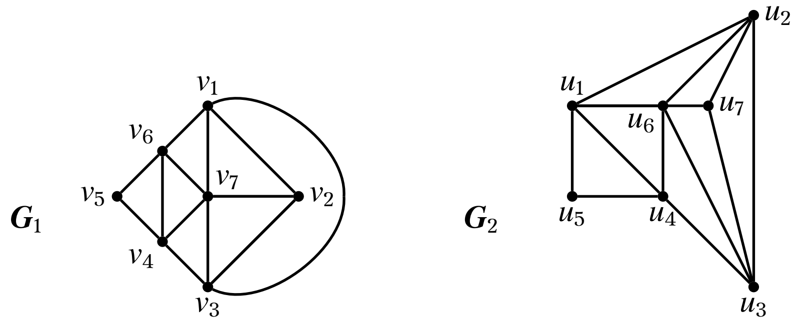
1.6 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1.1. *Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα τα παρακάτω ζεύγη γραφημάτων.*

(i)



Λύση. Τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα. Ένας ισομορφισμός f είναι ο εξής:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= u_2 \\ f(v_2) &= u_7 \\ f(v_3) &= u_3 \\ f(v_4) &= u_4 \\ f(v_5) &= u_5 \\ f(v_6) &= u_1 \\ f(v_7) &= u_6 \end{aligned}$$

□

Μπορούμε να ελέγξουμε αν τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα χρησιμοποιώντας την μέθοδο `GraphMatcher` *της βιβλιοθήκης networkx.*

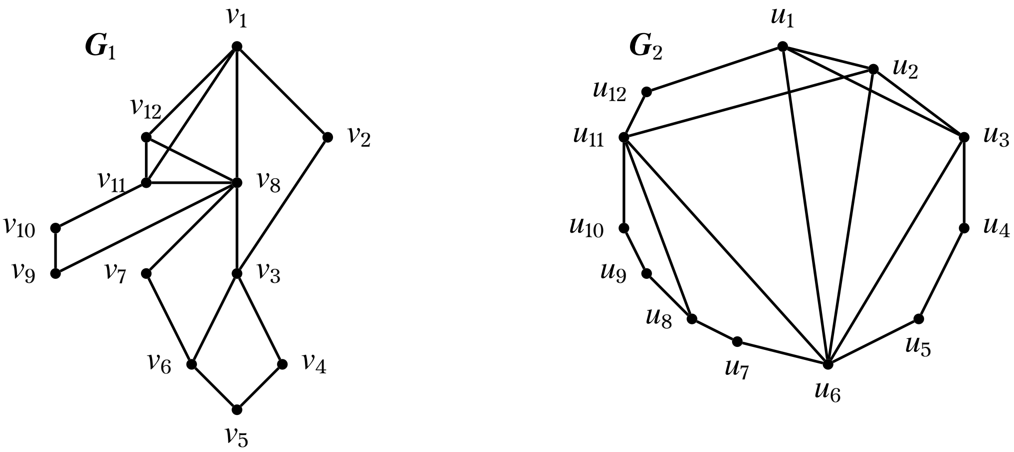
```python
import networkx as nx
G1 = nx.Graph()
G1.add_nodes_from(range(1,8))
G1.add_edges_from([[1,2],[1,3],[1,6],[1,7],[2,3],[2,7],
                   [3,4],[3,7],[4,5],[4,6],[4,7],[5,6],[6,7]])
G2 = nx.Graph()
G2.add_nodes_from(range(1,8))
G2.add_edges_from([[1,2],[1,5],[1,4],[1,6],[2,3],[2,6],
                   [2,7],[3,4],[3,6],[3,7],[4,5],[4,6],[6,7]])
#Test whether the graphs are isomorphic
GM = nx.isomorphism.GraphMatcher(G1,G2)
if GM.is_isomorphic():  #If G1, G2 are isomorphic
    print("The graphs are isomorphic")
    print("An isomorphism between them is the following:")
    for i in G1:
        print("v",i,"->","u",GM.mapping[i])
    print(GM.mapping)
else:
    print("The graphs are not isomorphic")
```

Output:

```
The graphs are isomorphic
An isomorphism between them is the following:
v 1 -> u 3
v 2 -> u 7
v 3 -> u 2
v 4 -> u 1
v 5 -> u 5
v 6 -> u 4
v 7 -> u 6
{4: 1, 3: 2, 1: 3, 6: 4, 5: 5, 7: 6, 2: 7}
```

Παρατήρηση: *Παρατηρήστε ότι ο αλγόριθμος ανακάλυψε έναν διαφορετικό ισομορφισμό από αυτόν που δίνεται στην λύση της άσκησης.*

*(*ii*)*

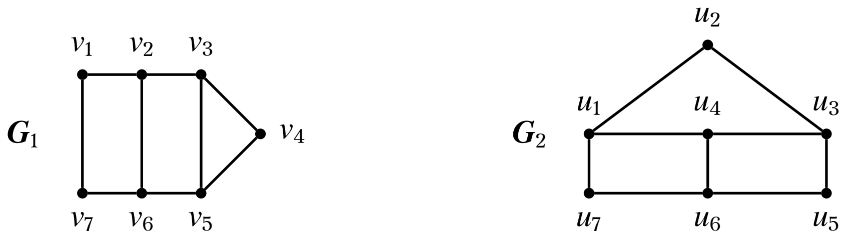


Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι έχουν διαφορετικές ακολουθίες βαθμών.

Ακολουθία βαθμών του G_1: $(6, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

Ακολουθία βαθμών του G_2: $(6, 5, 4, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$. $\square$

(iii)



Λύση. Δεν είναι ισόμορφα: Το G_1 περιέχει κύκλο μήκους 3 ενώ το G_2 όχι. □

Μπορούμε να ελέγξουμε αν τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα χρησιμοποιώντας την μέθοδο `GraphMatcher` *της βιβλιοθήκης networkx.*

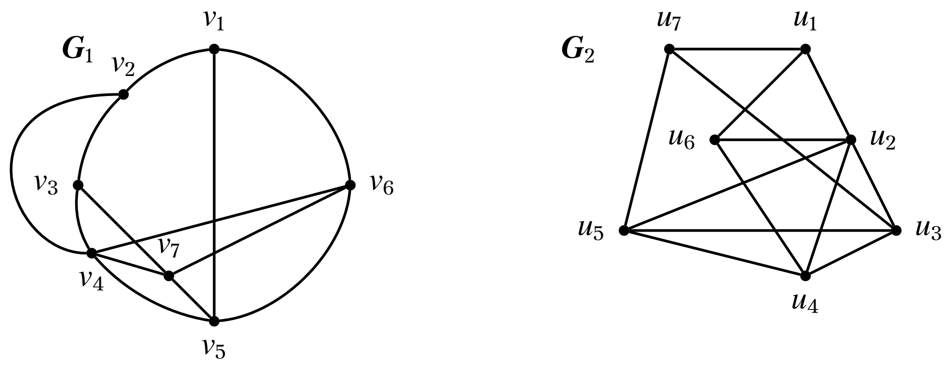
```
import networkx as nx
G1 = nx.Graph()
G1.add_nodes_from(range(1,8))
G1.add_edges_from([[1,2],[1,7],[2,3],[2,6],[3,4],[3,5],[4,5],[5,6],[6,7]])
G2 = nx.Graph()
G2.add_nodes_from(range(1,8))
G2.add_edges_from([[1,2],[1,4],[1,7],[2,3],[3,4],[3,5],[4,6],[5,6],[6,7]])
#Test whether the graphs are isomorphic
GM = nx.isomorphism.GraphMatcher(G1,G2)
if GM.is_isomorphic():  #If G1, G2 isomorphic? then
    print("The graphs are isomorphic")
    print("An isomorphism between them is the following:")
    for i in G1:
        print("v",i,"->","u",GM.mapping[i])
    print(GM.mapping)
else:
    print("The graphs are not isomorphic")
    print("Degree sequence of G1:",sorted((d for n, d in G1.degree()),
   reverse=True))
    print("Degree sequence of G2:",sorted((d for n, d in G2.degree()),
   reverse=True))
```

Output:

```
The graphs are not isomorphic
Degree sequence of G1: [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2]
Degree sequence of G2: [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2]
```

Παρατήρηση: *Παρατηρήστε ότι παρόλο που τα γραφήματα είναι μη ισόμορφα έχουν την ίδια ακολουθία βαθμών. Στην περίπτωση όπου τα δύο γραφήματα δεν είναι ισόμορφα, η μέθοδος* `GraphMatcher` *δεν μας δίνει κάποια εξήγηση γιατί συμβαίνει αυτό.*

(iv)

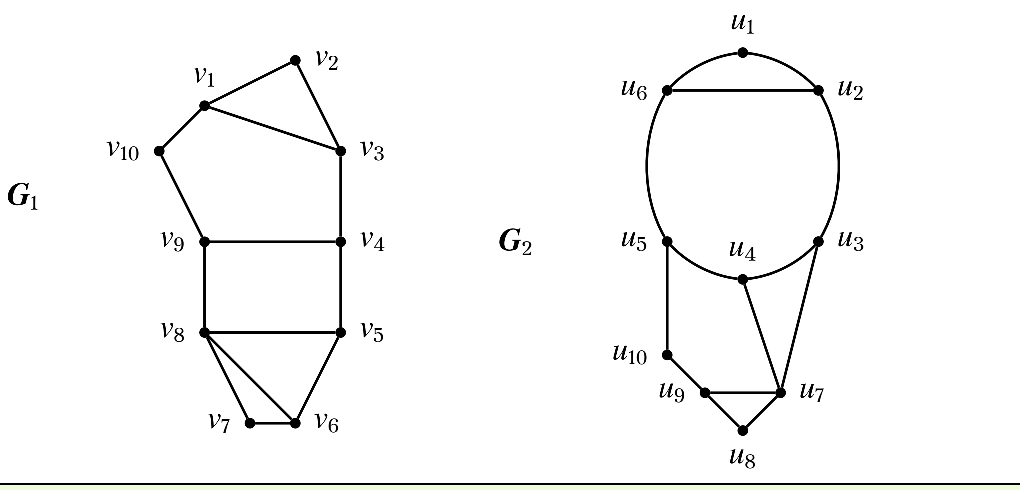


Λύση. Τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα. Ένας ισομορφισμός f είναι ο εξής:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= u_7 \\ f(v_2) &= u_1 \\ f(v_3) &= u_6 \\ f(v_4) &= u_2 \\ f(v_5) &= u_5 \\ f(v_6) &= u_3 \\ f(v_7) &= u_4 \end{aligned}$$

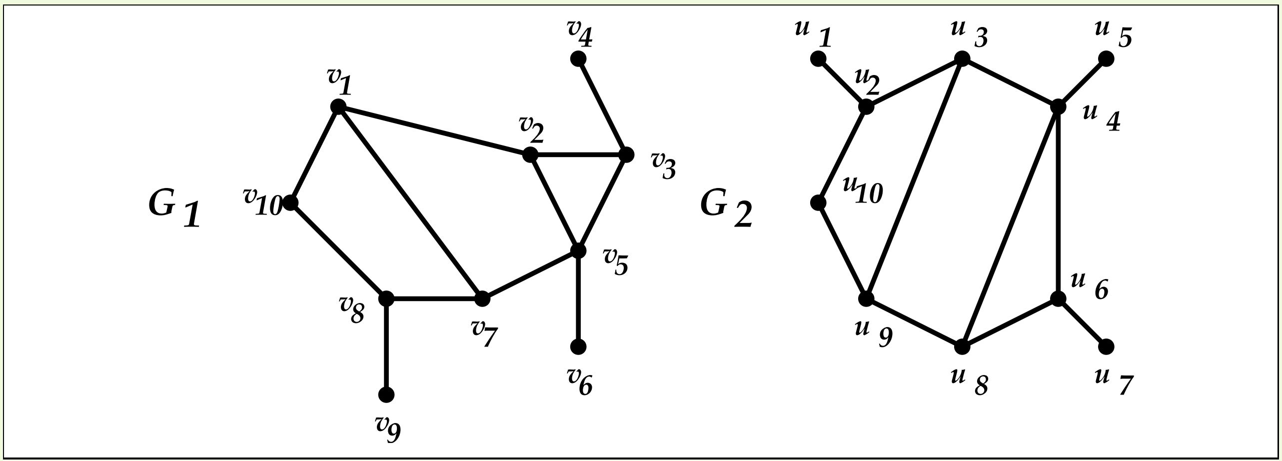
□

(v)



Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι το G_1 περιέχει κύκλο μήκους 4 ενώ το G_2 όχι. □

(vi)

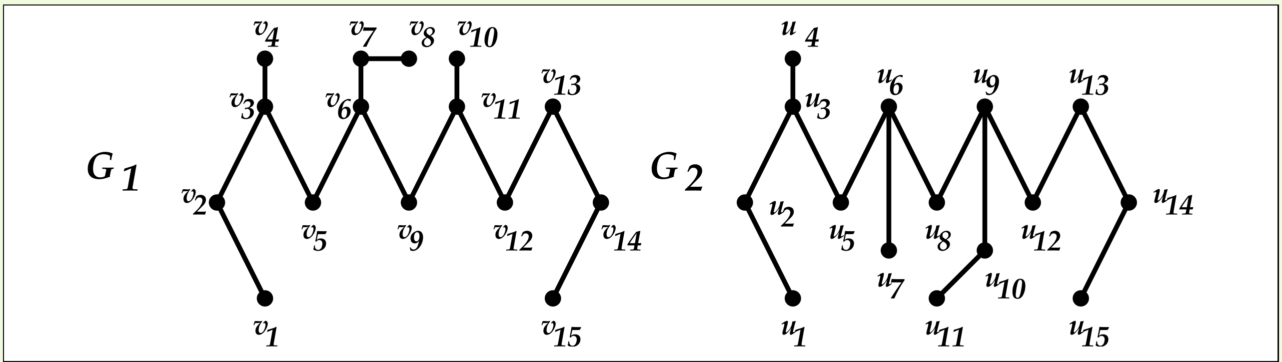


Λύση. Τα G_1, G_2 είναι ισόμορφα. Ένας ισομορφισμός f είναι ο εξής:

$$
\begin{aligned}
f(v_1) &= u_9\\
f(v_2) &= u_8\\
f(v_3) &= u_6\\
f(v_4) &= u_7\\
f(v_5) &= u_4\\
f(v_6) &= u_5\\
f(v_7) &= u_3\\
f(v_8) &= u_2\\
f(v_9) &= u_1\\
f(v_{10}) &= u_{10}
\end{aligned}
$$

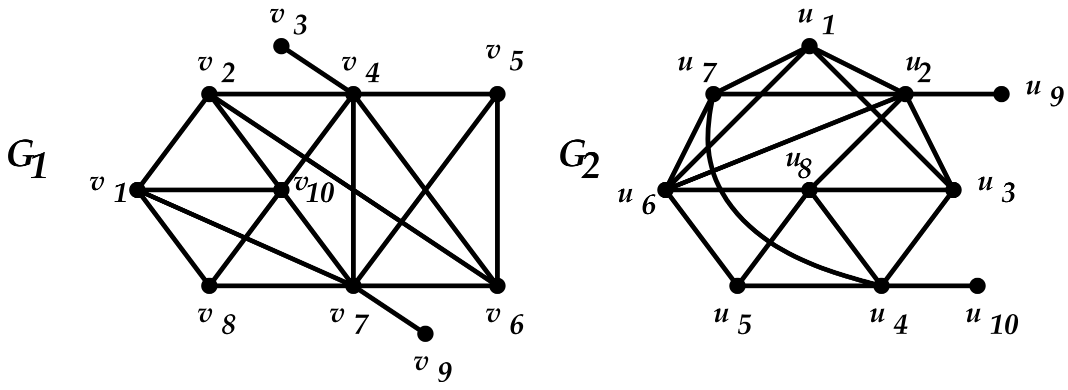
□

(vii)



Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι στο G_2 υπάρχουν κορυφές βαθμού 1 που απέχουν απόσταση 4 (οι u_4 και u_7) ενώ στο G_1 όχι. □

(viii)



Λύση. Τα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα, διότι στο G_2 υπάρχει κορυφή βαθμού 1 η οποία συνδέεται με κορυφή βαθμού 5, ενώ στο G_1 δεν υπάρχουν τέτοιες κορυφές. □

Άσκηση 1.2. *Να εξετασθεί αν υπάρχουν γραφήματα δεσμών με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών.*

(i) $(4, 4, 3, 3, 2, 2, 1)$.

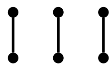
Λύση. Δεν υπάρχει διότι το άθροισμα των όρων της ακολουθίας είναι περιττός αριθμός. □

(ii) $(5, 3, 2, 2, 2)$.

Λύση. Δεν υπάρχει σε ένα γράφημα με 5 κορυφές ο μέγιστος βαθμός είναι το πολύ 4. □

(iii) $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Λύση. Υπάρχει. Είναι το γράφημα:



□

(iv) $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

Λύση. Υπάρχει. Για παράδειγμα ο C_7. □

(v) $(7,7,5,5,3,3,2,2,1,1)$

Λύση. Από το θεώρημα Havel - Hakimi έχουμε ότι υπάρχει τέτοιο γράφημα αν και μόνο αν υπάρχουν γραφήματα με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών:

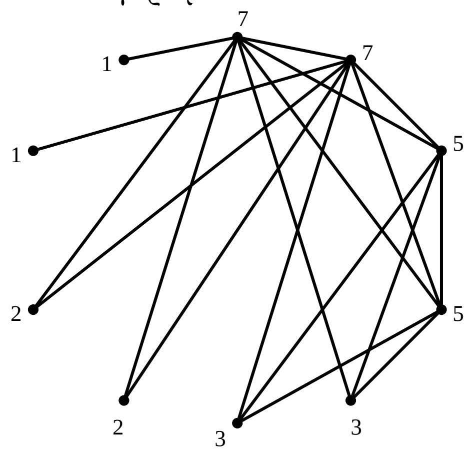
$(7-1,5-1,5-1,3-1,3-1,2-1,2-1,1,1)=(6,4,4,2,2,1,1,1,1)$

$(4-1,4-1,2-1,2-1,1-1,1-1,1,1)=(3,3,1,1,0,0,1,1)=(3,3,1,1,1,1,0,0)$

$(3-1,1-1,1-1,1,1,0,0)=(2,0,0,1,1,0,0)=(2,1,1,0,0,0,0)$

$(1-1,1-1,0,0,0,0)=(0,0,0,0,0,0)$, (μηδενικό γράφημα με 6 κορυφές)

Επομένως, υπάρχει γράφημα με αυτή την ακολουθία βαθμών. Ένα τέτοιο γράφημα μπορεί κατασκευασθεί με τον αλγόριθμο των Havel - Hakimi και είναι το επόμενο:



□

(vi) $(7,7,7,3,3,2,1,1,1)$

Λύση. Από το θεώρημα Havel - Hakimi έχουμε ότι υπάρχει τέτοιο γράφημα αν και μόνο αν υπάρχουν γραφήματα με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών:

$(7-1,7-1,3-1,3-1,2-1,1-1,1-1,1)=(6,6,2,2,1,0,0,1)=(6,6,2,2,1,1,0,0)$

$(6-1,2-1-2-1,1-1,1-1,0-1,0,0)=(5,1,1,0,0,-1,0)$

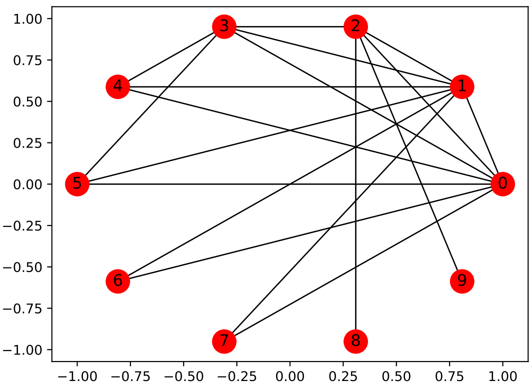
Επομένως, δεν υπάρχει γράφημα με αυτή την ακολουθία βαθμών. □

Για τον έλεγχο ύπαρξης και κατασκευής ενός γραφήματος με συγκεκριμένη ακολουθία βαθμών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους is_graphical *και* havel_hakimi_graph *της βιβλιοθήκης networkx.*

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

def Graph_Check(Seq):
    if nx.is_graphical(Seq):
        print("The sequence",Seq,"is graphical")
        G = nx.havel_hakimi_graph(Seq)
        print("The adjacency matrix of graph having this degree sequence
   is:")
        print(nx.adjacency_matrix(G).todense())
        pos = nx.circular_layout(G)
        nx.draw_networkx(G,pos)
        plt.show()
    else:
        print("The sequence",Seq,"is NOT graphical")
    print("")

Seq1 = [7,7,5,5,3,3,2,2,1,1]
Seq2 = [7,7,7,3,3,2,1,1,1]

Graph_Check(Seq1)
Graph_Check(Seq2)
```

Output:

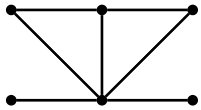
```
The sequence [7, 7, 5, 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1] is graphical
The adjacency matrix of graph having this degree sequence is:
[[0 1 1 1 1 1 1 1 0 0]
 [1 0 1 1 1 1 1 1 0 0]
 [1 1 0 1 0 0 0 0 1 1]
 [1 1 1 0 1 1 0 0 0 0]
 [1 1 0 1 0 0 0 0 0 0]
 [1 1 0 1 0 0 0 0 0 0]
 [1 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
 [1 1 0 0 0 0 0 0 0 0]
 [0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]
 [0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]]
```




```
The sequence [7, 7, 7, 3, 3, 2, 1, 1, 1] is NOT graphical
```

(vii) $(5,3,2,2,1,1)$.

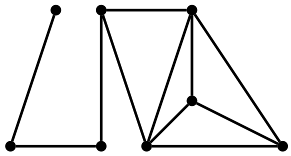
Λύση. Υπάρχει. Είναι το γράφημα:



□

(viii) $(4,4,3,3,3,2,2,1)$.

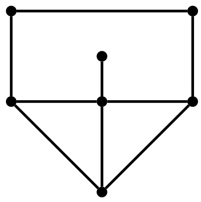
Λύση. Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:



□

(ix) $(4,3,3,3,2,2,1)$.

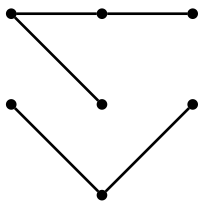
Λύση. Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:



□

(x) $(2,2,2,1,1,1,1)$

Λύση. Υπάρχει. Ένα τέτοιο γράφημα είναι το εξής:



□

Άσκηση 1.3.

i) *Να βρεθεί ο αριθμός των δεσμών του K_n (πλήρες γράφημα με n κορυφές).*

Λύση. Το K_n περιέχει n κορυφές και ο βαθμός κάθε κορυφής του K_n ισούται με $n-1$. Από τον τύπο

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$$

προκύπτει ότι

$$2|E(K_n)| = \sum_{i=1}^{n}(n-1) = n(n-1) \Leftrightarrow |E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

Παρατήρηση: Ο αριθμός των δεσμών του K_n ισούται με τον αριθμό των ζευγών των κορυφών του. Υπάρχουν $\binom{n}{2}$ ζεύγη κορυφών, οπότε $|E(K_n)| = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. □

ii) *Έστω $G = (V, E)$ ένα d-κανονικό γράφημα με $|V| = n$. Να βρεθεί το $|E|$.*

Λύση. Από τον τύπο

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v)$$

προκύπτει ότι

$$2|E| = \sum_{i=1}^{n} d = nd \Leftrightarrow |E| = \frac{dn}{2}$$ □

iii) *Έστω $G = (V, E)$ με $|V| = n$ και $|E| = k$. Να βρεθεί ο αριθμός των δεσμών του G^c (συμπλήρωμα του G).*

Λύση. Έστω $G^c = (V, E^c)$. Για κάθε $v, u \in V$ με $v \neq u$ ισχύει ότι

$$\text{ή } \{v, u\} \in E \text{ ή } \{v, u\} \in E^c$$

Επομένως, επειδή υπάρχουν $\binom{n}{2}$ ζεύγη κορυφών του V έπεται ότι

$$\sum_{\substack{v,u \in V \\ v \neq u}} 1 = \binom{n}{2}$$

$$\sum_{\{v,u\} \in E} 1 + \sum_{\{v,u\} \in E^c} 1 = \binom{n}{2}$$

$$|E| + |E^c| = \binom{n}{2}$$

Άρα,

$$|E^c| = \binom{n}{2} - |E| = \binom{n}{2} - k$$ □

iv) *Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται **αυτοσυμπληρωματικό** αν $G \simeq G^c$. Να δειχθεί ότι $|V| \equiv 0 \pmod 4$ ή $|V| = 1 \pmod 4$.*

Λύση. Αν $G \simeq G^c$ έπεται ότι $|E(G)| = |E(G^c)| = |E|$. Από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει ότι

$$|E(G^c)| = \binom{|V|}{2} - |E(G)| \Leftrightarrow |E| = \binom{|V|}{2} - |E| \Leftrightarrow 2|E| = \frac{|V|(|V|-1)}{2} \Leftrightarrow$$
$$4|E| = |V|(|V|-1) \Leftrightarrow |V|(|V|-1) \equiv 0 \pmod 4$$

Άρα, ή $|V| \equiv 0 \pmod 4$, ή $(|V|-1) \equiv 0 \pmod 4$. Ισοδύναμα

$$\text{ή } |V| \equiv 0 \pmod 4, \text{ ή } |V| \equiv 1 \pmod 4$$ □

Άσκηση 1.4. *Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα δεσμών, με $|V| \geqslant 2$. Να δειχθεί ότι αν $|V| > |E|$, τότε το G θα περιέχει τουλάχιστον ένα κόμβο βαθμού 1.*

Λύση. Επειδή το G είναι συνεκτικό $d(v) \geqslant 1$ για κάθε $v \in V$.

Έστω ότι δεν υπάρχει $v \in V$ με $d(v) = 1$, τότε $d(v) \geqslant 2$ για κάθε $v \in V$.

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \geqslant \sum_{v \in V} 2 = 2|V| > 2|E|,$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, υπάρχει $v \in G$ με $d(v) = 1$. □

Άσκηση 1.5. *Να αποδειχθεί ότι σε κάθε γράφημα δεσμών $G = (V, E)$, με $|V| \geqslant 2$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο κόμβοι με τον ίδιο βαθμό.*

Λύση. Για κάθε $v \in V$ ισχύει ότι $0 \leqslant d(v) \leqslant |V| - 1$.

Παρατηρούμε ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν ταυτόχρονα κόμβοι $v, v' \in V$ με $d(v) = 0$ και $d(v') = |V| - 1$.

Άρα, είτε $0 \leqslant d(v) \leqslant |V| - 2$ για κάθε $v \in V$, είτε $1 \leqslant d(v) \leqslant |V| - 1$ για κάθε $v \in V$.

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχουν $|V| - 1$ δυνατές τιμές βαθμών κόμβων για τους $|V|$ κόμβους του γραφήματος G, οπότε από την αρχή του περιστερεώνα έπεται το ζητούμενο. □

Άσκηση 1.6. *Να δειχθεί ότι αν ένα γράφημα δεσμών $G = (V, E)$ έχει $|V| = 2n$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$ και όλοι οι κόμβοι του είναι βαθμού n, τότε είναι συνεκτικό.*

Λύση. Έστω ότι το G είναι μη συνεκτικό. Υπάρχουν τουλάχιστον 2 κορυφές v_1, v_2 που ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες G_1, G_2 του G.

Επειδή $d(v_1) = d(v_2) = n$ έπεται ότι $|V(G_1)|, |V(G_2)| \geqslant n+1$ όπου $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Επομένως $|V| \geqslant |V(G_1)| + |V(G_2)| \geqslant n+1+n+1 = 2n+2$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, το G είναι συνεκτικό. □

Άσκηση 1.7. *Να σχεδιασθεί ένα κυβικό γράφημα (V, E) με $|V| = 2n$ (για κάποιο $n \geqslant 3$), το οποίο να μην περιέχει τρίγωνα.*

Λύση. Ένας κύβος με 8 κορυφές. □