1η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΑΝΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- Εξισώσεις διαφορών
- Αναγωγικές εξισώσεις
- Γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές
  - Επίλυση της ομογενούς εξίσωσης
    - Εύρεση βασικών λύσεων
    - Μιγαδικοί αριθμοί - Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες
    - Σχήμα Horner
    - Ρητές ρίζες πολυωνύμων

Εξισώσεις Διαφορών

Κάθε συναρτησιακή εξίσωση στην οποία εμφανίζονται η ανεξάρτητη μεταβλητή x, η εξαρτημένη μεταβλητή $y(x)$ (δηλαδή η άγνωστη συνάρτηση) και n διαφορές της $\Delta y(x), \Delta^2 y(x), \dots, \Delta^n y(x)$ ονομάζεται **εξίσωση διαφορών** n**-τάξεως**.
Στα επόμενα θα γράφουμε y_x αντί για $y(x)$.
Παράδειγμα

$$\Delta^3 y_x - 2\Delta^2 y_x + 5\Delta y_x + 7y_x = 3\cos x.$$

Αν υποθέσουμε ότι y_x είναι μια συνάρτηση, όπου ο y_{x+n} εκφράζεται συναρτήσει των προηγούμενων n όρων $y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+n-1}$ δηλαδή ισχύει

$$y_{x+n} = F(y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+n-1}) \tag{1}$$

για κάθε x, τότε η σχέση (1) ορίζει μια συναρτησιακή εξίσωση με άγνωστη τη συνάρτηση y_x που την ικανοποιεί.
Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **αναγωγική εξίσωση** n**-τάξεως**.
Με άλλα λόγια, η αναγωγική εξίσωση είναι μια συναρτησιακή εξίσωση στην οποία εμφανίζονται η ανεξάρτητη μεταβλητή x και ορισμένες διαδοχικές τιμές $y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+n}$ της άγνωστης συνάρτησης.
Παράδειγμα

$$y_{x+3} - 5y_{x+2} + 12y_{x+1} - y_x = 3\cos x.$$

Εξισώσεις διαφορών και αναγωγικές εξισώσεις

Εκφράζοντας κάθε διαφορά $\Delta^k y_x$ ως γραμμικό συνδυασμό των

$$y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+n}$$

σύμφωνα με τον τύπο

$$\Delta^n y_x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y_{x+n-k}$$

η εξίσωση διαφορών μετατρέπεται σε μια αναγωγική εξίσωση.

Έτσι, αν θέσουμε

$$\begin{aligned} \Delta y_x &= y_{x+1} - y_x \\ \Delta^2 y_x &= y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x \\ \Delta^3 y_x &= y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x \end{aligned}$$

στην εξίσωση διαφορών του παραδείγματος

$$\Delta^3 y_x - 2\Delta^2 y_x + 5\Delta y_x + 7y_x = 3\cos x$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &(y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x) \\ &\quad - 2(y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x) \\ &\quad + 5(y_{x+1} - y_x) + 7y_x = 3\cos x \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$y_{x+3} - 5y_{x+2} + 12y_{x+1} - y_x = 3\cos x.$$

Κατόπιν τούτων οι εξισώσεις διαφορών και οι αναγωγικές εξισώσεις είναι ισοδύναμες.

Λύση μιας αναγωγικής εξίσωσης ονομάζεται κάθε συνάρτηση που την επαληθεύει.
Γενική λύση μιας αναγωγικής εξίσωσης ονομάζεται η λύση της οποίας ο τύπος περιέχει όλες τις λύσεις.

Παράδειγμα

1. Η συνάρτηση $y_x = 3^x$ είναι **λύση** της εξίσωσης
$$y_{x+2} - 2y_{x+1} - 3y_x = 0$$
διότι
$$3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x+1} - 3 \cdot 3^x = 9 \cdot 3^x - 6 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^x = 0.$$

2. Η γενική λύση της εξίσωσης
$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0$$
είναι (όπως θα δούμε αργότερα) η
$$y_x = c_1 \cdot 2^x + c_2 \cdot 3^x.$$

Γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Γενική μορφή:

$$a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = \beta(x). \tag{1}$$

Ομογενής: Αν $\beta(x) = 0$, δηλαδή

$$a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = 0. \tag{2}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0.$$

Χαρακτηριστική εξίσωση:

$$P(\lambda) = 0.$$

Επίλυση της ομογενούς εξίσωσης

Αποδεικνύεται ότι η **γενική λύση** της ομογενούς

$$a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots + a_1 y_{x+1} + a_0 y_x = 0. \tag{3}$$

είναι **όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί των βασικών λύσεων**, που προκύπτουν από τις ρίζες (πραγματικές ή/και μιγαδικές) της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

Εύρεση των βασικών λύσεων.

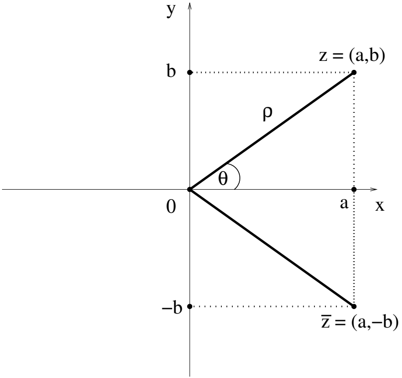
1. Αν λ είναι απλή πραγματική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε η συνάρτηση λ^x είναι βασική λύση.
2. Αν λ είναι πραγματική ρίζα πολλαπλότητας k της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε οι συναρτήσεις:
$$\lambda^x, x\lambda^x, \ldots, x^{k-1}\lambda^x$$
είναι βασικές λύσεις.
3. Αν $\lambda = \alpha + \beta i$ είναι μιγαδική ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε θα είναι ρίζα και η συζυγής της $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$. Γι' αυτές τις δύο πρέπει να βρούμε δύο βασικές λύσεις. Γράφουμε
$$\lambda = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$
(τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού).
Τότε οι βασικές λύσεις που αντιστοιχούν στις $\lambda, \overline{\lambda}$ είναι οι:
$$\rho^x \cos\theta x \text{ και } \rho^x \sin\theta x$$

Μιγαδικοί αριθμοί $\mathbb{C}$: Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

- **Αλγεβρική μορφή**: $z = a + bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.
  Το $a = \Re z$ (αντ. $b = \Im z$) ονομάζεται **πραγματικό μέρος** (αντ. **φανταστικό μέρος**) του z.
  Αν $b = 0$ (το φανταστικό μέρος ισούται με 0) τότε z είναι ο πραγματικός αριθμός a.
  Ο μιγαδικός αριθμός $\overline{z} = a - bi$ ονομάζεται **συζυγής** μιγαδικός αριθμός του $z = a + bi$.

Μιγαδικοί αριθμοί $\mathbb{C}$: Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

- **Γεωμετρική αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο**:



$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$
$a = \rho \cos\theta$
$b = \rho \sin\theta$
$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{b}{a} = \frac{\Im z}{\Re z}$.
Το μήκος $\rho = |z|$ ονομάζεται **μέτρο** του z.
Η γωνία $\theta = \arg z \in [0, 2\pi)$ ονομάζεται **(πρωτεύον) όρισμα του** z και ορίζεται για $z \neq 0$.

- **Τριγωνομετρική μορφή**: $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho \,\mathrm{cis}\,\theta$, όπου $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

Μιγαδικοί αριθμοί $\mathbb{C}$: Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

- **Πράξεις στους μιγαδικούς αριθμούς**:
  Έστω $z = a + bi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$,
  $z_1 = a + bi = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και
  $z_2 = c + di = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ τότε
  Ισότητα: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c$ και $b = d$.
  Πρόσθεση: $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
  Πολλαπλασιασμός:
  $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$
  Ειδικά: $z\overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$.
  Δυνάμεις: $z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.
  Διαίρεση:
  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)),$$
  όπου $z_2 \neq 0$.

Μιγαδικοί αριθμοί $\mathbb{C}$: Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

- **Πράξεις στους μιγαδικούς αριθμούς (συνέχεια)**:
  Ρίζες: Υπάρχουν πάντα n διαφορετικές n-οστές ρίζες του z που δίνονται από τον τύπο:

$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right),\ \text{όπου } k=0,1,2,\ldots,n-1$$

  Ειδικά: Οι n-οστές ρίζες της μονάδας $(1=1(\cos 0+i\sin 0))$ δίνονται από τον τύπο:

$$\omega_k=\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),\ \text{όπου } k=0,1,2,\ldots,n-1$$

Μιγαδικοί αριθμοί $\mathbb{C}$: Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

- **Μιγαδικές ρίζες εξισώσεων δευτέρου βαθμού**: Αν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες z_1, $\overline{z_1}$ που δίνονται από τον τύπο

$$z_1, \overline{z_1} = -\frac{\beta}{2a} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} i$$

οπότε $z_1 + \overline{z_1} = -\dfrac{\beta}{a}$ και $z_1\overline{z_1} = \dfrac{\gamma}{a} = |z_1|^2$.
Οι ρίζες αυτές γράφονται σε τριγωνομετρική μορφή ως εξής:

$$z_1, \overline{z_1} = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}(\cos\theta \pm i\sin\theta) \text{ όπου } \cos\theta = -\frac{\beta}{2\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

Μιγαδικοί αριθμοί $\mathbb{C}$: Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

- **Μιγαδικές ρίζες πολυωνύμων**: Κάθε πολυώνυμο n-οστού βαθμού έχει ακριβώς n μιγαδικές ρίζες (με επαναλήψεις). Επιπλέον, αν ο $z = a + bi$ είναι ρίζα, έπεται ότι και ο συζυγής του $\overline{z} = a - bi$ είναι επίσης ρίζα του πολυωνύμου. Δηλαδή οι μιγαδικές ρίζες εμφανίζονται σε ζεύγη.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η ομογενής εξίσωση $y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0$.

Λύση.

$$P(\lambda) = x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = 3.$$

Άρα,

$$y_x = c_1 2^x + c_2 3^x. \qquad \square$$

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η ομογενής εξίσωση $y_x = 2y_{x-1} + 4y_{x-2}$.

Λύση.

Με μετατόπιση του x κατά δύο μονάδες προκύπτει η ισοδύναμη εξισωση $y_{x+2} = 2y_{x-1} + 4y_x$.

$$P(\lambda) = x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 + \sqrt{5} \text{ ή } \lambda = 1 - \sqrt{5}.$$

Άρα,

$$y_x = c_1(1 + \sqrt{5})^x + c_2(1 - \sqrt{5})^x.$$

□

Παράδειγμα 3

Να λυθεί η ομογενής εξίσωση $y_{x+3} + 3y_{x+2} - 9y_{x+1} + 5y_x = 0$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 9\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -5 \text{ ή } \lambda = 1 \text{ (διπλή)} .$$

Άρα,

$$y_x = c_1 (-5)^x + c_2 (1)^x + c_3 x (1)^x .$$

□

Σχήμα Horner για την παραγοντοποίηση του πολυωνύμου (3ου βαθμού): $x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ (με πιθανές ρητές ρίζες τις ± 1, ± 5), για την $x = 1$.

1	3	-9	5	1
	1	4	-5	
1	4	-5	0	

Άρα,

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = (x-1)(x^2+4x-5) = (x-1)(x-1)(x+5)$$
$$= (x-1)^2(x+5)$$

Αν θέλαμε να ελέγξουμε αρχικά την πιθανή ρίζα $x = -5$ (αντί την $x = 1$):

1	3	-9	5	-5
	-5	10	-5	
1	-2	1	0	

Άρα,

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = (x+5)(x^2-2x+1) = (x+5)(x-1)^2$$

Παράδειγμα 4

Να λυθεί η ομογενής εξίσωση $2y_{x+3} + 3y_{x+2} - 8y_{x+1} + 3y_x = 0$.

Λύση.

$$P(\lambda) = 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \text{ ή } \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -3.$$

Άρα,

$$y_x = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^x + c_2 (1)^x + c_3 (-3)^x . \qquad \square$$

Ρητές ρίζες πολυωνύμων: Έστω $r(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές. Αν $\frac{p}{q}$ είναι (ανάγωγη) ρητή ρίζα του πολυωνύμου $r(x)$ τότε $p|a_0$ και $q|a_n$.

Παράδειγμα 5

Να λυθεί η ομογενής εξίσωση $y_{x+3} + 7y_{x+2} + 16y_{x+1} + 12y_x = 0$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ διπλή, ή } \lambda = -3.$$

Άρα,

$$y_x = c_1(-2)^x + c_2 x(-2)^x + c_3(-3)^x.$$

□

Παράδειγμα 6

Να λυθεί η ομογενής εξίσωση $y_{x+3} - 4y_{x+2} + 4y_{x+1} - 3y_x = 0$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Μετατροπή της $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ σε τριγωνομετρική μορφή:
Γενικά, αν $\lambda = \alpha + \beta i$, ισχύει ότι

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \rho\cos\theta \\ \beta = \rho\sin\theta \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \mathrm{tg}\,\theta = \frac{\beta}{\alpha} \end{array}\right.$$

όπου $\rho > 0$ και $\theta \in [0, 2\pi)$. Έτσι, εδώ είναι:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \qquad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

(αφού $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο).
Άρα,

$$y_x = c_1 3^x + c_2 1^x \cos\frac{\pi}{3}x + c_3 1^x \sin\frac{\pi}{3}x.$$

Παράδειγμα 7

Να λυθεί η ομογενής εξίσωση $y_{x+5} - 32y_x = 0$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^5 - 32 = 0 \Leftrightarrow \lambda_k = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}\right), \text{ όπου } k = 0, 1, 2, 3, 4$$

όπου λ_k είναι οι 5 πέμπτες ρίζες του 32. Για $k = 0$ προκύπτει η πραγματική λύση $\lambda = 2$, και τα ζευγάρια συζυγών λύσεων λ_1, λ_4 και λ_2, λ_3. Άρα,

$$y_x = c_1 2^x + c_2 2^x \cos\frac{2\pi x}{5} + c_3 2^x \sin\frac{2\pi x}{5} + c_4 2^x \cos\frac{4\pi x}{5} + c_5 2^x \sin\frac{4\pi x}{5} \quad \square$$

2η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΑΝΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- **Γραμμικές μη ομογενείς εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές**
  - **Εύρεση της μερικής λύσης**
  - **Αρχικές συνθήκες**
  - **Ακολουθίες**
- **Άλλες κατηγορίες αναγωγικών εξισώσεων**

Γραμμικές μη ομογενείς εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Πρόταση 1

Έστω

$$a_n y_{x+n} + a_{n-1} y_{x+n-1} + \cdots a_{+} a_0 y_x = \beta(x)$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$y_x = y_x^0 + \psi_x,$$

όπου

y_x: *γενική λύση της μη ομογενούς,*

y_x^0: *γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς,*

ψ_x: *μια μερική λύση της μη ομογενούς.*

Εύρεση της ψ_x

1η περίπτωση: $\beta(x) = \alpha \cdot \gamma^x$. Τότε, η ψ_x θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$\psi_x = \begin{cases} c \cdot \gamma^x, & \text{αν } \gamma \text{ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.} \\ c \cdot x^k \cdot \gamma^x, & \text{αν } \gamma \text{ είναι ρίζα πολλαπλότητας } k \text{ της χαρακτηριστικής εξίσωσης.} \end{cases}$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 8

Να λυθεί η εξίσωση $y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - 2y_x = 2 \cdot 3^x$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Συνεπώς, για $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ είναι $\lambda = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ και

$$y_x^0 = c_1 2^x + c_2 \cos\frac{\pi}{3}x + c_3 \sin\frac{\pi}{3}x.$$

Για την εύρεση της $\psi_x = c \cdot 3^x$ της έχουμε

$$c3^{x+3} - 3c3^{x+2} + 3c3^{x+1} - 2c3^x = 2 \cdot 3^x \Leftrightarrow 7c3^x = 2 \cdot 3^x \Leftrightarrow c = \frac{2}{7}.$$

Άρα,

$$\psi_x = \frac{2}{7}3^x$$

και τελικά

$$y_x = c_1 2^x + c_2 \cos\frac{\pi}{3}x + c_3 \sin\frac{\pi}{3}x + \frac{2}{7}3^x.$$

Παράδειγμα 9

Να λυθεί η εξίσωση $y_{x+3} - 7y_{x+2} + 16y_{x+1} - 12y_x = 8 \cdot 2^x$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ διπλή ρίζα, ή } \lambda = 3.$$

Άρα,

$$y_x^0 = c_1 2^x + c_2 x 2^x + c_3 3^x.$$

Για την εύρεση της $\psi_x = c \cdot x^2 \cdot 2^x$ έχουμε,

$$c(x+3)^2 2^{x+3} - 7c(x+2)^2 2^{x+2} + 16c(x+1)^2 2^{x+1} - 12cx^2 2^x = 8 \cdot 2^x$$
$$\Leftrightarrow 8c(x^2+6x+9) - 28c(x^2+4x+4) + 32c(x^2+2x+1) - 12cx^2 = 8$$
$$\Leftrightarrow 72c - 112c + 32c = 8.$$

Άρα, $c = -1$ και $\psi_x = -x^2 2^x$,
οπότε τελικά

$$y_x = c_1 2^x + c_2 x 2^x + c_3 3^x - x^2 2^x.$$

□

2η περίπτωση: $\beta(x) = ax^t$, όπου $t \in \mathbb{N}^*$.
Τότε, η ψ_x θα έχει την μορφή $\psi_x = x^k \cdot Q(x)$, όπου $Q(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού t και k ο **ελάχιστος** φυσικός αριθμός για τον οποίο η συνάρτηση x^k **δεν** είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

Παράδειγμα 10

Να λυθεί η εξίσωση $y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = x^2$.

Λύση. $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ διπλή ρίζα.
Άρα, $y_x^0 = c_1 2^x + c_2 x 2^x$.
Για την εύρεση της $\psi_x = x^0(Ax^2 + Bx + \Gamma)$ έχουμε,

$$A(x+2)^2 + B(x+2) + \Gamma - 4\left(A(x+1)^2 + B(x+1) + \Gamma\right) + \\ + 4(Ax^2 + Bx + \Gamma) = x^2$$

$$\Leftrightarrow A(x^2+4x+4) + Bx + 2B + \Gamma - 4A(x^2+2x+1) - 4Bx - 4B - 4\Gamma \\ + 4Ax^2 + 4Bx + 4\Gamma = x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -4A + B = 0 \\ -2B + \Gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 4 \\ \Gamma = 8. \end{cases}$$

Άρα, $\psi_x = x^2 + 4x + 8$, οπότε τελικά

$$y_x = c_1 2^x + c_2 x 2^x + x^2 + 4x + 8.$$

Παράδειγμα 11

Να λυθεί η εξίσωση $y_{x+2} - 4y_{x+1} + 3y_x = x$.

Λύση.

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 3.$$

Άρα, $y_x^0 = c_1 + c_2 3^x$.
Για την εύρεση της $\psi_x = x^1(Ax + B) = Ax^2 + Bx$ έχουμε

$$\begin{aligned} & A(x+2)^2 + B(x+2) - 4\left(A(x+1)^2 + B(x+1)\right) + 3(Ax^2 + Bx) = x \\ & \Leftrightarrow A(x^2 + 4x + 4) + Bx + 2B - 4A(x^2 + 2x + 1) - 4Bx - 4B \\ & \qquad + 3Ax^2 + 3Bx = x \\ & \Leftrightarrow -4Ax - 2B = x \Leftrightarrow A = -\frac{1}{4}, \quad B = 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\psi_x = -\frac{1}{4}x^2$, οπότε τελικά

$$y_x = c_1 + c_2 3^x - \frac{1}{4}x^2.$$

3η περίπτωση: Συνδυασμός των δυο προηγούμενων.

Παράδειγμα 12

Να λυθεί η εξίσωση $y_{x+3} - 6y_{x+2} + 11y_{x+1} - 6y_x = 4x + 3 \cdot 2^x - 5^x$.

Λύση. $P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = 2$ ή $\lambda = 3$
Άρα, $y_x^0 = c_1 + c_2 2^x + c_3 3^x$.
Για την εύρεση της

$$\psi_x = x(Ax + B) + \Gamma x 2^x + \Delta 5^x = Ax^2 + Bx + \Gamma x 2^x + \Delta 5^x$$

έχουμε

$$\begin{gathered} A(x+3)^2 + B(x+3) + \Gamma(x+3)2^{x+3} + \Delta 5^{x+3} - \\ 6A(x+2)^2 - 6B(x+2) - 6\Gamma(x+2)2^{x+2} - 6\Delta 5^{x+2} + \\ 11A(x+1)^2 + 11B(x+1) + 11\Gamma(x+1)2^{x+1} + 11\Delta 5^{x+1} \\ - 6Ax^2 - 6Bx - 6\Gamma x 2^x - 6\Delta 5^x = 4x + 3 \cdot 2^x - 5^x \Leftrightarrow \\ 4Ax - 4A + 2B - 2\Gamma 2^x + 24\Delta 5^x = 4x + 3 \cdot 2^x - 5^x \Leftrightarrow \\ A = 1, \quad B = 2 \;\; \Gamma = -\frac{3}{2}, \Delta = -\frac{1}{24}. \end{gathered}$$

Άρα,
$$y_x = c_1 + c_2 2^x + c_3 3^x + x(x+2) - \frac{3}{2} x 2^x - \frac{1}{24} 5^x.$$

Αρχικές συνθήκες

Παράδειγμα 13

Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0 \text{ όταν } y_0 = 3 \text{ και } y_1 = 11$$

Λύση. Αρχικά βρίσκουμε τη γενική λύση:

$$y_x = c_1 2^x + c_2 3^x$$

και έπειτα, εφαρμόζοντας σ᾽ αυτή τις αρχικές συνθήκες, υπολογίζουμε τις σταθερές.

$$c_1 2^0 + c_2 3^0 = y_0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 3$$

$$c_1 2^1 + c_2 3^1 = y_1 \Leftrightarrow 2c_1 + 3c_2 = 11$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει:

$$c_1 = -2, \qquad c_2 = 5.$$

Άρα,

$$y_x = -2 \cdot 2^x + 5 \cdot 3^x.$$

Ακολουθίες

Οι ακολουθίες που ορίζονται με αναδρομικό τύπο, μπορούν να θεωρηθούν γραμμικές Ε. Δ. (με a_n αντί y_x) και να λυθούν, δίνοντας τον τύπο της ακολουθίας a_n.

Παράδειγμα 14

Να βρεθεί ο τύπος της ακολουθίας (a_n) *για την οποία* $a_{n+2} = -2a_{n+1} + 3a_n$, *και* $a_1 = 5$, $a_2 = 1$,

Λύση. Λύνουμε την

$$a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n = 0.$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = -3.$$

Άρα, $a_n = c_1 1^n + c_2(-3)^n = c_1 + c_2(-3)^n$.

$$\begin{cases} \text{Για } n = 1 : 5 = c_1 + c_2(-3) \\ \text{Για } n = 2 : 1 = c_1 + c_2(-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - 3c_2 = 5 \\ c_1 + 9c_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Άρα, τελικά

$$a_n = 4 - \frac{1}{3}(-3)^n.$$

Άλλες κατηγορίες αναγωγικών εξισώσεων

Δεν υπάρχουν γενικοί τύποι που να δίνουν τις λύσεις των μη γραμμικών αναγωγικών εξισώσεων όπως η μέθοδος της χαρακτηριστικής εξίσωσης για τις γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Στην ενότητα αυτή δίνονται ορισμένα αποτελέσματα για κάποιες σημαντικές κατηγορίες μη γραμμικών αναγωγικών εξισώσεων που εμφανίζονται σε προβλήματα ανάλυσης αλγορίθμων.

Πρόταση 2 (Αναγωγικές εξισώσεις διαίρει και βασίλευε)

Έστω $f(n)$ *μια αύξουσα ακολουθία η οποία ικανοποιεί την αναγωγική σχέση*

$$f(n) = af(n/b) + cn^d$$

όπου $n = b^k$ *για κάποιο* $k \in \mathbb{N}^*$, $a \geq 1$, $b \in \mathbb{N}$ *με* $b \geq 2$, $c > 0$, $d \geq 0$. *Τότε*

$$f(n) = \begin{cases} f(1)n^d + cn^d \log_b n, & \alpha\nu \log_b a = d \\ c_1 n^d + c_2 n^{\log_b a}, & \alpha\nu \log_b a \neq d \end{cases}$$

όπου $c_1 = \dfrac{b^d c}{b^d - a}$, $c_2 = f(1) - c_1$.

Παράδειγμα 15

Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση της δυαδικής αναζήτησης

$$b(n) = b(n/2) + 2$$

Λύση.

Εδώ $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$ και $d = 0$, οπότε $\log_b a = \log_2 1 = 0 = d$.
Άρα

$$b(n) = b(1)n^d + cn^d \log_b n = b(1)n^0 + 2n^0 \log_2 n = b(1) + 2\log_2 n. \quad \square$$

Παράδειγμα 16

Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση του mergesort

$$M(n) = 2M(n/2) + n$$

Λύση.

Εδώ $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$ και $d = 1$, οπότε $\log_b a = \log_2 2 = 1 = d$.
Άρα, $M(n) = M(1)n^d + cn^d \log_b n = M(1)n^1 + n^1 \log_2 n =$
$M(1)n + n\log_2 n = n(M(1) + \log_2 n)$. $\square$

Παράδειγμα 17

Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση του μεγιστοελάχιστου

$$m(n) = 2m(n/2) + 2$$

Λύση.

Εδώ $a = 2$, $b = 2$, $c = 2$ και $d = 0$, οπότε $\log_b a = \log_2 2 = 1 \neq d$.
Άρα

$$m(n) = c_1 n^d + c_2 n^{\log_b a} = c_1 + c_2 n$$

όπου $c_1 = \dfrac{b^d c}{b^d - a} = \dfrac{2^0 \cdot 2}{2^0 - 2} = -2$ και $c_2 = m(1) - c_1 = m(1) + 2$, οπότε

$$m(n) = -2 + (m(1) + 2)n$$

$\square$

Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1

Να βρεθεί η γενική λύση y_x^0 *της ομογενούς εξίσωσης όταν η χαρακτηριστική της εξίσωση έχει ρίζες:* $2, -3, -3, -3, 4, 4$

Λύση.

$y_x^0 = c_1 2^x + c_2(-3)^x + c_3 x(-3)^x + c_4 x^2(-3)^x + c_5 4^x + c_6 x 4^x$ □

Άσκηση 2

Να βρεθεί η γενική λύση y_x^0 *της ομογενούς εξίσωσης όταν η χαρακτηριστική της εξίσωση έχει 4-πλη ρίζα το* $\frac{1}{3}$

Λύση.

$$y_x^0 = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^x + c_2 x \left(\frac{1}{3}\right)^x + c_3 x^2 \left(\frac{1}{3}\right)^x + c_4 x^3 \left(\frac{1}{3}\right)^x \qquad \square$$

Άσκηση 3

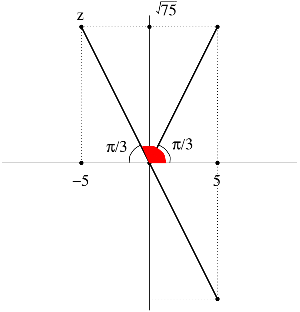
Να βρεθεί η γενική λύση y_x^0 της ομογενούς εξίσωσης όταν η χαρακτηριστική της εξίσωση έχει ρίζες: $2, 3, 3, -5 \pm \sqrt{75}i$.

Λύση. Θα εκφράσουμε σε τριγωνομετρική μορφή τον μιγαδικό αριθμό $-5 + \sqrt{75}i$.

Αν $z = a + bi$, τότε $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ όπου $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ και $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{b}{a}$.

Οπότε, $\rho = \sqrt{(-5)^2 + \sqrt{75}^2} = \sqrt{25 + 75} = \sqrt{100} = 10$.

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{75}}{-5} = \dfrac{\sqrt{75}}{-\sqrt{25}} = -\sqrt{3}$.



Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

ϕ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\phi$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\phi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\mathrm{tg}\,\phi$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{ctg}\,\phi$	–	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Γνωρίζουμε ότι $\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ οπότε $\mathrm{tg}\,\theta = -\sqrt{3}$ όταν $\theta = 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$ ή όταν $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{3}$. Επειδή το $z = -5 + 75i$ ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο, έπεται ότι $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Άρα, $-5 + \sqrt{75}i = 10\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Επομένως,

$$y_x^0 = c_1 2^x + c_2 3^x + c_3 x 3^x + c_4 10^x \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + c_5 10^x \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$$

Άσκηση 4

Να βρεθεί η μερική λύση ψ_x *της αναγωγικής εξίσωσης:* $y_{x+3} + y_x = 5 \cdot 3^x$

Λύση. Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^3 + 1 = 0$.
Το 3 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οπότε η μερική λύση θα έχει την μορφή

$$\psi_x = A \cdot 3^x$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} \psi_{x+3} + \psi_x &= 5 \cdot 3^x \Leftrightarrow \\ A3^{x+3} + A3^x &= 5 \cdot 3^x \Leftrightarrow \\ 27A3^x + A3^x &= 5 \cdot 3^x \Leftrightarrow \\ 28A = 5 \Leftrightarrow A &= \frac{5}{28} \end{aligned}$$

Άρα, η μερική λύση είναι $\psi_x = \frac{5}{28} 3^x$.

Άσκηση 5

Να βρεθεί η μερική λύση ψ_x της αναγωγικής εξίσωσης:
$y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = 7 \cdot 2^x + 6 \cdot 3^x$

Λύση. Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$, άρα το 2 είναι διπλή ρίζα.
Το 3 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οπότε η μερική λύση θα έχει την μορφή

$$\psi_x = Ax^2 \cdot 2^x + B3^x$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση και έχουμε ισοδύναμα:

$$\psi_{x+2} - 4\psi_{x+1} + 4\psi_x = 7 \cdot 2^x + 6 \cdot 3^x \Leftrightarrow$$
$$(A(x+2)^2 2^{x+2} + B3^{x+2}) - 4(A(x+1)^2 2^{x+1} + B3^{x+1}) + 4(Ax^2 2^x + B3^x)$$
$$= 7 \cdot 2^x + 6 \cdot 3^x \Leftrightarrow$$
$$(9B3^x - 12B3^x + 4B3^x) + (16A2^x - 8A2^x) = 7 \cdot 2^x + 6 \cdot 3^x \Leftrightarrow$$
$$B3^x + 8A2^x = 7 \cdot 2^x + 6 \cdot 3^x \Leftrightarrow A = \frac{7}{8}, B = 6$$

Άρα, η μερική λύση είναι $\psi_x = \frac{7}{8}x^2 2^x + 6 \cdot 3^x$.

Άσκηση 6

Να βρεθεί η μερική λύση ψ_x *της αναγωγικής εξίσωσης:*
$y_{x+3} - y_x = 2x + 3$

Λύση. Επειδή το $2x + 3$ είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού, η μερική λύση της εξίσωσης έχει την μορφή

$$\psi_x = x^k(Ax + B)$$

όπου k είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο η συνάρτηση $y_x = x^k$ **δεν** είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.
Για $k = 0$, $y_x = x^0 = 1$.
Αντικαθιστούμε την $y_x = 1$ στην ομογενή εξίσωση

$$y_{x+3} - y_x = 1 - 1 = 0$$

άρα είναι λύση της ομογενούς.

Για $k = 1$, $y_x = x^1 = x$.
Αντικαθιστούμε την $y_x = x$ στην ομογενή εξίσωση

$$y_{x+3} - y_x = x + 3 - x = 3$$

άρα δεν είναι λύση της ομογενούς.
Επομένως, $k = 1$ και η μερική λύση έχει την μορφή

$$\psi_x = x^1(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση για να βρούμε τα A, B. :

$$\begin{aligned} \psi_{x+3} - \psi_x &= 2x + 3 \Leftrightarrow \\ A(x+3)^2 + B(x+3) - (Ax^2 + Bx) &= 2x + 3 \Leftrightarrow \\ (9A + 3B) + 6Ax + Bx - Bx &= 2x + 3 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 9A + 3B = 3 \\ 6A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}, B = 0$$

Άρα, η μερική λύση είναι $\psi_x = x\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{3}x^2$.

(**Επιβεβαίωση**: $\frac{1}{3}(x+3)^2 - \frac{1}{3}x^2 = \cdots = 2x + 3$)

Άσκηση 7

Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση
$y_{x+3} - y_x = 2x + 3.$

Λύση. Από την προηγούμενη άσκηση γνωρίζουμε ότι η μερική λύση της είναι $\psi = \frac{1}{3}x^2$.
Θα βρούμε την γενική λύση y_x^0 της ομογενούς.
Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^3 - 1 = 0$. Μια ρίζα είναι το 1. Άρα, το πολυώνυμο $\lambda^3 + 1$ διαιρείται με το $\lambda - 1$. Θα χρησιμοποιήσουμε το σχήμα Horner για να βρούμε το πηλίκο της διαίρεσης

1	0	0	-1	1
	1	1	1	
1	1	1	0	

Άρα, $\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$. Επομένως, οι άλλες δύο ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί αριθμοί $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Θα εκφράσουμε τον $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ σε τριγωνομετρική μορφή:

$\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ και $\operatorname{tg}\theta = -\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = -\sqrt{3}$.

Επειδή $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο έπεται ότι $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Άρα, $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ και επομένως

$$y_x^0 = c_1 1^x + c_2 1^x \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + c_3 1^x \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$$

Τελικά, η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y_x = y_x^0 + \psi_x = c_1 + c_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + c_3 \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right) + \frac{1}{3}x^2$$

Παρατήρηση. Για $a > 0$, η συνάρτηση $(-a)^x$ λαμβάνει και μη πραγματικές τιμές (μιγαδικές τιμές), όταν για παράδειγμα $x = \frac{1}{2}$ ή $x = \frac{2k+1}{2\lambda}$, $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$. Επειδή ψάχνουμε μόνο πραγματικές λύσεις θα εκφράσουμε το $-a$ σε τριγωνομετρική μορφή:

$$-a = |a| (\cos \pi + i \sin \pi)$$

Άρα, αντί για την συνάρτηση $(-a)^x$ μπορούμε να γράφουμε

$$|a|^x \cos(\pi x) + |a|^x \sin(\pi x).$$

Για παράδειγμα, αντί για $(-1)^x$ γράφουμε

$$1^x \cos(\pi x) + 1^x \sin(\pi x)$$

Άσκηση 8

Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση
$y_{x+2} + y_{x+1} + y_x = 0$, *όπου* $y_0 = 0$, $y_1 = 2$.

Λύση. Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Leftarrow \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Θα εκφράσουμε τον $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ σε τριγωνομετρική μορφή:
$\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ και $\operatorname{tg}\theta = -\frac{\sqrt{3}2}{1/2} = -\sqrt{3}$. Επειδή
$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο έπεται ότι $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Άρα,
$z = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$ και επομένως

$$y_x = y_x^0 = c_1 1^x \cos\frac{2\pi x}{3} + c_2 1^x \sin\frac{2\pi x}{3}.$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε ότι

$$y_0 = 0 \Leftrightarrow c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$$
$$y_1 = 2 \Leftrightarrow c_2 \sin \frac{2\pi}{3} = 2 \Leftrightarrow c_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \Leftrightarrow c_2 = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Επομένως, η λύση της εξίσωσης είναι η συνάρτηση $y_x = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \sin \dfrac{2\pi x}{3}$

Άσκηση 9

Να λυθεί η μη γραμμική αναγωγική εξίσωση $a_n = \dfrac{1}{1+6a_{n-1}}$

Λύση. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση σε γραμμική αν θέσουμε

$$a_n = \frac{b_n}{b_{n+1}}$$

Τότε

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1}{1+6\dfrac{b_{n-1}}{b_n}} \Leftrightarrow \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{b_n}{b_n+6b_{n-1}} \Leftrightarrow b_{n+1} = b_n + 6b_{n-1}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της b_n είναι $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$ ή $\lambda = -2$. Επομένως, η γενική μορφή της ακολουθίας b_n είναι

$$b_n = c_1 3^n + c_2(-2)^n$$

Άρα, η ακολουθία a_n έχει την μορφή

$$a_n = \frac{c_1 3^n + c_2(-2)^n}{c_1 3^{n+1} + c_2(-2)^{n+1}}$$

Άσκηση 10

Να λυθεί η μη γραμμική αναγωγική εξίσωση $a_n = a_{n-1}^3/a_{n-2}$, όπου $a_n > 0$.

Λύση. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση σε γραμμική αν λάβουμε τον λογάριθμο κάθε μέλους.

$$a_n = a_{n-1}^3/a_{n-2} \Leftrightarrow \ln_2 a_n = 3 \ln_2 a_{n-1} - \ln_2 a_{n-2}$$

Θέτουμε $b_n = \ln_2 a_n$ οπότε προκύπτει η αναγωγική εξίσωση

$$b_n - 3b_{n-1} + b_{n-2} = 0$$

Χαρακτηριστική εξίσωση: $\lambda^2 - 3\lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Επομένως, $b_n = c_1 \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Άρα, η ακολουθία a_n έχει την μορφή

$$a_n = 2^{b_n} = 2^{c_1 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Άσκηση 11 (Ένα πολύπλοκο παράδειγμα)

Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση
$y_{x+4} - 2y_{x+3} - 2y_{x+2} + 8y_{x+1} - 8y_x = 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x$, *όπου* $y_0 = \frac{2}{25}$, $y_1 = \frac{123}{200}$, $y_2 = \frac{111}{50}$, $y_3 = \frac{383}{50}$.

Λύση. Αρχικά βρίσκουμε τη γενική λύση y_x^0 της αντίστοιχης ομογενούς: Υπολογίζουμε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8 = 0.$$

Επειδή, η εξίσωση είναι 4ου βαθμού, δοκιμάζουμε για τυχόν ρίζες μεταξύ των διαιρετών του 8. Οι διαιρέτες του 8 είναι ± 1, ± 2, ± 4, ± 8. Είναι

$$1^4 - 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 8 = -3 \neq 0.$$

$$(-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) - 8 = -15 \neq 0.$$

$$2^4 - 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 8 = 0.$$

άρα, το 2 είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

$$(-2)^4 - 2\cdot(-2)^3 + 2\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) - 8 = 0.$$

άρα, το -2 είναι επίσης ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.
Επομένως, το πολύωνυμο $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$ διαιρείται από το πολυώνυμο $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$.
Προκειμένου να βρούμε τις υπόλοιπες ρίζες εκτελούμε τη διαίρεση των δύο πολυώνυμων:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -2x^2 & +8x & -8 & x^2-4 \\ \cline{6-6}
-x^4 & & +4x^2 & & & x^2 \\ \cline{1-5}
& -2x^3 & +2x^2 & +8x & -8 & \\
& 2x^3 & & -8x & & -2x \\ \cline{2-5}
& & 2x^2 & & -8 & \\
& & -2x^2 & & +8 & +2 \\ \cline{3-5}
& & & & 0 &
\end{array}$$

Άρα
$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8 = (x^2-4)(x^2-2x+2).$$

Το πολυώνυμο $x^2 - 2x + 2$ είναι δευτέρου βαθμού και οι ρίζες του είναι οι αριθμοί

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{4}}{2} = 1 \pm i.$$

Άρα, οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί:
$2, -2, 1+i, 1-i$.
Επειδή, οι ρίζες $1+i$ και $1-i$ είναι μιγαδικές θα τις εκφράσουμε σε τριγωνομετρική μορφή $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Για τη ρίζα $1-i$ είναι

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

και

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = -1 \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

(αφού $(1,-1)$ ανήκει στο 4ο τεταρτημόριο), οπότε

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

(Άρα για την συζυγή της ρίζα είναι $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.)

Επομένως, η γενική λύση y_x^0 της ομογενούς δίδεται από την ισότητα

$$y_x^0 = c_1 2^x + c_2(-2)^x + c_3(\sqrt{2})^x \cos\frac{7\pi}{4}x + c_4(\sqrt{2})^x \sin\frac{7\pi}{4}x.$$

Στη συνέχεια θα βρούμε μια μερική λύση ψ_x της δοθείσας μη ομογενούς. Επειδή, το 2 είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης πολλαπλότητας 1, ενώ το 3 δεν είναι ρίζα, η μερική λύση ψ_x της μη ομογενούς θα έχει τη μορφή

$$\psi_x = A \cdot x^1 \cdot 2^x + B \cdot 3^x.$$

Για να βρούμε τα A, B αντικαθιστούμε την ψ_x στην αρχική αναγωγική εξίσωση οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&A(x+4)2^{x+4} + B\cdot 3^{x+4} - 2A(x+3)2^{x+3} - 2B\cdot 3^{x+3} - 2A(x+2)2^{x+2} - 2B\cdot 3^{x+2} \\
&\quad +8A(x+1)2^{x+1} + 8B\cdot 3^{x+1} - 8Ax2^x - 8B\cdot 3^x = 3\cdot 2^x + 2\cdot 3^x \Leftrightarrow \\
&16A(x+4)2^x + 81B\cdot 3^x - 16A(x+3)2^x - 54B\cdot 3^x - 8A(x+2)2^x - 18B\cdot 3^x \\
&\quad +16A(x+1)2^x + 24B\cdot 3^x - 8Ax2^x - 8B\cdot 3^x = 3\cdot 2^x + 2\cdot 3^x \Leftrightarrow \\
&(16Ax + 64A - 16Ax - 48A - 8Ax - 16A + 16Ax + 16A - 8Ax)\, 2^x \\
&\quad +(81B - 54B - 18B + 24B - 8B)\cdot 3^x = 3\cdot 2^x + 2\cdot 3^x \Leftrightarrow \\
&16A\cdot 2^x + 25B\cdot 3^x = 3\cdot 2^x + 2\cdot 3^x \Leftrightarrow \\
&A = \frac{3}{16}, \quad B = \frac{2}{25}.
\end{aligned}$$

Επομένως, η ζητούμενη μερική λύση ψ_x είναι η

$$\psi_x = \frac{3}{16}x2^x + \frac{2}{25}3^x.$$

Τέλος, η γενική λύση y_x της αναγωγικής εξίσωσης είναι το άθροισμα των δύο λύσεων που βρήκαμε, δηλαδή

$$\begin{aligned}
y_x &= y_x^0 + \psi_x \\
&= c_1 2^x + c_2(-2)^x + c_3(\sqrt{2})^x \cos\frac{7\pi}{4}x + c_4(\sqrt{2})^x \sin\frac{7\pi}{4}x + \frac{3}{16}x2^x + \frac{2}{25}3^x.
\end{aligned}$$

Προκειμένου, να βρούμε τους συντελεστές c_1, c_2, c_3, c_4, και επειδή γνωρίζουμε ότι $y_0 = \frac{2}{25}$, $y_1 = \frac{123}{200}$, $y_2 = \frac{111}{50}$, $y_3 = \frac{2333}{50}$, θέτουμε στη γενική λύση $x = 0, 1, 2, 3$ αντίστοιχα.
Έτσι, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ 2c_1 - 2c_2 + c_3 - c_4 &= 0 \\ 4c_1 + 4c_2 - 2c_4 &= 0 \\ 8c_1 - 8c_2 - 2c_3 - 2c_4 &= 40, \end{aligned}$$

το οποίο έχει τη μοναδική λύση

$$c_1 = 5,\ c_2 = -1,\ c_3 = -4,\ c_4 = 8.$$

Άρα, τελικά, ισχύει ότι

$$y_x = 5 \cdot 2^x - (-2)^x - 4c_3(\sqrt{2})^x \cos\frac{7\pi}{4}x + 8(\sqrt{2})^x \sin\frac{7\pi}{4}x + \frac{3}{16}x2^x + \frac{2}{25}3^x.$$

Άσκηση 12 (Ένα πολύπλοκο παράδειγμα)

Να λυθεί η αναγωγικη εξίσωση $2y_{x+3} - 6y_{x+2} + 6y_{x+1} - 2y_x = 2x$, *όπου* $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$.

Λύση. Αρχικά βρίσκουμε τη γενική λύση y_x^0 της αντίστοιχης ομογενούς: Υπολογίζουμε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 0.$$

Επειδή, η εξίσωση είναι 3ου βαθμού δοκιμάζουμε για τυχόν ρίζες μεταξύ των διαιρετών του 2. Οι διαιρέτες του 2 είναι ± 1, ± 2.
Είναι

$$2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 2 = 0.$$

άρα, το 1 είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.
Επομένως, το πολυώνυμο $2x^3 - 6x^2 + 6x - 2$ διαιρείται από το πολυώνυμο $x - 1$.

Προκειμένου να βρούμε τις υπόλοιπες ρίζες εκτελούμε τη διαίρεση των δύο πολυώνυμων:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -6x^2 & +6x & -2 & x-1 \\
\cline{5-5}
-2x^3 & +2x^2 & & & 2x^2 \\
\hline
 & -4x^2 & +6x & -2 & \\
 & 4x^2 & -4x & & -4x \\
\cline{2-4}
 & & 2x & -2 & \\
 & & -2x & +2 & +2 \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Άρα

$$2x^3-6x^2+6x-2 = (x-1)(2x^2-4x+2) = 2(x-1)(x^2-2x+1) = 2(x-1)^3.$$

Άρα, η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ως ρίζα τον αριθμό 1 με πολλαπλότητα 3.
Επομένως, η γενική λύση y_x^0 της ομογενούς έχει τη μορφή

$$y_x^0 = c_1 \cdot 1^x + c_2 x \cdot 1^x + c_3 x^2 \cdot 1^x = c_1 + c_2 x + c_3 x^2.$$

Στη συνέχεια θα βρούμε μια μερική λύση ψ_x της δοθείσας μη ομογενούς. Επειδή το $2x$ είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού η μερική λύση ψ_x θα έχει τη μορφή

$$\psi_x = x^k(Ax + B),$$

όπου k ο ελάχιστος φυσικός αριθμός για τον οποίο η συνάρτηση $y_x = x^k$ δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς.
Για $k = 0$ είναι $y_x = x^0 = 1$, και επειδή το 1 είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, η $y_x = x^0$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς.
Συνεχίζουμε με τον επόμενο φυσικό αριθμό k. Για $k = 1$ είναι $y_x = x^1 = x$. Αντικαθιστώντας την στην αναγωγική εξίσωση έχουμε ότι

$$2(x+3) - 6(x+2) + 6(x+1) - 2x = 2x + 6 - 6x - 12 + 6x + 6 - 2x = 0,$$

οπότε η $y_x = x^1$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς.

Συνεχίζουμε με τον επόμενο φυσικό αριθμό k. Για $k=2$ είναι $y_x = x^2$. Αντικαθιστώντας την στην αναγωγική εξίσωση έχουμε ότι

$$2(x+3)^2 - 6(x+2)^2 + 6(x+1)^2 - 2x^2 =$$
$$2x^2 + 12x + 18 - 6x^2 - 24x - 24 + 6x^2 + 12x + 6 - 2x^2 = 0,$$

οπότε η $y_x = x^2$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς.
Συνεχίζουμε με τον επόμενο φυσικό αριθμό k. Για $k=3$ είναι $y_x = x^3$. Αντικαθιστώντας την στην αναγωγική εξίσωση έχουμε ότι

$$2(x+3)^3 - 6(x+2)^3 + 6(x+1)^3 - 2x^3 = \cdots = 12 \neq 0,$$

οπότε η $y_x = x^3$ **δεν** είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς. Επομένως $k=3$.
Άρα, η μερική λύση ψ_x θα έχει τη μορφή

$$\psi_x = x^3(Ax+B).$$

Για να βρούμε τα A, B αντικαθιστούμε την ψ_x στην αρχική αναγωγική εξίσωση οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&2(x+3)^3(A(x+3)+B) - 6(x+2)^3(A(x+2)+B) \\
&+6(x+1)^3(A(x+1)+B) - 2x^3(Ax+B) = 2x \Leftrightarrow \\
&(2x^3+18x^2+54x+54)(Ax+3A+B) \\
&\qquad -(6x^3+36x^2+72x+48)(Ax+2A+B) \\
&\qquad +(6x^3+18x^2+18x+6)(Ax+A+B) - 2x^3(Ax+B) = 2x \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow 48Ax+72A+12B = 2x \Leftrightarrow A = \frac{1}{24},\ B = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Επομένως, η ζητούμενη μερική λύση ψ_x είναι η

$$\psi_x = x^3\left(\frac{1}{24}x - \frac{1}{4}\right)$$

Τέλος, η γενική λύση y_x της αναγωγικής εξίσωσης είναι το άθροισμα των δύο λύσεων που βρήκαμε, δηλαδή

$$y_x = y_x^0 + \psi_x = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + x^3 \left(\frac{1}{24} x - \frac{1}{4} \right).$$

Προκειμένου, να βρούμε τους συντελεστές c_1, c_2, c_3, και επειδή γνωρίζουμε ότι $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, θέτουμε στη γενική λύση $x = 0, 1, 2$ αντίστοιχα. Έτσι, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 - \frac{5}{24} &= 2 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 - \frac{4}{3} &= 3, \end{aligned}$$

το οποίο έχει τη μοναδική λύση $c_1 = 1, \; c_2 = \frac{3}{4}, \; c_3 = \frac{11}{24}$.

Άρα, τελικά, ισχύει ότι $y_x = 1 + \dfrac{3}{4} x + \dfrac{11}{24} x^2 + x^3 \left(\dfrac{1}{24} x - \dfrac{1}{4} \right)$.

Άσκήσεις προς επίλυση

1. Να λυθούν οι ομογενείς γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις
   1. $y_{x+2} + 3y_{x+1} - 10y_x = 0,\ y_0 = 7,\ y_1 = -14.$
   2. $y_{x+2} - 8y_{x+1} + 16y_x = 0,\ y_0 = 5,\ y_1 = 12.$
   3. $2y_{x+2} + 3y_{x+1} - 2y_x = 0,\ y_0 = 0,\ y_1 = -3.$
   4. $4y_{x+2} - 4y_{x+1} + y_x = 0,\ y_0 = -2,\ y_1 = 0.$
   5. $y_{x+3} - 2y_{x+1} - \sqrt{3}y_x = 0,\ y_0 = -2,\ y_1 = 3,\ y_2 = 4 - 3\sqrt{3}.$
   6. $y_{x+3} - 2y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0,\ y_0 = -12,\ y_1 = 2,\ y_2 = 22.$
   7. $y_{x+2} + y_{x+1} + y_x = 0,\ y_0 = 0,\ y_1 = 1.$
   8. $y_{x+3} - y_{x+2} - 8y_{x+1} + 12y_x = 0,\ y_0 = 5,\ y_1 = -8,\ y_2 = -2.$
   9. $y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x = 0,\ y_0 = 4,\ y_1 = 2,\ y_2 = 0.$
   10. $y_{x+3} - y_{x+2} + 4y_{x+1} - 4y_x = 0,\ y_0 = 2,\ y_1 = 3,\ y_2 = -3.$
   11. $y_{x+4} - 3y_{x+2} + 14y_{x+1} - 12y_x = 0,\ y_0 = 9,\ y_1 = 3 + 2\sqrt{3},$
       $y_2 = 21 + 4\sqrt{3},\ y_3 = -63.$
   12. $y_{x+4} - 2y_{x+3} - 11y_{x+2} + 12y_{x+1} + 36y_x = 0,\ y_0 = 1,\ y_1 = 1,\ y_2 = 7,$
       $y_3 = -137.$
   13. $y_{x+5} - 3y_{x+4} - 2y_{x+3} + 4y_{x+2} + 24y_{x+1} - 32y_x = 0,\ y_0 = 3,\ y_1 = 2,$
       $y_2 = 38,\ y_3 = 76,\ y_4 = 418.$
   14. $y_{x+5} - 7y_{x+4} + 17y_{x+3} - 19y_{x+2} + 16y_{x+1} - 12y_x = 0,\ y_0 = 0,$
       $y_1 = -2,\ y_2 = -13,\ y_3 = -55,\ y_4 = -179.$

2. Να λυθούν οι γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις
   1. $y_{x+2} - 4y_x = 12(-2)^x$, $y_0 = 4$, $y_1 = -4$.
   2. $y_{x+2} + y_x = 5 \cdot 2^x$, $y_0 = 2$, $y_1 = 1$.
   3. $y_{x+2} - 2y_{x+1} - 3y_x = 8(-1)^x$, $y_0 = 7$, $y_1 = -3$.
   4. $y_{x+2} + 4y_{x+1} + 4y_x = (-2)^{x+4}$, $y_0 = 1$, $y_1 = 3$.
   5. $y_{x+2} - 3y_{x+1} - 10y_x = 7 \cdot 5^{x+1}$, $y_0 = 8$, $y_1 = 3$.
   6. $y_{x+2} - 2\sqrt{2}y_{x+1} + 4y_x = \sqrt{2} \cdot 2^{x+2}$, $y_0 = \sqrt{2}$, $y_1 = \sqrt{2}$.
   7. $y_{x+2} + y_{x+1} - 2y_x = 18x + 12(-2)^x + 10 \cdot 3^x$.
   8. $y_{x+4} - y_x = 8(2x-1) + 16(-1)^x + 15 \cdot 2^x$.
   9. $y_{x+2} - 8y_{x+1} + 16y_x = 18x$, $y_0 = \frac{2}{3}$, $y_1 = \frac{26}{3}$.
   10. $y_{x+2} + 4y_{x+1} - 12y_x = 6x^2 - 19x + 10$, $y_0 = 1$, $y_1 = -1$.
   11. $y_{x+2} + 3y_{x+1} - 4y_x = 20x + 19$, $y_0 = 2$, $y_1 = 4$.
   12. $y_{x+3} - 2y_{x+2} + y_{x+1} - 2y_x = 8 \cdot 2^x + 7 \cdot 5^x$.
   13. $y_{x+3} - 11y_{x+2} + 39y_{x+1} - 45y_x = 10 \cdot 3^x + 8 \cdot 5^x$.

3. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (a_n) όταν

$$a_0 = 4, a_1 = 5, a_2 = 6 \text{ και } a_n = \frac{29a_{n-1} - 23a_{n-2} + 6a_{n-3}}{12},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, με $n \geq 3$.

4. Να λυθούν οι μη γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις, αφού μετασχηματισθούν σε γραμμικές με τη βοήθεια των υποδείξεων.
   1. $a_n = a_{n-1} - a_n a_{n-1}$. (Υπόδειξη: Διαιρέστε κατά μέλη με $a_n a_{n-1}$).
   2. $a_n = 7a_{n/2} + n^2$. (Υπόδειξη: Να τεθεί $b_n = \frac{a_{2^n}}{7^k}$).

5. Να βρεθεί ο αριθμός των λέξεων μήκους n που μπορούν να κατασκευασθούν χρησιμοποιώντας δύο γράμματα a, b έτσι ώστε αυτές να μην περιέχουν δύο διαδοχικά a.