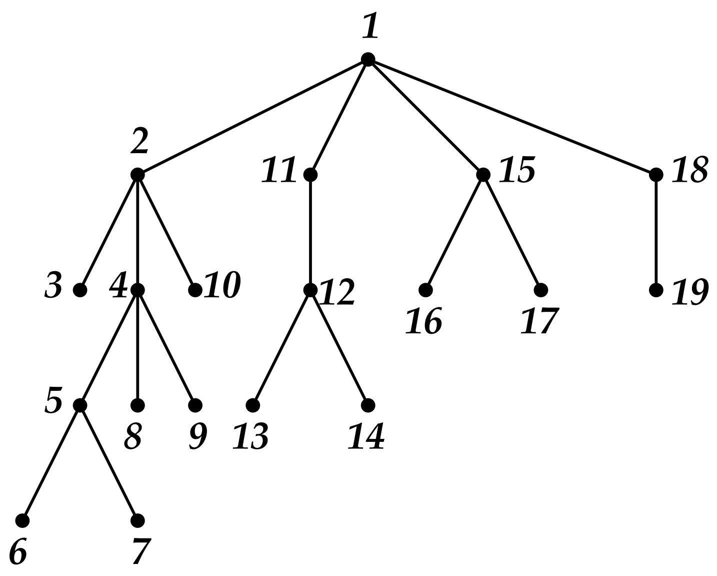
1.4.2 Διάσχιση διατεταγμένων δένδρων

1) Προδιάταξη

Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο πριν διασχίσουμε (σύμφωνα με τη διάταξή τους) τα δένδρα-παιδιά του σε προδιάταξη. Δηλαδή πρώτα τον γονέα και έπειτα τα δένδρα παιδιά του (από το πρώτο προς το τελευταίο).

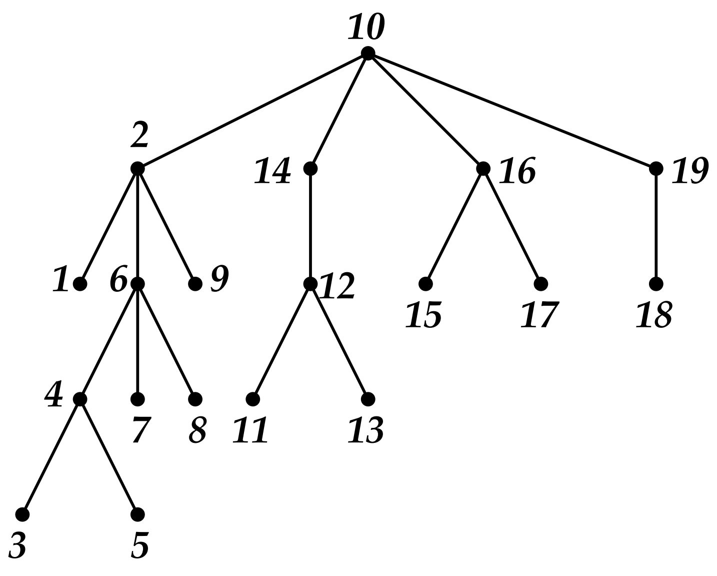
Παράδειγμα:



2) Ενδοδιάταξη

Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο αφού διασχίσουμε σε ενδοδιάταξη το πρώτο δένδρο-παιδί και πριν διασχίσουμε (σύμφωνα με την διάταξή τους) τα υπόλοιπα δένδρα-παιδιά του σε ενδοδιάταξη. Δηλαδή πρώτα το πρώτο δένδρο-παιδί, μετά τον γονέα κι έπειτα τα υπόλοιπα δένδρα-παιδιά του (από το δεύτερο προς το τελευταίο).

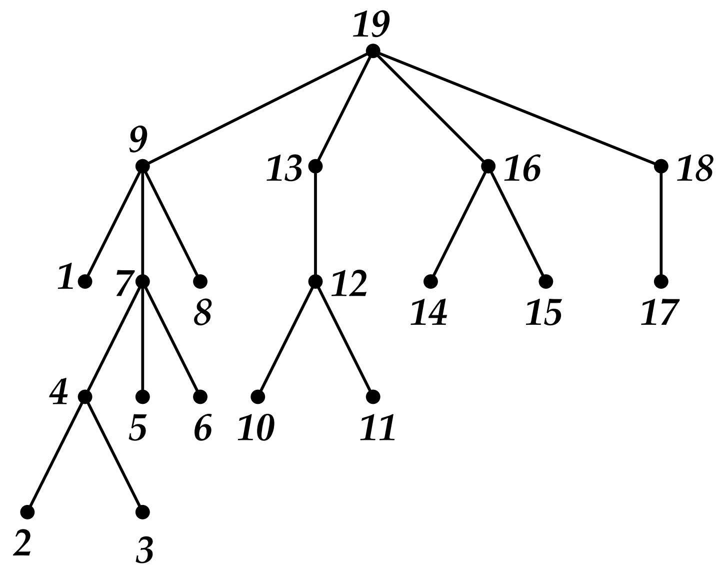
Παράδειγμα:



3) Μεταδιάταξη

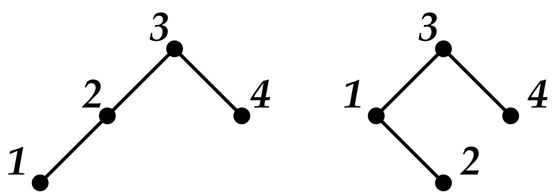
Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο αφού διασχίσουμε (σύμφωνα με τη διάταξή τους) τα δένδρα-παιδιά του σε μεταδιάταξη. Δηλαδή πρώτα τα δένδρα-παιδιά (από το πρώτο προς το τελευταίο) και έπειτα τον γονέα.

Παράδειγμα:

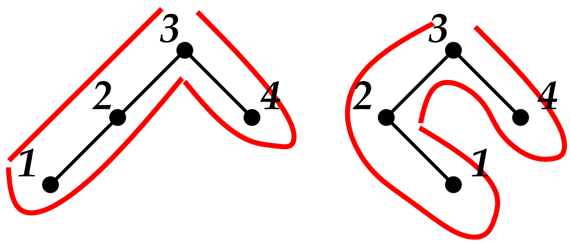


Παρατήρηση: Μπορούμε να αριθμήσουμε τα διατεταγμένα δένδρα σε προδιάταξη και μεταδιάταξη με πρακτικό τρόπο, αντίστοιχα με τα δυαδικά δένδρα. Ο πρακτικός τρόπος για την ενδοδιάταξη των διατεταγμένων δένδρων όμως είναι διαφορετικός: Αριθμούμε τον κάθε κόμβο τη δεύτερη φορά που τον συναντάμε, εκτός αν είναι φύλλο, οπότε τον αριθμούμε την πρώτη φορά. Η διαφορά αυτή οφείλεται στο ότι στα δυαδικά δένδρα, στην περίπτωση γονέα με μοναδικό παιδί η σειρά αρίθμησης τους δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη. Αν το παιδί είναι αριστερό παιδί τότε προηγείται του γονέα ενώ αν είναι δεξιό τότε έπεται του γονέα.

Έτσι για παράδειγμα, ενώ η ενδοδιάταξη και στα δύο παρακάτω δυαδικά δένδρα δίνει



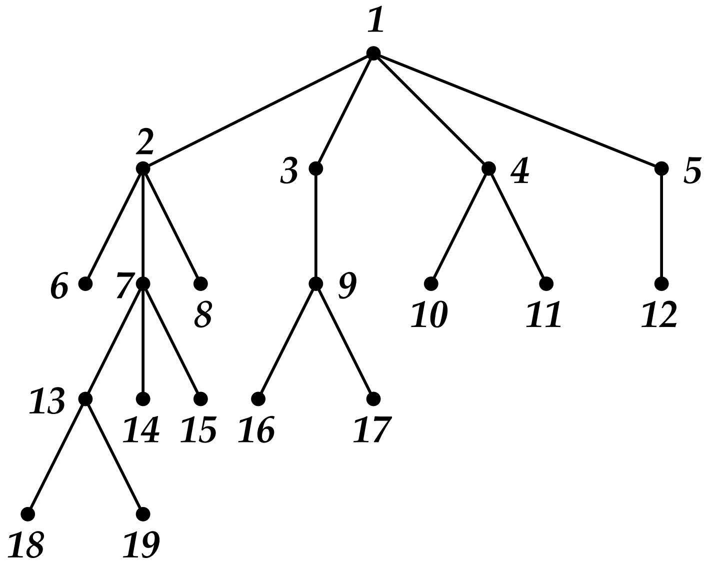
ο πρακτικός τρόπος θα έδινε αντίστοιχα



με το δεύτερο δένδρο να δίνει διαφορετική ενδοδιάταξη από ό,τι ο ορισμός.

4. Διάταξη κατά επίπεδα

Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) τους κόμβους κατά επίπεδο (από το μικρότερο επίπεδο στο μεγαλύτερο), όπου σε κάθε επίπεδο επισκεπτόμαστε τους κόμβους από τα αριστερά προς τα δεξιά.
Παράδειγμα:

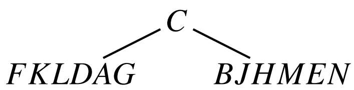


Παρατήρηση: Οι διασχίσεις των δένδρων (δυαδικών, ή διατεταγμένων) σύμφωνα με οποιαδήποτε από τις παραπάνω διατάξεις γενικεύονται προφανώς στα διατεταγμένα δάση, διασχίζοντας σύμφωνα με τη συγκριμένη κάθε φορά διάταξη το πρώτο δένδρο του διατεταγμένου δάσους, ακολούθως το δεύτερο δένδρο, κ.ο.κ.

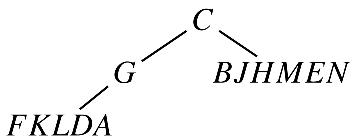
Άσκηση 1.22. *Να βρεθεί το δυαδικό δένδρο T με ετικέτες A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L, M, N του οποίου οι διασχίσεις σε προδιάταξη και ενδοδιάταξη είναι αντίστοιχα*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
προδιάταξη:	C	G	D	K	F	L	A	J	B	H	E	M	N
ενδοδιάταξη:	F	K	L	D	A	G	C	B	J	H	M	E	N

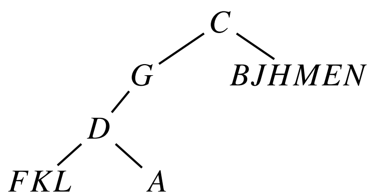
Λύση. Επειδή το 1ο στοιχείο σε προδιάταξη είναι το C, έπεται ότι το C είναι η ρίζα του δένδρου. Στην ενδοδιάταξη το C βρίσκεται στην 7η θέση, άρα οι κορυφές με ετικέτες F,K,L,D,A,G περιέχονται στο αριστερό υποδένδρο του C, ενώ οι υπόλοιπες κορυφές (με ετικέτες B,J,H,M,E,N) περιέχονται στο δεξιό υποδένδρο του C.



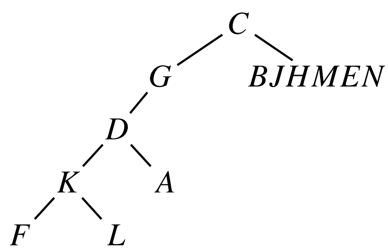
Επειδή το 2ο στοιχείο σε προδιάταξη είναι το G έπεται ότι το G είναι ρίζα του αριστερού υποδενδρου του C. Από την ενδοδιάταξη συμπεραίνουμε το αριστερό υποδένδρο του G αποτελείται από τις κορυφές με ετικέτες F,K,L,D,A, ενώ το δεξιό υποδένδρο του είναι κενό.



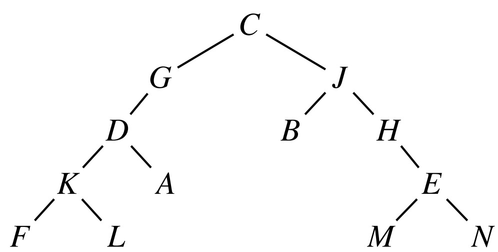
Επειδή το 3ο στοιχείο σε προδιάταξη είναι το D έπεται ότι το D είναι ρίζα του αριστερού υποδενδρου του G. Από την ενδοδιάταξη συμπεραίνουμε το αριστερό υποδένδρο του D αποτελείται από τις κορυφές με ετικέτες F,K,L, ενώ το δεξιό υποδένδρο του αποτελείται από την κορυφή A.



Επειδή το 4ο στοιχείο σε προδιάταξη είναι το K έπεται ότι το K είναι ρίζα του αριστερού υποδενδρου του D. Από την ενδοδιάταξη συμπεραίνουμε το αριστερό υποδένδρο του K αποτελείται από τις κορυφή F, ενώ το δεξιό υποδένδρο του αποτελείται από την κορυφή L.



Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο προκύπτει τελικά το δυαδικό δένδρο



□

Άσκηση 1.19. *Να βρεθεί ο αριθμός των δένδρων ενός δάσους F με n κόμβους και m δεσμούς, όπου $n > m$.*

Λύση. Έστω ότι το δάσος F περιέχει k δένδρα $T_1, T_2, \ldots, T_k$. Προφανώς, $|V(F)| = |V(T_1)| + |V(T_2)| + \cdots + |V(T_k)|$ και $|E(F)| = |E(T_1)| + |E(T_2)| + \cdots + |E(T_k)|$. Για κάθε δένδρο T_i, $i \in [k]$ ισχύει ότι

$$|V(T_i)| = |E(T_i)| + 1$$

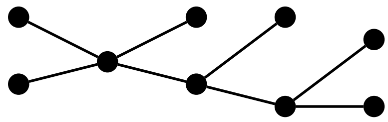
Αθροίζοντας για κάθε $i \in [k]$ προκύπτει ότι

$$|V(T_1)|+|V(T_2)|+\cdots+|V(T_k)| = |E(T_1)|+|E(T_2)|+\cdots+|E(T_k)|+k \Leftrightarrow |V(F)| = |E(F)|+k \Leftrightarrow n = m+k.$$

Άρα, το δάσος περιέχει $k = n - m$ δένδρα. □

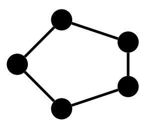
Άσκηση 1.20. *Να βρεθεί το πλήθος των γενετικών δένδρων των παρακάτω γραφημάτων:*

i) T

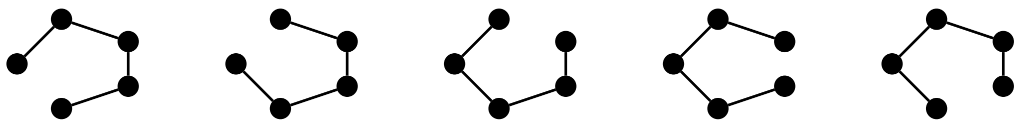


Λύση. Το T έχει 1 γενετικό δένδρο, τον εαυτό του. □

ii) C_5



Λύση. Το C_5 έχει 5 γενετικά δένδρα:

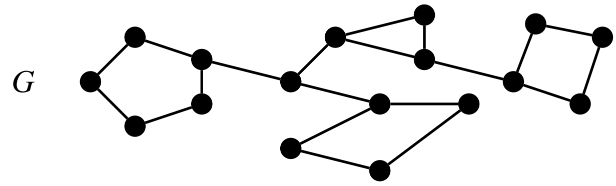


□

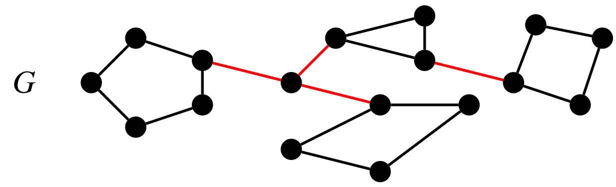
iii) C_n

Λύση. Το C_n έχει n γενετικά δένδρα. Το καθένα προκύπτει σβήνοντας ακριβώς ένα δεσμό του C_n. □

iv)

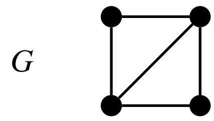


Λύση. Οι γέφυρες του γραφήματος (δεσμοί που είναι σημειωμένοι με κόκκινο) πρέπει να ανήκουν σε όλα τα γενετικά δένδρα.

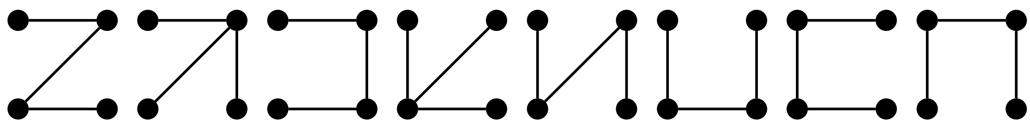


Σε κάθε ένα από τους 4 κύκλους που εμφανίζονται στο G μπορούμε να επιλέξουμε ανεξάρτητα ένα γενετικό δένδρο τους, οι δεσμοί του οποίου περιέχονται στο γενετικό δένδρο του G. Επομένως, το G έχει $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 240$ γενετικά δένδρα. □

v)



Λύση. Το G έχει 4 κορυφές άρα κάθε γενετικό δένδρο του πρέπει να περιέχει 3 δεσμούς. Υπάρχουν 5 δεσμοί στο G από τους οποίους πρέπει να επιλέξουμε 3. Άρα, ο αριθμός των γενετικών δένδρων του G είναι το πολύ $\binom{5}{3} = 10$. Όμως, κάποιες τριάδες δεσμών του G δεν αντιστοιχούν σε δένδρο. Οπότε τελικά έχουμε τα παρακάτω 8 γενετικά δένδρα του G.



□

Παρατήρηση: *Για το πλήθος των γενετικών δένδρων ενός γραφήματος G υπάρχει τύπος που απαιτεί τον υπολογισμό μιας ορίζουσας (matrix-tree theorem). Η πολυπλοκότητα του τύπου είναι πολυωνυμική ως προς τον αριθμό των κορυφών του γραφήματος.*