$7^{\underline{o}}$ Φροντιστήριο - Διακριτά Μαθηματικά 30-4-18

Ασκήσεις στις Γεννήτριες
(Θεώρημα αντιστροφής του Lagrange)

Θεώρημα Αντιστροφής του Lagrange

Αν μια γεννήτρια $f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$ ικανοποιεί μια σχέση της μορφής

$$f^*(x) = 1 + x \cdot H(f^*(x))$$

όπου $H(\lambda)$ είναι πολυώνυμο (ή δυναμοσειρά) του λ τότε για $n \geq 1$ ο συντελεστής του x^n στο ανάπτυγμα της $f^*(x)$ ισούται με τον συντελεστή του λ^{n-1} στο ανάπτυγμα της $(H(1+\lambda))^n$ διαιρεμένο με το n.

Συμβολικά:

$$f(n) = [x^n] f^*(x) = \frac{1}{n} [\lambda^{n-1}] (H(1+\lambda))^n$$

Μέχρι τώρα

- $f^*(x) = \dfrac{\overset{\text{πολυώνυμο}}{p(x)}}{(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)\dots(1-\alpha_k x)}$ (Ρητή γεννήτρια)

Ανάλυση σε απλά κλάσματα + γεωμετρική σειρά

- $f^*(x) = 1 + x f^*(x) + x(f^*(x))^2$

↳ Εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς $f^*(x)$

$$f^*(x) = \frac{-\bigcirc \pm \sqrt{\bigcirc}}{\bigcirc}$$

+ ανάπτυγμα με Νεύτωνα

$$(1+\alpha)^N = \sum_{K=0}^{N} \binom{N}{K} \cdot \alpha^K$$

Υπάρχει το ενδεχόμενο η γεννήτρια να ικανοποιεί μια αλγεβρική εξίσωση βαθμού ≥ 3

πχ $f^*(x) = 1 + x f^*(x) + 2x(f^*(x))^2 - (f^*(x))^5$

πχ $f^*(x) = 1 + x(f^*(x))^5$

δεν μπορούμε να βρούμε (να λύσουμε) ως προς $f^*(x)$

Σ' αυτές τις περιπτώσεις το Θεώρημα Αντιστροφής του Lagrange μας επιτρέπει να βρούμε τους συντελεστές της $f^*(x)$ χωρίς να γνωρίζουμε τον τύπο της $f^*(x)$

Ασκηση 1

SOS

Να βρεθεί ο συντελεστής του x^n στις παρακάτω γεννήτριες.

a) $f^*(x) = 1 + x \cdot (f^*(x))^2$ $\quad f^*(x) \to \lambda$

$H(\lambda) = \lambda^2$

$H(1+\lambda) = (1+\lambda)^2$

$(H(1+\lambda))^n = ((1+\lambda)^2)^n = (1+\lambda)^{2n}$

• Αν θέσουμε $H(\lambda) = \lambda^2$ τότε γράφεται $f^*(x) = 1 + xH(f^*(x))$

τότε

$$f(n) = [x^n]\, f^*(x) = \frac{1}{n} [\lambda^{n-1}] (H(1+\lambda))^n$$

$$(H(1+\lambda))^n = ((1+\lambda)^2)^n = (1+\lambda)^{2n} \underset{\text{Νεύτωνα}}{\overset{\text{διών.}}{=}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \lambda^k$$

Γενικά, ο συντελεστής του λ^k είναι $\binom{2n}{k}$

Οπότε

$$[\lambda^{n-1}] (H(1+\lambda))^n = \binom{2n}{n-1}$$

Άρα $f(n) = \dfrac{1}{n} \binom{2n}{n-1}$

β) $f^*(x) = 1 + x\left(f^*(x)\right)^5$

Θέτουμε $H(\lambda) = \lambda^5$ οπότε $f^*(x) = 1 + x\,H\left(f^*(x)\right)$

Άρα από Θ.Α. Lagrange ισχύει ότι

$$f(n) = \frac{1}{n}\left[\lambda^{n-1}\right]\left(H(1+\lambda)\right)^n$$

$$= \frac{1}{n}\left[\lambda^{n-1}\right](1+\lambda)^{5n}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\lambda^{n-1}\right]\sum_{k=0}^{5n}\binom{5n}{k}\cdot\lambda^k$$

$$= \frac{1}{n}\binom{5n}{n-1}$$

γ) $f^*(x) = 1 + 3x\left(f^*(x)\right)^4$

Θέτουμε $H(\lambda) = 3\lambda^4$ οπότε

$$f^*(x) = 1 + x\,H\left(f^*(x)\right)$$

Από το Θ.Α. Lagrange έχουμε ότι

$$f(n) = \frac{1}{n}\left[\lambda^{n-1}\right]\left(H(1+\lambda)\right)^n$$

$$= \frac{1}{n}\left[\lambda^{n-1}\right]3^n(1+\lambda)^{4n}$$

δεν περιέχει λ

$$= \frac{3^n}{n}\left[\lambda^{n-1}\right](1+\lambda)^{4n}$$

$$= \frac{3^n}{n}\left[\lambda^{n-1}\right]\cdot\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}\lambda^k$$

$$= \frac{3^n}{n}\cdot\binom{4n}{n-1}$$

δ) $f^*(x) = 1 + x + 2x\left(f^*(x)\right)^3$

Ισχύει ότι

$$f^*(x) = 1 + x\left(1 + 2\left(f^*(x)\right)^3\right)$$

Αν θέσουμε $H(\lambda) = 1 + 2\lambda^3$ τότε

$$f^*(x) = 1 + xH\left(f^*(x)\right)$$

Άρα από το Θ.Α.L για $n \geq 1$

$$f(n) = \frac{1}{n}\left[\lambda^{n-1}\right]\left(H(1+\lambda)\right)^n$$

$$= \frac{1}{n}\left[\lambda^{n-1}\right]\left(1 + 2(1+\lambda)^3\right)^n$$

$$= \frac{1}{n}\left[\lambda^{n-1}\right]\sum_{k=0}^{n}\left(2\cdot(1+\lambda)^3\right)^k \cdot 1^{n-k}\binom{n}{k}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\lambda^{n-1}\right]\sum_{k=0}^{n} 2^k\cdot(1+\lambda)^{3k}\binom{n}{k}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\lambda^{n-1}\right]\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k\cdot\sum_{p=0}^{3k}\binom{3k}{p}\cdot\lambda^p$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\left[\lambda^{n-1}\right]\sum_{p=0}^{3n}\left(\sum_{k=\lceil\frac{p}{3}\rceil}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k\binom{3k}{p}\right)\cdot\lambda^p$$

$p=n-1$

$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=\lceil\frac{n-1}{3}\rceil}^{n}\binom{n}{k}2^k\binom{3k}{n-1}$$

? $(\alpha+\beta\cdot\lambda)^n = \sum_{\kappa=0}^{n}\binom{n}{\kappa}\cdot\alpha^{n-\kappa}\cdot\beta^{\kappa}\cdot\lambda^{\kappa}$

ε) $f^*(x) = 1 + x\left(3 + 4\left(f^*(x)\right)^5\right)$

θέτω

$$H(\lambda) = 3 + 4\lambda^5 \quad \text{τότε} \quad f^*(x) = 1 + x\,H\left(f^*(x)\right)$$

$n \geq 1$

$$f(n) = \frac{1}{n}\cdot\left[\lambda^{n-1}\right]\left(3+4(\lambda+1)^5\right)^n$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\left[\lambda^{n-1}\right]\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 3^{n-k}\cdot 4^{k}(1+\lambda)^{5k}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\lambda^{n-1}\right]\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 3^{n-k}\cdot 4^{k}\cdot\sum_{p=0}^{5k}\binom{5k}{p}\cdot\lambda^{p}$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\left[\lambda^{n-1}\right]\sum_{p=0}^{5n}\left(\sum_{k=\lceil\frac{p}{5}\rceil}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}4^{k}\binom{5k}{p}\right)\lambda^{p}$$

Για $p=n-1$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=\lceil\frac{n-1}{5}\rceil}^{n}\binom{n}{k}\binom{5k}{n-1}3^{n-k}\cdot 4^{k}$$