε αρχικό τμήμα ισχύει

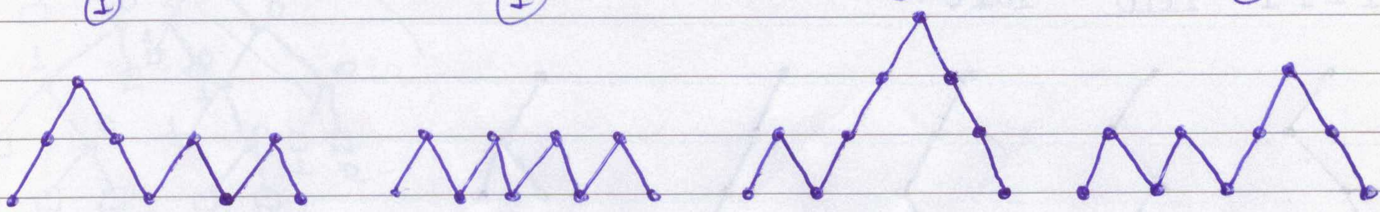
άσσων $\geq$ # μηδενικών



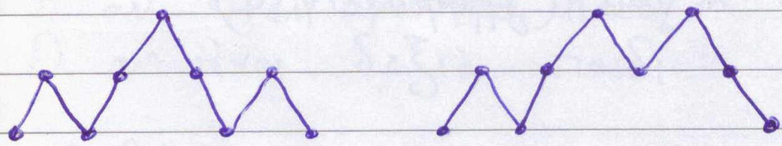
11110000 (1) (1) 11100100 (1) (2)



(1) (1) (2) 11001100 (2)



(3) (4) (2) (3)



(3) (2)

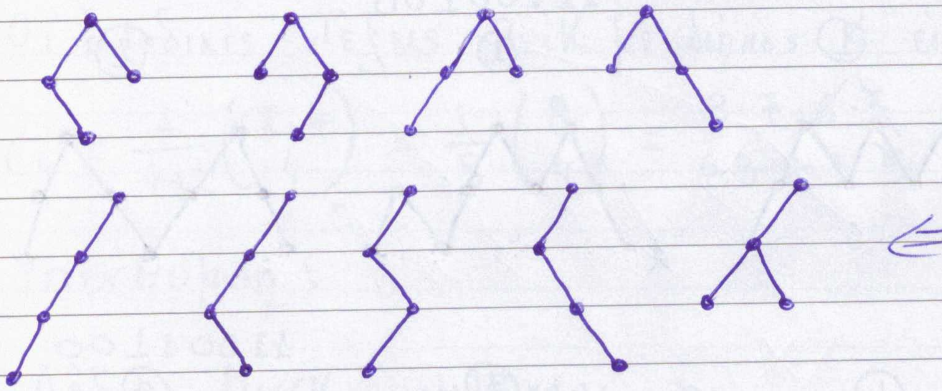
δέντρο

4 1 → 1
3 1 → 3
2 1 → 5
1 1 → 5

1 → 5
2 → 5
3 → 3
4 → 1

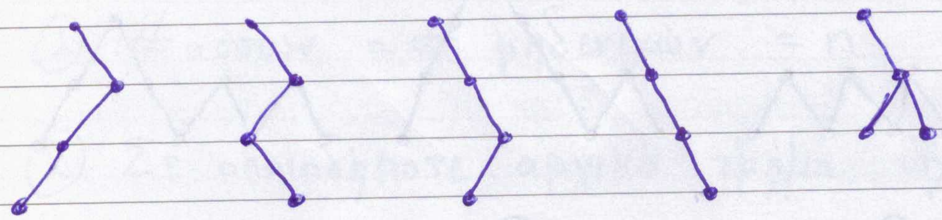
β) δυαδικά δένδρα με 4 κορυφές

#Δυαδικών δένδρων με 4 κορυφές : $C_4=14$ σε πλήθος



(χωρίς την ρίζα 3 κορυφές)

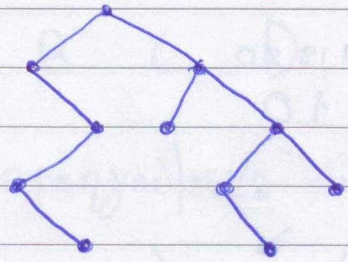
1111 1110 1020



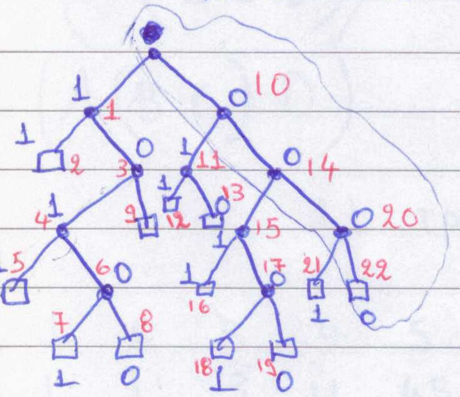
πιο εύκολο να σχηματίσω λέξεις (γραμμικότητα)

Άσκηση 2

Να βρεθεί η λέξη Dyck που κωδικοποιεί το δυαδικό δέντρο



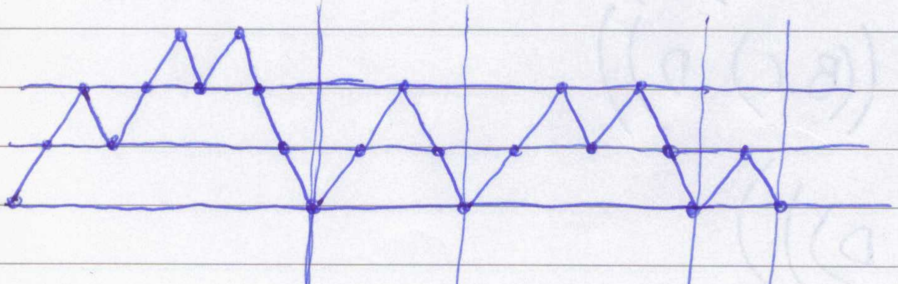
1ο βήμα: Προσθέτουμε σε όλες τις κορυφές του δένδρου "κενά" παιδιά ώστε όλες να έχουν ακριβώς 2 παιδιά.



2ο βήμα: Σε όλες τις κορυφές (πλην της ρίζας) τοποθετούμε
1 αν είναι αριστερό παιδί
0 αν είναι δεξιό παιδί.

3ο βήμα: Διασχίζουμε τις κορυφές του δένδρου σε προδιάταξη και καταγράφουμε τις ετικέτες.

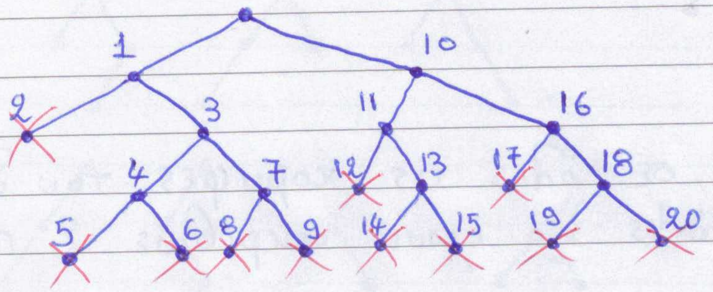
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1	0	1	1	0	1	0	0	$\boxed{0}$	1	1	0	$\boxed{0}$	1	1	0	1	0	$\boxed{0}$	1	$\boxed{0}$



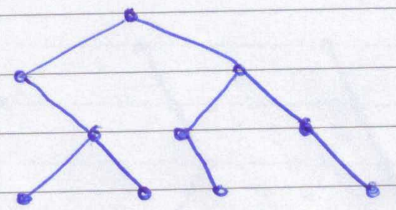
παιδί
1 → αριστερά
0 → ανεβαίνουμε στο πιο κοντινό πρόγονο που δεν έχει δεξί παιδί

Αντίστροφα, να βρεθεί το δυαδικό δένδρο που κωδικοποιείται από την δυαδική λέξη Dyck

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0



Μετά σβήνουμε $\boxed{\text{όλα}}$ τα φύλλα (X)



Τρόποι να βάλουμε παρενθέσεις σε ένα γινόμενο

[1] Αριθμοί Catalan

Σε κάθε ζεύγος συζυγών παρενθέσεων περιέχονται ακριβώς 2 όροι

A B C D

(((AB) C) D)   ((A (B C)) D)

((AB) (C D))   (A ((B C) D))

(A (B (C D)))

5 τρόποι

$\boxed{2}$ Αριθμοί Schröder

Σε κάθε ζεύγος συζυγών παρενθέσεων περιέχονται τουλάχιστον 2 όροι.

A B C D

Τα προηγούμενα από $\boxed{1}$ +

$(A\,B\,C\,D)$ $\quad ((ABC)\,D)$

$(A(BCD))$ $\quad ((AB)\,C\,D)$ $\quad$ 3-άδες

$(A(BC)\,D)$ $\quad (AB(CD))$

11 τρόποι

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
S_n	1	1	3	11	45	197	903	4279	20793	103049	518859

n-οστός αριθμός Schröder

$$S_0 = S_1 = 1$$

$$S_{n+1} = S_n + 2\sum_{k=0}^{n-1} S_k \cdot S_{n-k} \qquad n \geq 2$$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i-1}$$