4º Φροντιστήριο Διακριτά Μαθηματικά

Γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις
(με σταθερούς συντελεστές)

SOS
εύκολο θέμα!

Συμβολισμός:
Αντί για $y(x)$ γράφουμε y_x

Εξισώσεις μορφής

$$a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \ldots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = b(x)$$

όπου
$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι σταθερές
$b(x)$ είναι γνωστή συνάρτηση (πχ: πολυώνυμο του x, εκθετική του x)
Αποδεικνύεται ότι η λύση της εξίσωσης έχει την μορφή

$$y_x = y_x^0 + \psi_x$$

όπου
y_x^0 είναι η λύση όταν $b(x)=0$ (λύση της ομογενούς)
ψ_x είναι μια (μερική) λύση

Η λύση της ομογενούς προκύπτει από την χαρακτηριστική εξίσωση

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda^1 + a_0 = 0$$

βρίσκοντας τις ρίζες της

Ασκηση 1

Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης

$$y_{x+3} + y_{x+0} = (-1)^x + 2^x$$

$\hookrightarrow \lambda^3 \quad \hookrightarrow \lambda^0$

Η γενική λύση της εξίσωσης έχει την μορφή

$$y_x = y_x^0 + \psi_x$$

Αρχικά θα βρούμε την y_x^0

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^3 + 1 = 0$

Μια ρίζα της εξίσωσης είναι το (-1)

Για να βρούμε τις υπόλοιπες θα κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων.

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 + 1 & \lambda + 1 \\ \cline{2-2} -(\lambda^3 + \lambda^2) & \lambda^2 - \lambda + 1 \\ \hline -\lambda^2 + 1 & \\ -(-\lambda^2 - \lambda) & \\ \hline \lambda + 1 & \\ -(\lambda+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Αρα $(\lambda^3 + 1) = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$

Για τις άλλες δύο ρίζες έχουμε

$$\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

μιγαδική

Υπενθύμιση

Αν $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu$ είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης με πολ/τητες $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_\nu$ αντίστοιχα τότε η y_x^0 έχει τη μορφή

$$y_x^0 = x^0 \rho_1^x + x^1 \rho_1^x + x^2 \rho_1^x + \dots + x^{\kappa_1 - 1} \rho_1^x$$ κ.ο.κ για την $\rho_2, \dots, \rho_\nu$

Αρα

$$y_0^x = c_1 (-1)^x + c_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^x + c_3 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^x$$

Για τις μιγαδικές ρίζες (επειδή τελικά απλοποιούνται τα μιγαδικά μέρη) έχουμε

<u>Υπενθύμιση</u>
Για την μιγαδική ρίζα έχει την μορφή

$$\lambda = \alpha + bi$$

τότε αυτή αντιστοιχεί στην έκφραση

$$c_1\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^x \cdot \cos(x\theta) + c_2\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^x \cdot \sin(x\theta)$$

όπου $tg\,\theta = \dfrac{b}{\alpha}$

← Για το − δεν χρειάζεται να το πάρουμε

Εδώ $\lambda = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$

και

$$tg\,\theta = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \Longrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

Άρα

$$y_x^0 = c_1(-1)^x + c_2(1)^x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + c_3(1)^x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$$

Για να βρούμε την μερική λύση Ψx γνωρίζουμε τα εξής

• Αν η $b(x)$ είναι άθροισμα εκθετικών

$$d_1 \cdot p_1^x + d_2 \cdot p_2^x + \ldots + d_\lambda \cdot p_\lambda^x$$

τότε γνωρίζουμε ότι και η Ψx θα είναι άθροισμα των ιδίων

{πολ/τητας = πολλαπλότητας}

εκθετικών συναρτήσεων.
Αν κάποιο ρ_i δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής, τότε χρησιμοποιούμε το ρ_i^x
Αν το ρ_i είναι ρίζα πολ/τητας κ χρησιμοποιούμε το $x^k \cdot \rho_i^x$

Εδώ
$$b(x) = (-1)^x + 2^x$$

Το 2 δεν είναι ρίζα $\longrightarrow A \cdot 2^x$
Το (-1) είναι ρίζα πολ/τητας 1 $\longrightarrow B \cdot x^1 \cdot (-1)^x$
Η μερική λύση θα έχει τη μορφή
$$\psi_x = A \cdot 2^x + Bx(-1)^x$$

Θα βρούμε τα A, B

Αντικαθιστούμε όπου y_x το ψ_x στην αρχική εξίσωση.

$$\psi_{x+3} + \psi_x = (-1)^x + 2^x$$

$2^x \cdot 2^3 \leftarrow$
$$A \cdot 2^{x+3} + B(x+3) \cdot (-1)^{x+3} + A \cdot 2^x + Bx(-1)^x = (-1)^x + 2^x$$

Συντελεστής του 2^x: $\overset{2^3}{8}A + A = 1 \Longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{9}}$

Συντελεστής του $(-1)^x$: $-3B = 1 \Longrightarrow \boxed{B = -\frac{1}{3}}$
Επομένως
$$\psi_x = \frac{1}{9} \cdot 2^x - \frac{x}{3}(-1)^x$$

$\boxed{\text{Τελικά}}$
$$y_x = y_x^0 + \psi_x = c_1(-1)^x + c_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + c_3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + \frac{1}{9} \cdot 2^x - \frac{x}{3}(-1)^x$$

$* \; B(x+3)(-1)^x(-1)^3 = (-Bx - 3B)(-1)$

Δεν λύνεται
με Η/Υ.

$\boxed{\text{Η λογιστική συνάρτηση}}$

$$y_{n+1} = 4y_n(1-y_n) = 4y_n - 4y_n^2$$

όπου $0 < y_0 < 1$

πχ.

$$y_0 = 0.1$$

Να βρεθεί το y_{1000}

Άσκηση 2

Να βρεθεί η λύση της ομογενούς στις παρακάτω περιπτώσεις όπου η χαρακτηριστική εξίσωση

α) έχει ρίζες 2 (1 φορά), −3 (3 φορές) και 4 (2 φορές)

$$y_x^o = c_1 \cdot 2^x + c_2(-3)^x + c_3 \cdot x^1(-3)^x + c_4 \cdot x^2(-3)^x + c_5 \cdot 4^x + c_6 x \cdot 4^x$$

β) έχει 4-πλή ρίζα το $\frac{1}{2}$

$$y_x^o = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^x + c_2 x\left(\frac{1}{2}\right)^x + c_3 \cdot x^2\left(\frac{1}{2}\right)^x + c_4 \cdot x^3\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

γ) έχει ρίζα το 2 (1 φορά), το 3 (2 φορές) και το $6 \pm 3i$

$\boxed{6+3i}$ $\quad \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45}$

$$tg\theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{\theta = arctg\frac{1}{2}}$$

Άρα

$$y_x^o = c_1 \cdot 2^x + c_2 \cdot 3^x + c_3 \cdot x \cdot 3^x + c_4(\sqrt{45})^x \cdot \sin\left[\left(arctg\frac{1}{2}\right)x\right] +$$

$$+ c_5(\sqrt{45})^x \cdot \cos\left[\left(arctg\frac{1}{2}\right)x\right]$$

Άσκηση 3

Να βρεθούν οι μερικές λύσεις των παρακάτω εξισώσεων

α) $\boxed{y_{x+3} + y_x} = 2\cdot 3^x$

Το 3 δεν είναι ρίζα της ομογενούς

$\psi_x = A\cdot 3^x$

Αντικαθιστούμε

$\psi_{x+3} + \psi_x = 2\cdot 3^x$

$A\cdot 3^{x+3} + A 3^x = 2\cdot 3^x$

$27\cdot A\cdot 3^x + A\cdot 3^x = 2\cdot 3^x \Longrightarrow 28\cdot A = 2 \Longrightarrow A = \frac{1}{14}$

β) $y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = 7\cdot 2^x + 6\cdot 3^x$

όπου η χαρακτηριστική εξίσωση έχει διπλή ρίζα το 2

$\psi_x = A\cdot x^{2}\cdot 2^x + B\cdot 3^x$

Για να βρούμε τα A, B αντικαθιστούμε

$\psi_{x+2} - 4\psi_{x+1} + 4\psi_x = 7\cdot 2^x + 6\cdot 3^x$

$A(x+2)^2\cdot 2^{x+2} + B\cdot 3^{x+2} - 4\left(A(x+1)^2\cdot 2^{x+1} + B\cdot 3^{x+1}\right)$

$+ 4\left(Ax^2\cdot 2^x + B\cdot 3^x\right) = 7\cdot 2^x + 6\cdot 3^x$

Συντελεστές του 3^x: $9B - 12B + 4B = 6 \Longrightarrow \boxed{B=6}$

Συντελεστές του 2^x: $16A - 8A = 7 \Longrightarrow \boxed{A = \frac{7}{8}}$

Άρα $\boxed{\psi_x = \frac{7}{8}\cdot x^2\cdot 2^x + 6\cdot 3^x}$

γ) $2y_{x+3} - 6y_{x+2} + 6y_{x+1} - 2y_x = 2x$

πολυώνυμο 1ου βαθμού

Η ψ_x είναι της μορφής

$$\psi_x = x^k (Ax + B)$$

όπου κ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο η συνάρτηση $y_x = x^k$ <u>δεν είναι λύση της ομογενούς</u>

Για $k=0$ $\quad y_x = x^0 = 1$

Αντικαθιστούμε

$$2\cdot 1 - 6\cdot 1 + 6\cdot 1 - 2\cdot 1 = 0$$

Άρα $k=0$ είναι λύση (Δεν μας κάνει)

Για $k=1$ $\quad y_x = x^1$

Αντικαθιστούμε

$$2(x+3) - 6(x+2) + 6(x+1) - 2x = 0$$

Άρα $k=1$ είναι λύση (Δεν μας κάνει).

Για $k=2$ $\quad y_x = x^2$

Αντικαθιστούμε

$$2(x+3)^2 - 6(x+2)^2 + 6(x+1)^2 - 2x^2 \neq 0$$

Άρα $k=2$ <u>δεν</u> είναι λύση

Άρα $\boxed{k=2}$

Οπότε

$$\psi_x = x^2(Ax+B)$$

Για ~~αυτό~~ $k=2$ είναι λύση οπότε έχει λάθος εδώ και το σωστό τελικά είναι $\boxed{k=3}$

Αντικαθιστούμε

$$2(x+3)^2\left(A(x+3)+B\right)-6(x+2)^2\left(A(x+2)+B\right)$$
$$+6(x+1)^2\left(A(x+1)+B\right)-2x^2\left(Ax+B\right)=2x$$

Συντελεστής του x : Σύστημα με A, B
Συντελεστής του σταθ όρου : με 2 εξισώσεις

:

$$A=\frac{1}{24}\ ,\ B=\frac{-1}{4}$$