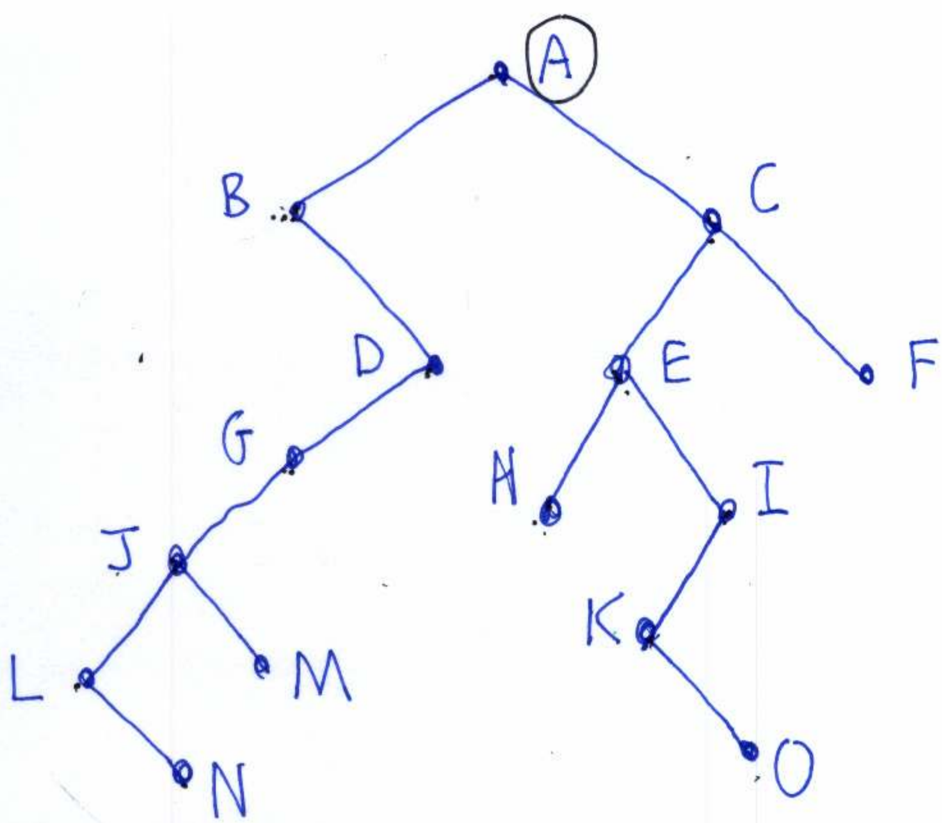
## Άσκηση 1

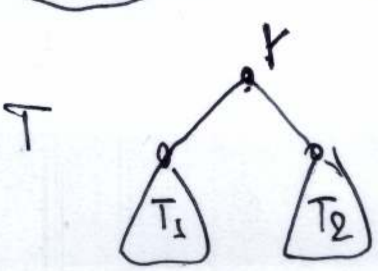
Να γίνει διάτρεξη του δυαδικού δένδρου T (με ρίζα A) σε προδιαταξη, μεταδιάταξη και ενδοδιαταξη




Προδιάταξη : A B D G J L N M C E H I K O F

Μεταδιάταξη N L M J G D B H O K I E F C A

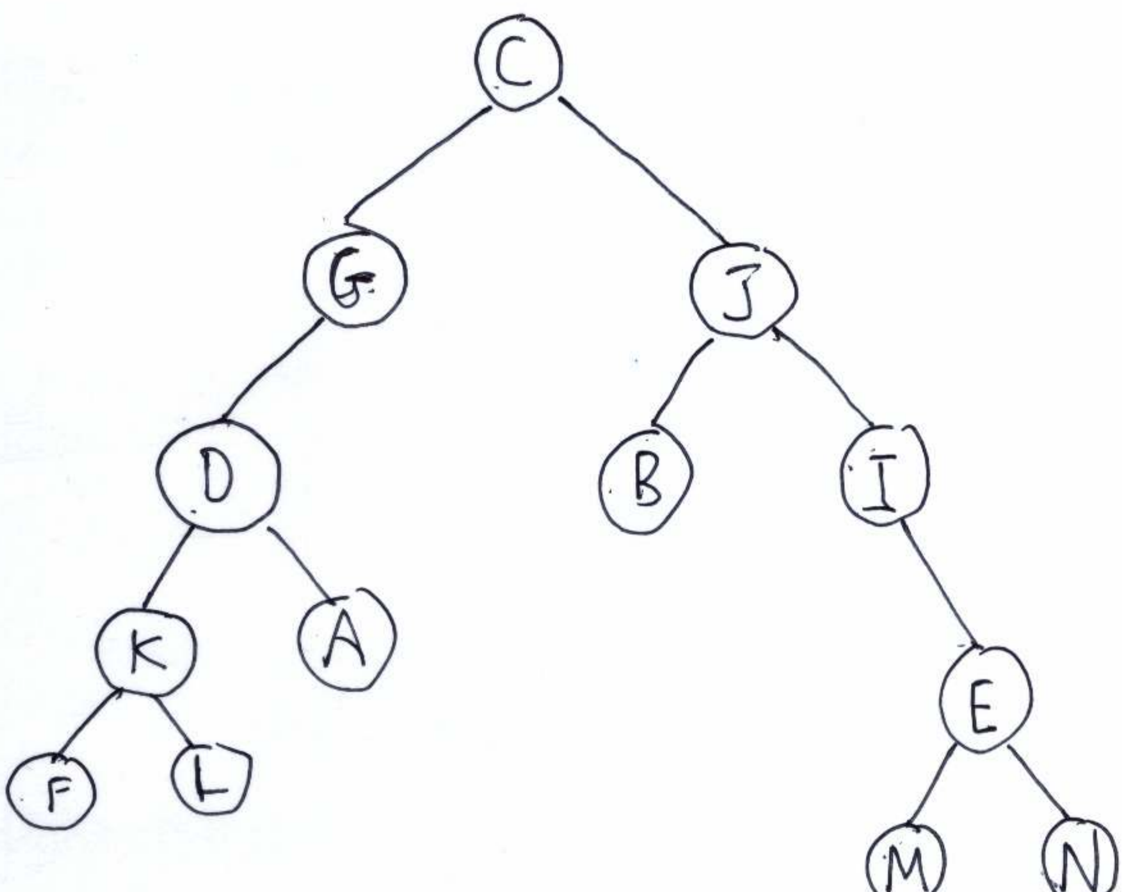
Ενδοδιάταξη B L N J M G D A H E K O I C F

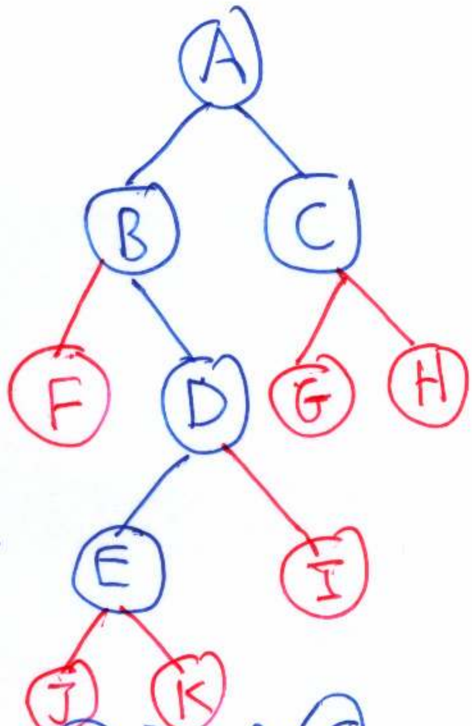


## Άσκηση 2

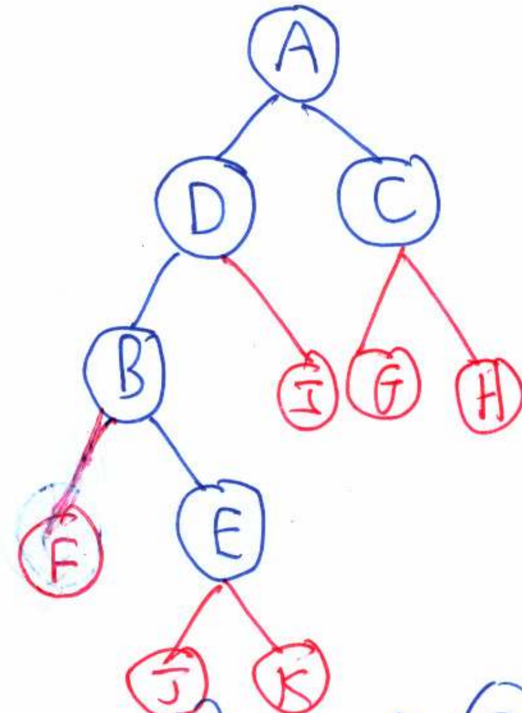
Να βρεθει το δυαδικό δένδρο T του οποιου οι διασχισεις σε προδιάταξη και ενδοδιαταξη ειναι αντίστοιχα

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Προδιάταξη: | C | G | D | K | F | L | A | J | B | I | E | M | N |
| ενδοδιάταξη: | F | K | L | D | A | G | C | B | J | I | M | E | N |






B E D A C

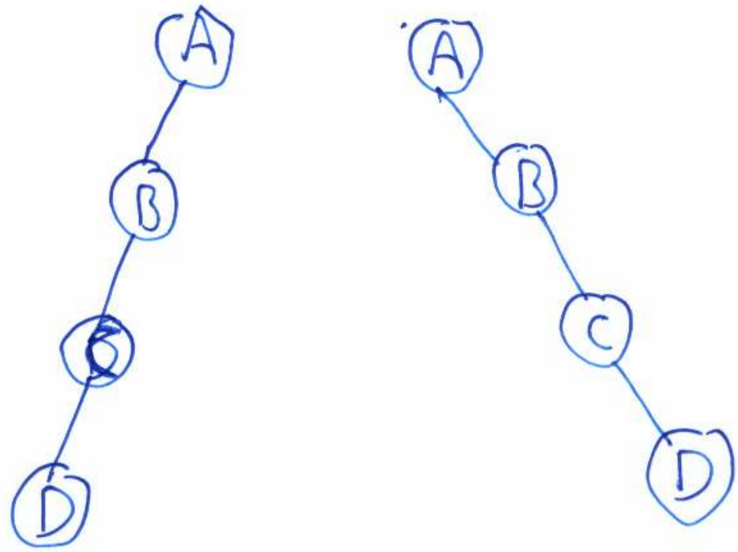



B E D A C

F B J E K D I A G C H

Διατεταγμενο δενδρο

Δυαδικά δενδρα



<u>Ενδοδιάταξη</u>

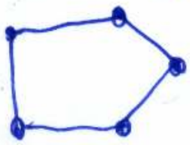
D C B A        D C B A        A B C D

## Άσκηση 3

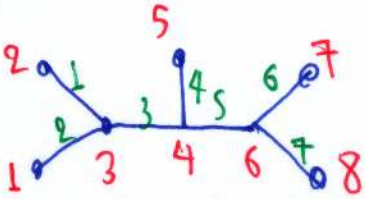
Να βρεθεί το πλήθος των γενετικών δένδρων των παρακάτω γραφημάτων

Υπενθύμιση: Αν $T=(V,E)$ είναι δένδρο τότε

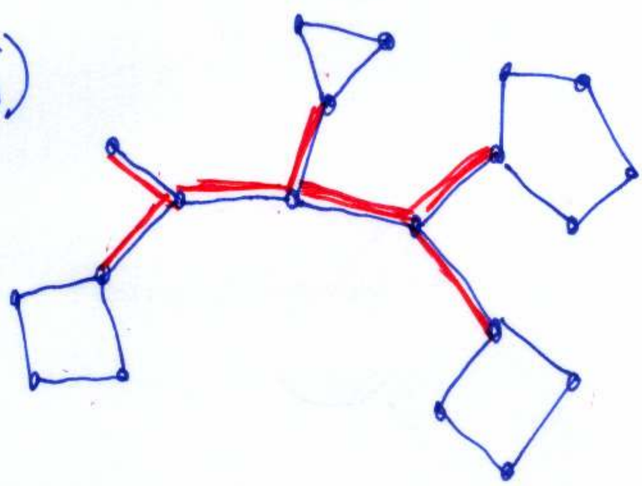
$$|V|=|E|+1$$

α)  $C_5$ → Απ. Υπάρχουν 5 γενετικά δένδρα

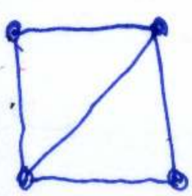
β) $C_n$, $n\geq 3$ → Απ. $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$ γενετικά δένδρ

γ) 


→ Απ. 1 (το ίδιο το γράφημα)

δ) 

→ Απ. $4\cdot 3\cdot 5\cdot 4=240$ γενετικά δένδρα

ε) 

Κάθε γενετικό δένδρο θα περιέχει 4 κορυφές

Άρα πρέπει να έχει 3 δεσμούς.

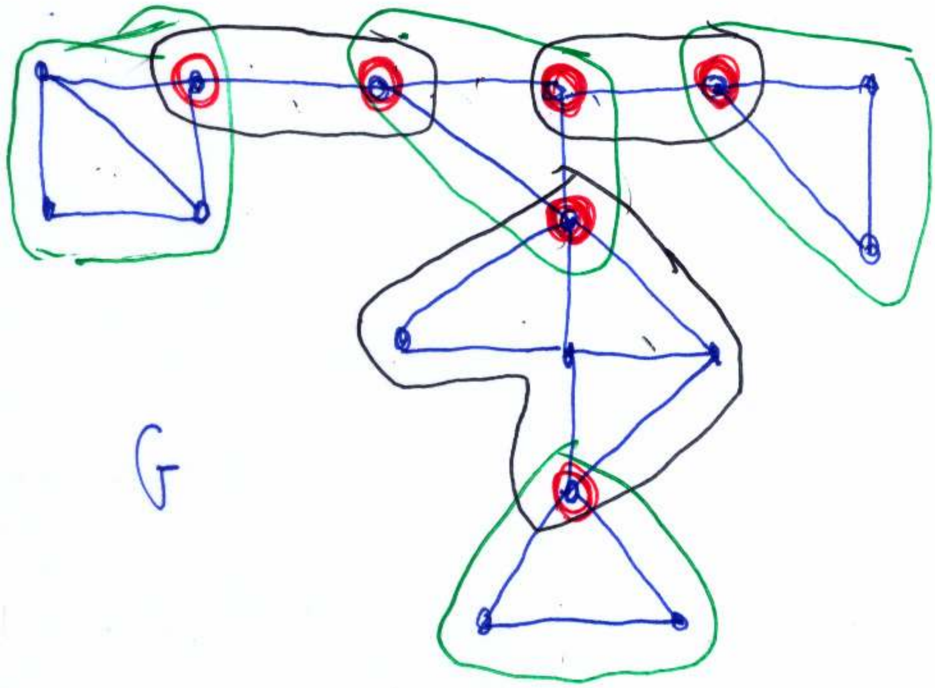
Πρέπει να σβήσουμε 2 δεσμούς (ή να κρατήσουμε 3 δεσμούς)

Ο μέγιστος αριθμός είναι $\binom{5}{2}=10$.

Matrix-Tree Theorem (Ορίζουσες)

## Άσκηση 4

Να βρεθούν τα μπλοκ του γραφήματος G




Θα βρούμε τις κλειδώσεις του G
(σημειωμένες με κόκκινο)

Άρα, το G αποτελείται από 7 μπλοκ

Δεν έχει κλειδώσεις

## Άσκηση 5

Να αποδειχθεί ότι σε κάθε (μη μηδενικό) γράφημα δεσμών $G=(V,E)$ με $|V| \geq 2$ υπάρχουν δυο κορυφές με τον ίδιο βαθμό οι οποίες είναι γειτονικές ή έχουν κοινό γείτονα.

Λύση

Θεώρουμε μια κορυφή $v$ του $G$ η οποία έχει μέγιστο βαθμό (έστω $d(v)=k$)

Τότε οι γείτονες της $v$ θα έχουν βαθμό από 1 μέχρι $k$.

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

1) Υπάρχει γείτονας $u$ της $v$ με βαθμό $k$

Άρα, ~~βρήκαμε~~ οι κορυφές $v, u$ έχουν τον ίδιο βαθμό και είναι γειτονικές.

2) Δεν υπάρχει γείτονας της $v$ με βαθμό $k$

Άρα η $v$ έχει $k$ γείτονες και κάθε γείτονας θα έχει βαθμό από 1 μέχρι $k-1$.

Άρα, από την αρχή του περιστερεώνα δυο τουλάχιστον γείτονες θα έχουν το ίδιο βαθμό

Άρα βρήκαμε 2 κορυφές του γραφήματος με τον ίδιο βαθμό οι οποίες έχουν κοινό γείτονα (την κορυφή v)

## Άσκηση 6

Να δειχθεί ότι αν σε ένα γράφημα δεσμών $G$ ο ελάχιστος βαθμός των κορυφών του είναι μεγαλύτερος ή ίσος του $2$, τότε το γράφημα περιέχει κύκλο.

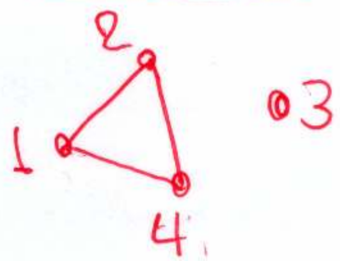
## Άσκηση 7

Ένα γράφημα δεσμών $G$ ονομάζεται <u>αυτοσυμπληρωματικό</u> ανν $G \cong G^c$.

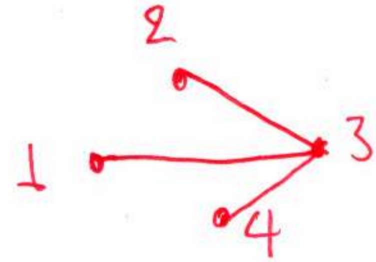
α) Να δοθεί ένα παράδειγμα αυτοσυμπληρωματικού γραφήματος (με 4 και 5 κορυφές)

β) Να δειχθεί ότι αν το $G=(V,E)$ είναι αυτοσυμπληρωματικό τότε $|V| \equiv 0 \bmod 4$ ή $|V| = 1 \bmod 4$

Υπενθύμιση:



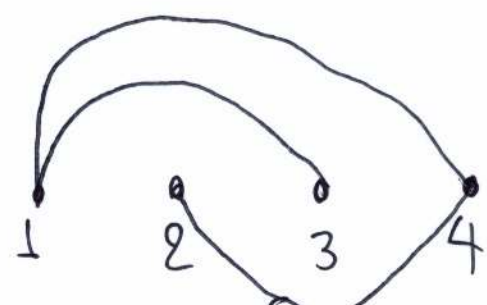
$G$



$G^c$ (complement)

α)

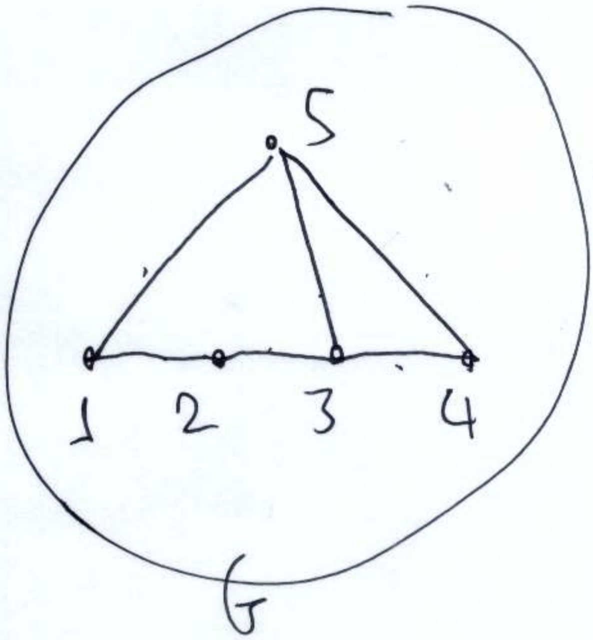
$G$

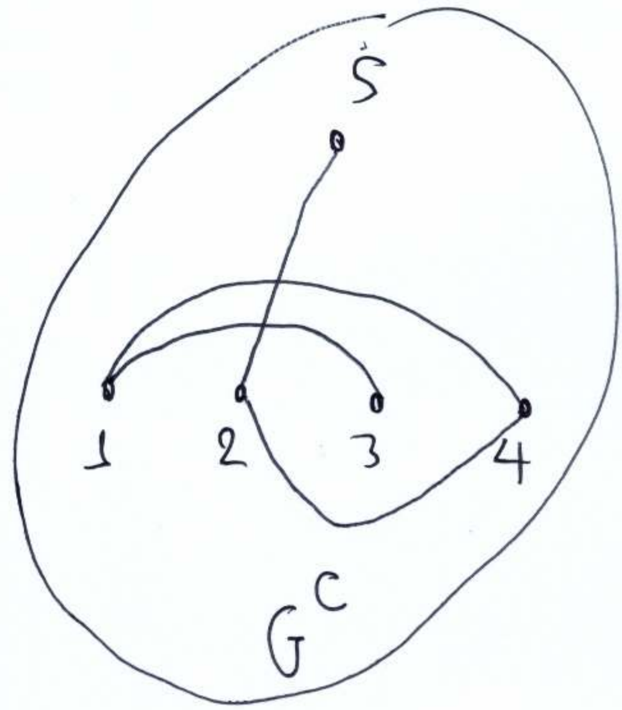


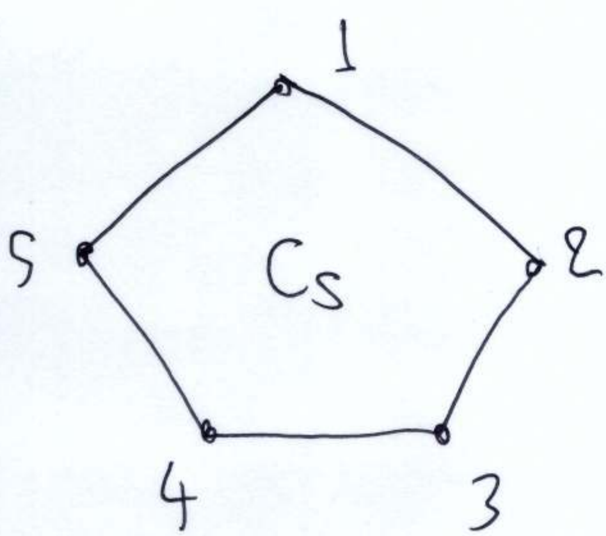
$G^c$

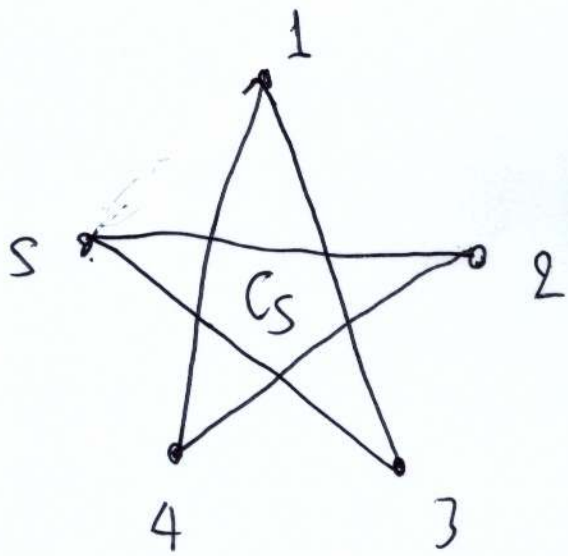
$G \cong G^c$

$K_n$ $\binom{n}{2}$




$G$ $G^c$

Β) Έστω ότι το γράφημα $G=(V,E)$

με

$|V(G)| = n$ και $|E(G)| = k$

είναι αυτοσυμπληρωματικό.

Τότε $G^c \simeq G$ και άρα

$|V(G^c)| = n$ και $|E(G^c)| = k$

<u>Υπενθύμιση</u> Αν $|V(G)| = n$ και $|E(G)| = k$

τότε $|E(G^c)| = \binom{n}{2} - k$

Άρα

$$|E(G)| = |E(G^c)| \Leftrightarrow k = \binom{n}{2} - k$$

$$\Leftrightarrow \binom{n}{2} = 2k \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 2k \Leftrightarrow$$

$$\boxed{n(n-1) = 4k} \Rightarrow n(n-1) \equiv 0 \bmod 4$$

$x \cdot y \equiv 0 \bmod 4 \qquad x, y \in \{1, 2, 3, 0\}$

<u>Λύσεις</u> $\boxed{n \equiv 0 \bmod 4}$ ή $\boxed{n-1 \equiv 0 \bmod 4}$

$0 \cdot 1 \equiv 0 \bmod 4$ ή $(n \equiv 2 \bmod 4)$ αδύνατο

$0 \cdot 2 \equiv 0 \bmod 4 \qquad (n-1 \equiv 2 \bmod 4)$

Άρα $(n \equiv 0 \bmod 4)$ ή $(n \equiv 1 \bmod 4)$

**Πόρισμα** Δεν υπαρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με 6 ή 7 κορυφές.