Ασκήσεις στις ασυμπτωτικές ισοδυναμίες

- $f(n) \sim g(n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 1.$
- **Τύπος του Stirling**: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n.$
- **Λήμμα του Stolz**: Αν (a_n), (A_n) είναι ακολουθίες αριθμών και (A_n) είναι γνησίως αύξουσα, θετική και όχι άνω φραγμένη και
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$
τότε
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = l.$$
- Χρήσιμοι τύποι:
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = e^a$ και $(n+a)^{n+b} \sim e^a n^{n+b}$
  - $\dbinom{2n-r}{n-s} \sim \dfrac{4^n}{2^r\sqrt{\pi n}}$ και $C_n \sim \dfrac{4^n}{n\sqrt{\pi n}}$

Άσκηση 1. *Να βρεθούν ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τις επόμενες εκφράσεις:*

i) $(5n)!$

Λύση. Από τον τύπο του Stirling ισχύει ότι

$$(5n)! \sim \sqrt{2\pi 5n}\left(\frac{5n}{e}\right)^{5n} = \sqrt{10\pi n}\left(\frac{5n}{e}\right)^{5n} \qquad \square$$

ii) $(3n)!/(2n)!$

Λύση. Από τον τύπο του Stirling ισχύει ότι

$$\frac{(3n)!}{(2n)!} \sim \frac{\sqrt{2\pi 3n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}}{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{\frac{3^3n^3}{e^3}}{\frac{2^2n^2}{e^2}}\right)^{n}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{27n}{4e}\right)^{n}$$

$\square$

iii) $\sqrt{(3n+7)(5n+2)}$

Λύση. Θα δείξουμε ότι

$$\sqrt{(3n+7)(5n+2)} \sim \sqrt{15}n.$$

(1ος τρόπος)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(3n+7)(5n+2)}}{\sqrt{15}n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n(1+\frac{7}{3n})5n(1+\frac{2}{5n})}}{\sqrt{15}n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{(1+\frac{7}{3n})(1+\frac{2}{5n})} = 1\end{aligned}$$

(2ος τρόπος)

$$\sqrt{3n+7} \sim \sqrt{3n} \text{ και } \sqrt{5n+2} \sim \sqrt{5n}$$

οπότε

$$\sqrt{(3n+7)(5n+2)} \sim \sqrt{3n}\sqrt{5n} = \sqrt{15}n \qquad \square$$

iv) $(5n+3)!$

Λύση. Από τον τύπο του Stirling έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(5n+3)! &\sim \sqrt{2\pi(5n+3)}\left(\frac{5n+3}{e}\right)^{5n+3}\\ &\sim \sqrt{2\pi 5n}\left(\frac{5n+3}{e}\right)^{5n+3}\\ &\sim \sqrt{10\pi n}\left(\frac{5n+3}{e}\right)^{5n+3}\end{aligned}$$

Από τον τύπο $(n+a)^{n+b} \sim e^a n^{n+b}$

Άρα,

$$\begin{aligned}(5n+3)! &\sim \sqrt{10\pi n}e^3\left(\frac{5n}{e}\right)^{5n+3}\\ &= \sqrt{10\pi n}(5n)^3\left(\frac{5n}{e}\right)^{5n}\end{aligned}$$

Παρατήρηση: $(5n+3)! \sim (5n)!(5n)^3$

$$\begin{aligned}(5n+3)! &= (5n)!(5n+1)(5n+2)(5n+3)\\ &\sim (5n)!(5n)(5n)(5n)\end{aligned}$$

□

v) $\binom{7n}{2n}$

Λύση. Από τον τύπο του Stirling έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\binom{7n}{2n} &= \frac{(7n)!}{(2n)!(5n)!} \\
&\sim \frac{\sqrt{2\pi(7n)}\left(\frac{7n}{e}\right)^{7n}}{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi(5n)}\left(\frac{5n}{e}\right)^{5n}} \\
&= \frac{\sqrt{7}\cdot 7^{7n}}{\sqrt{2}\cdot 2^{2n}\sqrt{2\pi(5n)}\cdot 5^{5n}} \\
&= \sqrt{\frac{7}{20\pi n}}\left(\frac{7^7}{2^2\cdot 5^5}\right)^n \\
&= \sqrt{\frac{7}{20\pi n}}\left(\frac{823543}{125000}\right)^n = \sqrt{\frac{7}{20\pi n}}\,(65.8834)^n
\end{aligned}$$

□

vi) $\binom{5n+2}{3n-1}$

Λύση. Από τον τύπο του Stirling έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\binom{5n+2}{3n-1} &= \frac{(5n+2)!}{(3n-1)!(2n+3)!} \\
&= \frac{(5n)!(5n+1)(5n+2)}{(3n)!(3n-1)^{-1}(2n)!(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \\
&\sim \frac{\sqrt{2\pi 5n}\left(\frac{5n}{e}\right)^{5n}(5n)(5n)}{\sqrt{2\pi 3n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}(3n)^{-1}\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}(2n)^3} \\
&= \frac{\sqrt{5}(5^5)^n 5^2 \cdot 3}{\sqrt{12\pi n}2^3(3^3)^n(2^2)^n} \\
&= \frac{75}{8}\sqrt{\frac{5}{12\pi n}}\left(\frac{5^5}{2^2 3^3}\right)^n = \frac{75}{8}\sqrt{\frac{5}{12\pi n}}(28.9352)^n
\end{aligned}$$

□

vii) $(n+a)^{n+b}$

Λύση.

$$\begin{aligned} (n+a)^{n+b} &= n^{n+b}(1+\frac{a}{n})^{n+b} \\ &= n^{n+b}(1+\frac{a}{n})^{n}(1+\frac{a}{n})^{b} \\ &\sim n^{n+b}e^{a}\cdot 1 \\ &= e^{a}n^{n+b} \end{aligned}$$

$\square$

Άσκηση 2. *Να βρεθούν ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τα παρακάτω αθροίσματα:*

i) $\sum_{k=0}^{n} \binom{3k}{2k}$

Λύση. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα του Stolz. Θέτουμε $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{3k}{2k}$.

Θέτουμε $A_n = a_{n+1} - a_n = \binom{3(n+1)}{2(n+1)} = \binom{3n+3}{2n+2}$.

Η A_n είναι γνησίως αύξουσα, θετική και όχι άνω φραγμένη.

Θα υπολογίσουμε το όριο

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A_{n+1} - A_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{A_{n+1}}{A_n} - 1} \\
&= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} - 1}
\end{aligned}$$

Πρέπει να βρούμε το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}}{A_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{3n+6}{2n+4}}{\binom{3n+3}{2n+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(3n+6)!}{(2n+4)!(n+2)!}}{\dfrac{(3n+3)!}{(2n+2)!(n+1)!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)(3n+5)(3n+6)}{(2n+3)(2n+4)(n+2)}$$

$$=\frac{27}{4}$$

Άρα

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n}=\frac{1}{\dfrac{27}{4}-1}=\frac{4}{23}$$

Οπότε, από το Λήμμα του Stolz ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n}=\frac{4}{23}$$

Άρα,

$$a_n\sim\frac{4}{23}A_n$$

δηλαδή

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{3k}{2k}\sim\frac{4}{23}\binom{3n+3}{2n+2}$$

Τέλος, από τον τύπο του Stirling προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&\binom{3n+3}{2n+2} \\
&\sim \frac{\sqrt{2\pi(3n+3)}\left(\frac{3n+3}{e}\right)^{3n+3}}{\sqrt{2\pi(2n+2)}\left(\frac{2n+2}{e}\right)^{2n+2}\sqrt{2\pi(n+1)}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}} \\
&\sim \frac{\sqrt{3}\cdot(3n+3)^{3n+3}}{\sqrt{2}\cdot(2n+2)^{2n+2}\sqrt{2\pi(n+1)}(n+1)^{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{3}\cdot 3^{3n+3}(n+1)^{3n+3}}{\sqrt{2}\cdot 2^{2n+2}\cdot(n+1)^{2n+2}\sqrt{2\pi(n+1)}(n+1)^{n+1}} \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi(n+1)}}\frac{3^{3n+3}}{2^{2n+2}} \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi(n+1)}}\left(\frac{3^3}{2^2}\right)^{n+1} \\
&\sim \sqrt{\frac{3}{4\pi n}}\left(\frac{27}{4}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

άρα καταλήγουμε ότι

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{3k}{2k} \sim \frac{4}{23}\sqrt{\frac{3}{4\pi n}}\left(\frac{27}{4}\right)^{n+1} = \frac{27\sqrt{3}}{46\sqrt{\pi n}}\left(\frac{27}{4}\right)^{n}$$

□

ii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}$

Λύση. Θέτουμε $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}$.

Θέτουμε $A_n = a_{n+1} - a_n = \binom{2n+2}{n+1}$

Η A_n είναι γνησίως αύξουσα, θετική και όχι άνω φραγμένη.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A_{n+1}-A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{A_{n+1}}{A_n}-1}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n}-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{2n+4}{n+2}}{\binom{2n+2}{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+4)!}{(n+2)!(n+2)!}}{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(2n+4)}{(n+2)(n+2)} = 4$$

Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

Από το Λήμμα του Stolz έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = \frac{1}{3}$$

οπότε

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \sim \frac{1}{3}\binom{2n+2}{n+1}$$

Από τον γνωστό τύπο $\binom{2n-r}{n-s} \sim \dfrac{4^n}{2^r\sqrt{\pi n}}$ έπεται ότι

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \sim \frac{1}{3}\frac{4^n}{2^{-2}\sqrt{\pi n}} = \frac{4}{3}\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \qquad \square$$