ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Προαπαιτούμενες γνώσεις

- Δυναμοσειρές (από την Ανάλυση Ι)
- Στοιχειώδης Συνδυαστική (από τα Μαθηματικά των Υπολογιστών)
- Βασικές ακολουθίες αριθμών (από τα Διακριτά Μαθηματικά)

1η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Συνήθεις γεννήτριες
Εκθετικές γεννήτριες

Συνήθεις γεννήτριες συναρτήσεις

Για κάθε ακολουθία[1] $f/\mathbb{N}$ πραγματικών αριθμών, ορίζεται μια συνάρτηση f^* με

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n/(-\rho,\rho),$$

όπου $\rho > 0$ είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, η οποία ονομάζεται **(συνήθης) γεννήτρια συνάρτηση της f**.

Οι γεννήτριες συναρτήσεις μετατρέπουν πολλά προβλήματα που εμφανίζονται στο διακριτό χώρο (όπου ορίζεται η f) σε προβλήματα του συνεχούς χώρου (όπου ορίζεται η f^*) τα οποία είναι ευκολότερο να λυθούν, αφού γι' αυτό υπάρχει η δυνατότητα χρήσης των εργαλείων της Μαθηματικής Ανάλυσης (παραγώγιση, ολοκλήρωση κ.λπ.).

Πιο συγκεκριμένα, με τη βοήθεια των γεννητριών συναρτήσεων μπορεί να ευρεθεί ο τύπος ορισμένων ακολουθιών που δίδονται σε αναδρομική μορφή, να αποδειχθούν με σύντομο τρόπο πολλοί τύποι της Συνδυαστικής Ανάλυσης, να προσδιορισθούν ορισμένες ασυμπτωτικές σχέσεις ακολουθιών και να επιλυθούν διάφορα προβλήματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

[1] Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $f(n)$ για τις ακολουθίες και η μεταβλητή n θα παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}$.

Βήματα χρήσης των γεννητριών συναρτήσεων

> Έστω ότι θέλουμε να βρούμε ένα τύπο για τον αριθμό $f(n)$ των δυαδικών δένδρων με n κορυφές.

1ο βήμα: Εύρεση αναδρομικής σχέσης

Από την διάσπαση των δυαδικών δένδρων προκύπτει ο τύπος του Segner

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)f(n-1-k), \quad f(0) = 1.$$

2ο βήμα: Μετασχηματισμός σε γεννήτρια, Επίλυση και Αντιστροφή

Διακριτός χώρος | Συνεχής χώρος

$$\begin{tikzcd}
f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)f(n-1-k) \arrow[r, "\text{Γεννήτρια}"] & f^*(x) = 1 + x(f^*(x))^2 \arrow[d, "\text{Επίλυση}"] \\
f(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} & f^*(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \arrow[l, "\text{Αντιστροφή}"']
\end{tikzcd}$$

Από το Πόρισμα 4.3, σελίδα 11, τρίτη διάλεξη, Κεφαλαίο 11, Ανάλυση 2, προκύπτει ότι

αν $\rho > 0$, ισχύει ότι

$$f^*(x) = g^*(x), \text{ για κάθε } x \in (-\rho, \rho)$$
$$\Rightarrow f(n) = g(n), \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

οπότε η απεικόνιση $f \to f^*$ είναι 1–1, δηλαδή η συνάρτηση f^* δεν μπορεί να δημιουργηθεί από δύο διαφορετικές συναρτήσεις, πράγμα στο οποίο οφείλει και το όνομά της.

Γενικότερα, οι γεννήτριες συναρτήσεις ορίζονται για μιγαδική μεταβλητή z. Τότε η f^* ορίζεται στο σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ το οποίο γεωμετρικά παριστάνει το εσωτερικό ενός κύκλου κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας ρ. Έτσι, πολλές φορές χρησιμοποιείται η μεταβλητή z αντί της μεταβλητής x και η f^* ονομάζεται **μετασχηματισμός z**.

Τέλος, πρέπει να τονισθεί ότι σε πολλά βιβλία χρησιμοποιείται το κλασικό σύμβολο f_n της ακολουθίας (αντί του $f(n)$ που χρησιμοποιείται εδώ) και το αντίστοιχο κεφαλαίο γράμμα για τη γεννήτριά της, δηλαδή

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.$$

Βασικές γεννήτριες συναρτήσεις

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$$

1. Αν $f(n) = a^n/\mathbb{N}$, όπου $a \in \mathbb{R}^*$, τότε
   $f^*(x) = \dfrac{1}{1-ax}/\left(-\dfrac{1}{|a|}, \dfrac{1}{|a|}\right)$, διότι
   $$\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (ax)^n = \frac{1}{1-ax}.$$

2. Αν $f(n) = \dfrac{a^n}{n!}/\mathbb{N}$, όπου $a \in \mathbb{R}$, τότε
   $f^*(x) = e^{ax}/\mathbb{R}$, διότι
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = e^{ax}.$$

3. Αν $f(n) = \dbinom{a}{n}/\mathbb{N}$, όπου $a \in \mathbb{R}$, τότε
   $f^*(x) = (1+x)^a/\mathbb{R}$, διότι
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = (1+x)^a.$$

Ιδιότητες γεννητριών συναρτήσεων

1. Αν $f(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n)$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, τότε

$$f^*(x) = c_1 f_1^*(x) + c_2 f_2^*(x).$$

2. Αν $f(n) = a^n \phi(n)$, όπου $a \in \mathbb{R}$, τότε

$$f^*(x) = \phi^*(ax).$$

3. Αν $f(n) = \phi(n+k)$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$, τότε

$$f^*(x) = \frac{\phi^*(x)}{x^k} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\phi(i)}{x^{k-i}}.$$

Για παράδειγμα

$$(\phi(n+1))^*(x) = \frac{\phi^*(x)}{x} - \frac{\phi(0)}{x}$$

και

$$(\phi(n+2))^*(x) = \frac{\phi^*(x)}{x^2} - \frac{\phi(0)}{x^2} - \frac{\phi(1)}{x}$$

4. Αν $f(n) = F_k(n)\phi(n)$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$ τότε

$$f^*(x) = x^k (\phi^*(x))^{(k)}.$$

Υπενθυμίζεται ότι
$$F_k(x) = x(x-1)\cdots(x-k+1)$$
είναι το παραγοντικό πολυώνυμο k τάξης.

Άσκηση 1. *Να αποδειχθεί ότι αν*

$$f(n) = F_k(n)\phi(n), \text{ όπου } k \in \mathbb{N}^*,$$

τότε

$$f^*(x) = x^k(\phi^*(x))^{(k)}.$$

Λύση. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
f^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} F_k(n)\phi(n)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\phi(n)x^n \\
&= x^k \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\phi(n)x^{n-k} \\
&\overset{2}{=} x^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \phi(n)x^n\right)^{(k)} \\
&= x^k(\phi^*(x))^{(k)}
\end{aligned}$$

□

[2]Βλέπε Πρόταση 4.2, σελ. 10, τρίτη διάλεξη, Κεφάλαιο 11, Ανάλυση 2.

Εφαρμογή

$$(n^k\phi(n))^*(x) = \sum_{i=1}^{k} \overline{S}(k,i)x^i(\phi^*(x))^{(i)}, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Υπενθυμίζεται ότι ο αριθμός Stirling δευτέρου είδους $\overline{S}(k,i)$ είναι ο συντελεστής του παραγοντικού πολυωνύμου $F_i(x)$ στο ανάπτυγμά του μονωνύμου x^k ως γραμμικός συνδυασμός των παραγοντικών πολυωνύμων, δηλαδή

$$x^k = \sum_{i=0}^{k} \overline{S}(k,i)F_i(x)$$

οπότε για $x = n$ προκύπτει ότι

$$n^k = \sum_{i=0}^{k} \overline{S}(k,i)F_i(n)$$

$$n^k\phi(n) = \sum_{i=0}^{k} \overline{S}(k,i)F_i(n)\phi(n).$$

Από την πρώτη και τέταρτη ιδιότητα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}(n^k\phi(n))^*(x) &= \sum_{i=0}^{k} \overline{S}(k,i)(F_i(n)\phi(n))^* \\ &\overset{3}{=} \sum_{i=1}^{k} \overline{S}(k,i)x^i(\phi^*(x))^{(i)}.\end{aligned}$$

[3] Διότι $\overline{S}(k,0) = 0$, για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$.

Παράδειγμα Αν εφαρμοσθεί ο προηγούμενος τύπος για $k = 1, 2$ και $\phi(n) = a^n$, όπου $a \in \mathbb{R}$, προκύπτουν διαδοχικά οι τύποι:

$$\begin{aligned}(na^n)^*(x) &= \overline{S}(1,1)x((a^n)^*(x))' \\ &\overset{4}{=} 1 \cdot x \left(\frac{1}{1-ax}\right)' \\ &= \frac{ax}{(1-ax)^2}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}(n^2a^n)^*(x) &= \overline{S}(2,1)x((a^n)^*(x))' + \overline{S}(2,2)x^2((a^n)^*(x))'' \\ &\overset{5}{=} 1 \cdot x \left(\frac{1}{1-ax}\right)' + 1 \cdot x^2 \left(\frac{1}{1-ax}\right)'' \\ &= \frac{ax(1+ax)}{(1-ax)^3}.\end{aligned}$$

Ειδικά, για $a = 1$, έχουμε αντίστοιχα τους τύπους:

$$(n)^*(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$(n^2)^*(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

---

[4] Διότι $\overline{S}(1,1) = 1$, αφού $x = F_1(x)$.

[5] Διότι $\overline{S}(2,1) = \overline{S}(2,2) = 1$, αφού $x^2 = F_1(x) + F_2(x)$.

Συνέλιξη

Αν $f, g/\mathbb{N}$ είναι δύο ακολουθίες, τότε το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k)$$

ορίζει μια ακολουθία που ονομάζεται **συνέλιξη** αυτών και σημειώνεται με $f \circledast g$, δηλαδή

$$(f \circledast g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k).$$

Προφανώς, ισχύει ότι $f \circledast g = g \circledast f$.

Επιπλέον, ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1. *Η γεννήτρια συνάρτηση της συνέλιξης δύο ακολουθιών $f, g/\mathbb{N}$ ισούται με το γινόμενο των γεννητριών τους, δηλαδή ισχύει ότι*

$$((f \circledast g)(n))^* = (f(n))^*(g(n))^*.$$

Άσκηση 2. *Να αποδειχθεί ότι για δύο ακολουθίες $f, g/\mathbb{N}$ ισχύει η σχέση*

$$((f \circledast g)(n))^* = (f(n))^*(g(n))^*.$$

Λύση.

$$\begin{aligned}
((f \circledast g)(n))^* &= \sum_{n=0}^{\infty} (f \circledast g)(n) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k) g(n-k) x^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} f(k) g(n-k) x^k x^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) x^k \left(\sum_{n=k}^{\infty} g(n-k) x^{n-k} \right) \\
&\overset{\lambda=n-k}{=} \sum_{k=0}^{\infty} f(k) x^k \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} g(\lambda) x^{\lambda} \right) \\
&= ((f(n))^*(g(n))^*
\end{aligned}$$

□

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1. *Αν*

$f(n) = \phi(0) + \phi(1) + \cdots + \phi(n)$, *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$,

τότε είναι

$$f^*(x) = \frac{\phi^*(x)}{1-x}.$$

Λύση. Πράγματι, εφαρμόζοντας την Πρόταση 1 για την ακολουθία $\phi(n)$ και την σταθερή ακολουθία $1(n) = 1$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \phi(k) \cdot 1(n-k) \right)^* (x) \\ &= (\phi \circledast 1)^*(x) \\ &= \phi^*(x) 1^*(x) \\ &= \phi^*(x) \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n \\ &= \frac{\phi^*(x)}{1-x}. \end{aligned}$$

□

Εφαρμογή 2. *Να αποδειχθεί ο τύπος του Cauchy*

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k}$$

όπου $r, s \in \mathbb{R}$ *και* $n \in \mathbb{N}$,

Λύση. Για την απόδειξη του τύπου του Cauchy τίθεται

$$f(n) = \binom{r}{n}, \; g(n) = \binom{s}{n} \text{ και } h(n) = \binom{r+s}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε από την Πρόταση 1 προκύπτει ότι

$$h^*(x) = (1+x)^{r+s} = (1+x)^r(1+x)^s = f^*(x)g^*(x) = (f \circledast g)^*(x).$$

Άρα,

$$h(n) = (f \circledast g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k)$$

και επομένως,

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Παρατήρηση: Στα Μαθηματικά των Υπολογιστών είχε δοθεί ο τύπος του Vandermonde για τα παραγοντικά πολυώνυμα:

$$F_n(r+s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k(r) F_{n-k}(s)$$

ο οποίος είχε αποδειχθεί με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Οι τύποι των Cauchy και Vandermonde είναι όμως ισοδύναμοι.

Πράγματι, επειδή ισχύει $\binom{x}{n} = \frac{F_n(x)}{n!}$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\binom{r+s}{n} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} \Leftrightarrow \\
\frac{F_n(r+s)}{n!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{F_k(r)}{k!} \frac{F_{n-k}(s)}{(n-k)!} \Leftrightarrow \\
F_n(r+s) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} F_k(r) F_{n-k}(s) \Leftrightarrow \\
F_n(r+s) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k(r) F_{n-k}(s)
\end{aligned}$$

Συνήθεις γεννήτριες συναρτήσεις

$$f^*(x) = (f(n))^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$$

- $(a^n)^* = \dfrac{1}{1-ax}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Ειδικά, $(1)^* = \dfrac{1}{1-x}$.
- $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)^* = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$. Ειδικά, $\left(\dfrac{1}{n!}\right)^* = e^x$.
- $\left(\binom{a}{n}\right)^* = (1+x)^a$, $a \in \mathbb{R}$.

1. $(c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n))^* = c_1 f_1^*(x) + c_2 f_2^*(x)$ όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2. $(a^n \phi(n))^* = \phi^*(ax)$, όπου $a \in \mathbb{R}$.
3. $(\phi(n+k))^* = \frac{\phi^*(x)}{x^k} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\phi(i)}{x^{k-i}}$ όπου $k \in \mathbb{N}^*$.
4. $(F_k(n)\phi(n))^* = x^k(\phi^*(x))^{(k)}$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$.

Συνέλιξη:

$$(f \circledast g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k).$$

$$((f \circledast g)(n))^* = (f(n))^*(g(n))^*.$$

Παραδείγματα

Άσκηση 3. *Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας* $f(n) = 3^n(n+1)^2$.

Λύση. Αν $\phi(n) = n^2$, τότε είναι

$$\begin{aligned}
\phi^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n x^{n-1} \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty} (n x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \right)' \\
&= x \left(x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \right)' = x \left(x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' \right)' \\
&= x \left(x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' \right)' = x \left(x \left(\frac{1}{1-x} \right)' \right)' \\
&= x \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις ιδιότητες 3 και 2 των γεννητριών συναρτήσεων, προκύπτει ότι

$$((n+1)^2)^* = \frac{\phi^*(x)}{x} - \phi(0) = \frac{x+1}{(1-x)^3}$$

και τελικά,

$$f^*(x) = \frac{3x+1}{(1-3x)^3}. \qquad \square$$

Άσκηση 4. *Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $f(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots n^2$.*

Λύση. Αν εφαρμοσθεί η εφαρμογή 1 της Πρότασης 1 για την ακολουθία $\phi(n) = n^2$, με γεννήτρια συνάρτηση

$$(n^2)^*(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

προκύπτει ότι

$$f^*(x) = \frac{\phi^*(x)}{1-x} = \frac{x(x+1)}{(1-x)^4}. \qquad \square$$

Άσκηση 5. *Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας* $f(n) = \dfrac{3^n(2-n)}{(n+1)!}$.

Λύση. Αν τεθεί $\phi(n) = \frac{3^n}{n!}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε είναι $\phi^*(x) = e^{3x}$.

Επιπλέον, είναι

$$f(n) = \frac{3^n(3-(n+1))}{(n+1)!} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{3^n}{n!} = \phi(n+1) - \phi(n),$$

οπότε, σύμφωνα με τις ιδιότητες 1 και 3 των γεννητριών συναρτήσεων, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f^*(x) &= (\phi(n+1))^*(x) - \phi^*(x) \\ &= \frac{\phi^*(x)}{x} - \frac{\phi(0)}{x} - \phi^*(x) \\ &= \frac{e^{3x}}{x} - \frac{1}{x} - e^{3x} \\ &= \frac{(1-x)e^{3x} - 1}{x}. \end{aligned}$$ □

Εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις

Υπάρχουν ορισμένα προβλήματα τα οποία δεν επιλύονται με τις συνήθεις γεννήτριες συναρτήσεις αλλά με μια παραλλαγή τους, τις εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις.

Η **εκθετική γεννήτρια συνάρτηση** f^{**} μιας ακολουθίας $f/\mathbb{N}$ ορίζεται ως εξής:

$$f^{**}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} x^n.$$

Σε ορισμένα βιβλία οι εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις σημειώνονται με $E(x)$ ή $e(x)$.

Επειδή ισχύει η σχέση

$$(f(n))^{**} = \left(\frac{f(n)}{n!}\right)^{*},$$

πολλά από τα αποτελέσματα που είδαμε για τις συνήθεις γεννήτριες συναρτήσεις δίνουν αντίστοιχες ιδιότητες για τις εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις.

Μερικές από αυτές είναι οι εξής:

i) $(n!)^{**} = \dfrac{1}{1-x}$

Πραγματικά,

$$(n!)^{**} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

ii) $(a^n)^{**} = e^{ax}$.

Πραγματικά,

$$(a^n)^{**} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = e^{ax}.$$

iii) Οι ιδιότητες 1, 2 και 4 των συνήθων γεννητριών συναρτήσεων ισχύουν και για τις εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις, δηλαδή

1. $(c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n))^{**}(x) = c_1 f_1^{**}(x) + c_2 f_2^{**}(x)$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2. $(a^n \phi(n))^{**}(x) = \phi^{**}(ax)$, όπου $a \in \mathbb{R}$.
4. $(F_k(n)\phi(n))^{**}(x) = x^k \left(\phi^{**}(x)\right)^{(k)}$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$.

iv) Αντίθετα, η ιδιότητα 3 των γεννητριών συναρτήσεων αντικαθίσταται από την ιδιότητα:

3. $(\phi(n+k))^{**}(x) = \left(\phi^{**}(x)\right)^{(k)}$, όπου $k \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 6. *Αν* $f(n) = \phi(n+k)$, *όπου* $k \in \mathbb{N}^*$, *να δειχθεί ότι*
$$f^{**}(x) = (\phi^{**}(x))^{(k)}.$$

Πράγματι, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
f^{**}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(n+k)x^n}{n!} \\
&\overset{m=n+k}{=} x^{-k} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\phi(m)x^m}{(m-k)!} \\
&= x^{-k} \sum_{m=k}^{\infty} m(m-1)\cdots(m-k+1)\frac{\phi(m)}{m!}x^m. \\
&= x^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)\cdots(m-k+1)\frac{\phi(m)}{m!}x^m. \\
&= x^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} F_k(m)\frac{\phi(m)}{m!}x^n \\
&= x^{-k} \left(F_k(m)\frac{\phi(m)}{m!}\right)^{*}(x)
\end{aligned}$$

Αν τεθεί $\psi(m) = \dfrac{\phi(m)}{m!}$ τότε σύμφωνα με την ιδιότητα 4 των συνήθων γεννητριών συναρτήσεων έχουμε ότι

$$f^{**}(x) = x^{-k}x^k(\psi^*(x))^{(k)}$$

Άρα,

$$f^{**}(x) = (\psi^*(x))^{(k)} = (\phi^{**}(x))^{(k)}$$

Τέλος, στην επόμενη πρόταση δίδεται αποτέλεσμα ανάλογο με αυτό της Πρότασης 1.

Πρόταση 2. *Αν* $f, g, h/\mathbb{N}$ *είναι τρεις ακολουθίες με*

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k) g(n-k),$$

τότε η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της h *ισούται με το γινόμενο των εκθετικών γεννητριών των* f, g, *δηλαδή*

$$h^{**}(x) = f^{**}(x) g^{**}(x).$$

Απόδειξη. Αν τεθεί

$$f_1(n) = \frac{f(n)}{n!}, g_1(n) = \frac{g(n)}{n!} \text{ και } h_1(n) = \frac{h(n)}{n!},$$

τότε είναι

$$\begin{aligned} f_1 \circledast g_1(n) &= \sum_{k=0}^{n} f_1(k) g_1(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(k)}{k!} \frac{g(n-k)}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k) g(n-k) \\ &= \frac{h(n)}{n!} = h_1(n), \end{aligned}$$

οπότε από την Πρόταση 1 προκύπτει ότι

$$h^{**}(x) = h_1^{*}(x) = (f_1 \circledast g_1)^{*}(x) = f_1^{*}(x) g_1^{*}(x) = f^{**}(x) g^{**}(x).$$

□

Εφαρμογές

Εφαρμογή 3. *Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας B_n των αριθμών Bell.*

Λύση. Υπενθυμίζεται ότι ο αριθμός των διαμερίσεων ενός συνόλου E με n στοιχεία ονομάζεται αριθμός Bell n τάξης και σημειώνεται με B_n.

Επίσης είναι γνωστό ότι

$$B_0 = 1 \text{ και } B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k. \tag{1}$$

Προκειμένου να ευρεθεί η εκθετική γεννήτρια της ακολουθίας (B_n) των αριθμών Bell, τίθεται $f(n) = B_n$ και $g(n) = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε εφαρμόζοντας την Πρόταση 2, και με τη βοήθεια της ιδιότητας 3. της εκθετικής γεννήτριας, η σχέση (1) δίδει

$$f(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)g(n-k)$$

$$(f(n+1))^{**} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)g(n-k) \right)^{**}$$

$$(f^{**}(x))' = f^{**}(x)g^{**}(x)$$

$$(f^{**}(x))' = f^{**}(x)e^x$$

Η τελευταία διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, και επιλύοντάς την κατά τα γνωστά προκύπτει ότι

$$f^{**}(x) = ce^{e^x}.$$

Τέλος, επειδή $f^{**}(0) = B_0 = 1$, προκύπτει ότι $c = e^{-1}$, οπότε η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας (B_n) των αριθμών Bell είναι

$$f^{**}(x) = e^{e^x - 1}. \qquad \square$$

Εφαρμογή 4.

i) *Να δειχθεί ο τύπος*

$$\overline{S}(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}\nu^n$$

για κάθε $k = 0,1,\ldots,n$ *και* $n \in \mathbb{N}$.

ii) *Να βρεθεί η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας* $f(n) = \overline{S}(n,k)$ *των αριθμών Stirling δευτέρου είδους, όπου* k *σταθερός αριθμός στο* $\mathbb{N}^*$.

Λύση.

i) Από τον ορισμό των αριθμών Stirling δευτέρου είδους έχουμε ότι

$$x^n = \sum_{k=0}^{n}\overline{S}(n,k)F_k(x).$$

Από τον τύπο του Gregory

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(\Delta^k p)(0)}{k!}F_k(x)$$

για $p(x) = x^n$ έχουμε ότι

$$x^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(\Delta^k x^n)(0)}{k!}F_k(x)$$

οπότε

$$\overline{S}(n,k) = \frac{(\Delta^k x^n)(0)}{k!}. \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας τον γνωστό τύπο

$$\Delta^k y(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} y(x+k-\nu)$$

για $y(x) = x^n$ έχουμε ότι

$$(\Delta^k x^n)(0) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} (0+k-\nu)^n$$

οπότε από τον τύπο (2) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\overline{S}(n,k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} (k-\nu)^n \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{k-\nu} \nu^n \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \nu^n
\end{aligned}$$

□

ii) Ισχύει ότι,

$$
\begin{aligned}
f^{**}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{S}(n,k)\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \nu^n \right) \frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \frac{(\nu x)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu x)^n}{n!} \\
&\overset{6}{=} \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} e^{\nu x} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} (e^x)^{\nu} (-1)^{k-\nu}.
\end{aligned}
$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του διωνύμου του Νεύτωνα προκύπτει ότι

$$f^{**}(x) = \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k.$$

[6] Σύμφωνα με το ανάπτυγμα της εκθετικής σειράς.

2η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ασκήσεις - Εφαρμογές

Συνήθεις γεννήτριες συναρτήσεις

$$f^*(x) = (f(n))^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$$

- $(a^n)^* = \dfrac{1}{1-ax}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Ειδικά, $(1)^* = \dfrac{1}{1-x}$.
- $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)^* = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$. Ειδικά, $\left(\dfrac{1}{n!}\right)^* = e^x$.
- $\left(\binom{a}{n}\right)^* = (1+x)^a$, $a \in \mathbb{R}$.

1. $(c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n))^* = c_1 f_1^*(x) + c_2 f_2^*(x)$ όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2. $(a^n \phi(n))^* = \phi^*(ax)$, όπου $a \in \mathbb{R}$.
3. $(\phi(n+k))^* = \frac{\phi^*(x)}{x^k} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\phi(i)}{x^{k-i}}$ όπου $k \in \mathbb{N}^*$.
4. $(F_k(n)\phi(n))^* = x^k (\phi^*(x))^{(k)}$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$.

Συνέλιξη:

$$(f \circledast g)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k).$$

$$((f \circledast g)(n))^* = (f(n))^*(g(n))^*.$$

Εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις

$$f^{**}(x) = (f(n))^{**}(x) = \left(\frac{f(n)}{n!}\right)^{*} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} x^n$$

- $(n!)^{**} = \dfrac{1}{1-x}$
- $(a^n)^{**} = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$. Ειδικά, $(1)^{**} = e^x$

1. $(c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n))^{**} = c_1 f_1^{**}(x) + c_2 f_2^{**}(x)$ όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2. $(a^n \phi(n))^{**} = \phi^{**}(ax)$, όπου $a \in \mathbb{R}$.
3. $(\phi(n+k))^{**} = (\phi^{**}(x))^{(k)}$ όπου $k \in \mathbb{N}$.
4. $(F_k(n)\phi(n))^{**} = x^k(\phi^{**}(x))^{(k)}$, όπου $k \in \mathbb{N}^*$.

Αν

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k) g(n-k)$$

τότε

$$h^{**}(x) = (f(n))^{**}(g(n))^{**}.$$

Αναδρομικές σχέσεις και γεννήτριες

Στην ενότητα αυτή θα δοθεί ο τρόπος υπολογισμού της γεννήτριας συνάρτησης f^* από μια ακολουθία f η οποία δίδεται σε αναδρομική μορφή και αντίστροφα.

Άσκηση 7. *Να βρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $f(n)$ όπου*

$$f(n) = 7f(n-1) - 12f(n-2) \;\; \text{για κάθε } n \geqslant 2.$$

και $f(0) = -1$, $f(1) = -2$.

Λύση. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
f^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = f(0) + f(1)x + \sum_{n=2}^{\infty} f(n)x^n \\
&= -1 - 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(7f(n-1) - 12f(n-2)\right) x^n \\
&= -1 - 2x + 7\sum_{n=2}^{\infty} f(n-1)x^n - 12\sum_{n=2}^{\infty} f(n-2)x^n \\
&= -1 - 2x + 7x\sum_{n=2}^{\infty} f(n-1)x^{n-1} - 12x^2\sum_{n=2}^{\infty} f(n-2)x^{n-2} \\
&= -1 - 2x + 7x\sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n - 12x^2\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n \\
&= -1 - 2x + 7x(f^*(x) - f(0)) - 12x^2 f^*(x) \\
&= -1 - 2x + 7x(f^*(x) + 1) - 12x^2 f^*(x).
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$f^*(x) = \frac{5x-1}{1-7x+12x^2}. \qquad \square$$

Ο συμβολισμός $[x^n]f^*(x)$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\begin{aligned}[x^n]f^*(x) &= \text{ο συντελεστής του } x^n \text{ στο ανάπτυγμα της } f^*. \\ &= f(n).\end{aligned}$$

Παράδειγμα: $[x^n]e^{3x} = \dfrac{3^n}{n!}$, διότι $e^{3x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(3x)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n}{n!} x^n$.

Ισχύει ότι

$$[x^n]x^m f^*(x) = \begin{cases} [x^{n-m}]f^*(x), & \text{αν } n \geqslant m \\ 0, & \text{αν } n < m \end{cases}$$

διότι

$$\begin{aligned} x^m f^*(x) &= x^m \sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n) x^{n+m} \\ &\overset{k=m+n}{=} \sum_{k=m}^{\infty} f(k-m) x^k \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} f(n-m) x^n \end{aligned}$$

Άσκηση 8. *Να βρεθεί μια αναγωγική σχέση για την ακολουθία $f/\mathbb{N}$ όταν*

$$f^*(x) = \frac{1-x}{1-2x+x^5}.$$

Λύση. Ισχύει ότι

$$(1-2x+x^5)f^*(x) = 1-x.$$

Για $n \geqslant 5$, για τον συντελεστή του x^n στο αριστερό μέλος έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&[x^n](1-2x+x^5)f^*(x) \\
&= [x^n]f^*(x) - [x^n]2xf^*(x) + [x^n]x^5f^*(x) \\
&= [x^n]f^*(x) - 2[x^{n-1}]f^*(x) + [x^{n-5}]f^*(x) \\
&= f(n) - 2f(n-1) + f(n-5)
\end{aligned}$$

αντίστοιχα για τον συντελεστή του x^n στο δεξιό μέλος έχουμε ότι

$$[x^n](1-x) = 0.$$

Εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές των δύο μελών, για $n \geqslant 5$ ισχύει ότι

$$f(n) - 2f(n-1) + f(n-5) = 0.$$

Οι τιμές $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ και $f(4)$ υπολογίζονται ως εξής:

$$[x^0](1-2x+x^5)f^*(x) = [x^0](1-x) \Rightarrow$$
$$[x^0]f^*(x) - 2[x^0]xf^*(x) + [x^0]x^5f^*(x) = 1 \Rightarrow$$
$$f(0) - 0 + 0 = 1 \Rightarrow$$
$$f(0) = 1.$$

$$[x^1](1-2x+x^5)f^*(x) = [x^1](1-x) \Rightarrow$$
$$[x^1]f^*(x) - 2[x^1]xf^*(x) + [x^1]x^5f^*(x) = -1 \Rightarrow$$
$$f(1) - 2f(0) + 0 = -1 \Rightarrow$$
$$f(1) = 1.$$

$$[x^2](1-2x+x^5)f^*(x) = [x^2](1-x) \Rightarrow$$
$$[x^2]f^*(x) - 2[x^2]xf^*(x) + [x^2]x^5f^*(x) = 0 \Rightarrow$$
$$f(2) - 2f(1) + 0 = 0 \Rightarrow$$
$$f(2) = 2.$$

$$[x^3](1-2x+x^5)f^*(x) = [x^3](1-x) \Rightarrow$$
$$[x^3]f^*(x) - 2[x^3]xf^*(x) + [x^3]x^5f^*(x) = 0 \Rightarrow$$
$$f(3) - 2f(2) + 0 = 0 \Rightarrow$$
$$f(3) = 4.$$

$$[x^4](1-2x+x^5)f^*(x) = [x^4](1-x) \Rightarrow$$
$$[x^4]f^*(x) - 2[x^4]xf^*(x) + [x^4]x^5f^*(x) = 0 \Rightarrow$$
$$f(4) - 2f(3) + 0 = 0 \Rightarrow$$
$$f(4) = 8.$$

$\square$

Άσκηση 9. *Να βρεθεί μια αναγωγική σχέση για την ακολουθία $f/\mathbb{N}$ όταν*

$$f^{**}(x) = \frac{e^x}{1-2x}$$

Λύση. Ισχύει ότι

$$(1-2x)f^{**}(x) = e^x.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^n σε κάθε μέλος έχουμε ότι

$$[x^n](1-2x)f^{**}(x) = [x^n]e^x$$

οπότε

$$[x^n]f^{**}(x) - 2[x^n]xf^{**}(x) = \frac{1}{n!}. \tag{1}$$

Επομένως, για $n \geqslant 1$ ισχύει ότι

$$[x^n]f^{**}(x) - 2[x^{n-1}]f^{**}(x) = \frac{1}{n!}.$$

$$\frac{f(n)}{n!} - 2\frac{f(n-1)}{(n-1)!} = \frac{1}{n!},$$
$$f(n) - 2nf(n-1) = 1.$$

Θέτωντας $n = 0$ στην σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\frac{f(0)}{0!} - 2 \cdot 0 = \frac{1}{0!}.$$
$$f(0) = 1$$

□

Υπολογισμός εκθετικής γεννήτριας

Άσκηση 10. *Έστω ένα σύνολο X με n στοιχεία και $h(n)$ ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να ληφθούν ένα διατεταγμένο υποσύνολο S του X και ένα (μη διατεταγμένο) υποσύνολο T του X το οποίο να μην περιέχει κανένα κοινό στοιχείο με το S.*

i) *Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $h(n)$.*

ii) *Να υπολογισθεί η εκθετική γεννήτρια της συνάρτησης $h(n)$.*

Λύση.

i) Αν υποτεθεί ότι το διατεταγμένο υποσύνολο S του X έχει k στοιχεία (όπου $0 \leqslant k \leqslant n$), τότε αυτό μπορεί να ληφθεί κατά $\frac{n!}{(n-k)!}$ τρόπους (αριθμός των διατάξεων του n ανά k). Το άλλο υποσύνολο T του X θα είναι υποσύνολο του $X \setminus S$ οπότε μπορεί να ληφθεί κατά 2^{n-k} τρόπους (αφού $\mathcal{P}(X \setminus S) = 2^{|X \setminus S|} = 2^{n-k}$).

Έτσι, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή και τα δύο μαζί μπορούν να ληφθούν κατά $\frac{n!}{(n-k)!}2^{n-k}$ τρόπους. Αθροίζοντας ως προς k προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} h(n) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} 2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! 2^{n-k}. \end{aligned}$$

ii) Αν τεθούν

$$f(n) = n! \text{ και } g(n) = 2^n,$$

τότε

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k) g(n-k)$$

οπότε από την Πρόταση 2 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} h^{**}(x) &= f^{**}(x) g^{**}(x) \\ &= (n!)^{**} (2^n)^{**} \\ &= \frac{1}{1-x} e^{2x} \\ &= \frac{e^{2x}}{1-x}. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 11. *Έστω $f(n)$ ο συνολικός αριθμός των διατάξεων n στοιχείων.*

Να ευρεθεί η εκθετική γεννήτρια της ακολουθίας $(f(n))$ και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι

$$f(n) = nf(n-1) + 1, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Λύση. Ισχύει ότι

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} P_{n,k},$$

όπου $P_{n,k} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ για $k \in [n]$ και $P_{n,0} = 1$. Εύκολα προκύπτει ότι

$$\frac{P_{n,k}}{n!} = \frac{1}{(n-k)!} \text{ για κάθε } k = 0, 1, \ldots, n$$

Πράγματι, για $k \geqslant 1$ είναι

$$\frac{P_{n,k}}{n!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)\cdots 2\cdot 1} = \frac{1}{(n-k)!},$$

ενώ για $k = 0$ είναι προφανές.

Κατόπιν τούτων,

$$\begin{aligned}
f^{**}(x) &= \left(\frac{f(n)}{n!}\right)^{*}(x) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}\right)^{*}(x) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} 1(k)\frac{1}{(n-k)!}\right)^{*}(x), \text{όπου } 1(n) = 1 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \\
&= \left(1(n) \circledast \frac{1}{n!}\right)^{*}(x) \\
&= (1(n))^{*}\left(\frac{1}{n!}\right)^{*}(x) \\
&= \frac{e^{x}}{1-x}
\end{aligned}$$

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι

$$f^{**}(x) - xf^{**}(x) = e^{x}$$

οπότε για $n \geqslant 1$ είναι

$$\begin{gathered}
[x^{n}]f^{**}(x) - [x^{n}]xf^{**}(x) = [x^{n}]e^{x} \\
[x^{n}]f^{**}(x) - [x^{n-1}]f^{**}(x) = [x^{n}]e^{x} \\
\frac{f(n)}{n!} - \frac{f(n-1)}{(n-1)!} = \frac{1}{n!} \\
f(n) - nf(n-1) = 1 \\
f(n) = nf(n-1) + 1
\end{gathered}$$

$\square$

Ενελίξεις

Μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ ονομάζεται **ενέλιξη** (involution) αν και μόνο αν $\sigma = \sigma^{-1}$.

Για παράδειγμα, η μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 8 & 2 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ είναι μια ενέλιξη.

Προφανώς, σ ενέλιξη αν και μόνο αν $\sigma^2(k) = k$ για κάθε $k \in [n]$.

Άσκηση 12. *Έστω $f(n)$ ο αριθμός των ενελίξεων του $[n]$.*

i) *Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geqslant 2$ ισχύει ότι*

$$f(n) = f(n-1) + (n-1)f(n-2),$$

όπου $f(0) = 1$, $f(1) = 1$.

ii) *Να δειχθεί ότι η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $f(n)$ δίδεται από τη σχέση*

$$f^{**}(x) = e^{x + \frac{1}{2}x^2}.$$

Λύση.

i) Οι ενελίξεις του $[n]$, όπου $n \geqslant 2$, διαμερίζονται σε δύο κατηγορίες:

- αυτές που σταθεροποιούν το στοιχείο n

και

- αυτές που δεν σταθεροποιούν το στοιχείο n.

Για παράδειγμα η ενέλιξη $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 6 & 2 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ ανήκει στην πρώτη κατηγορία, ενώ η ενέλιξη $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 8 & 2 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ανήκει στην δεύτερη κατηγορία.

Κάθε ενέλιξη σ του $[n]$ που ανήκει στην πρώτη κατηγορίας (δηλαδή ισχύει $\sigma(n) = n$) αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε μια ενέλιξη σ' του $[n-1]$ η οποία προκύπτει αν διαγράψουμε το στοιχείο n από την σ. Για παράδειγμα, αν $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 6 & 2 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ τότε $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Άρα, ο αριθμός των ενελίξεων του $[n]$ με $\sigma(n) = n$ ισούται με $f(n-1)$.

Από την άλλη, κάθε ενέλιξη σ του $[n]$ που ανήκει στην δεύτερη κατηγορία (δηλαδή ισχύει $\sigma(n) \neq n$) αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε ένα ζευγάρι (k, σ') όπου $k \in [n-1]$ και σ' μια ενέλιξη του $[n-2]$.

Πράγματι, με δεδομένη την σ ορίζουμε $k = \sigma(n)$ και η σ' προκύπτει αν διαγράψουμε τα k, n από την σ και μειώσουμε τα στοιχεία της σ που είναι μεγαλύτερα από το k κατά μια μονάδα.

Αντίστροφα, αν δίδεται το ζευγάρι (k, σ') τότε αν αυξήσουμε κάθε στοιχείο της σ' που είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το k κατά μια μονάδα και τοποθετήσουμε τα n, k στην k-οστή και τελευταία θέση αντίστοιχα προκύπτει η ενέλιξη σ όπου $\sigma(n) = k \neq n$.

Για παράδειγμα, αν $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 8 & 2 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, τότε $k = 4$ και $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Κατόπιν τούτων επειδή υπάρχουν $n-1$ επιλογές για το k και $f(n-2)$ για το σ' από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει ότι ο αριθμός των ενελίξεων του $[n]$ με $\sigma(n) \neq n$ είναι ίσος με $(n-1)f(n-2)$.

Προθέτωντας τους αριθμούς για κάθε περίπτωση προκύπτει ο ζητούμενος αναγωγικός τύπος.

ii) Έστω

$$g(n) = \frac{f(n)}{n!},$$

τότε

$$g^{*}(x) = f^{**}(x).$$

Από την προηγούμενη σχέση

$$f(n) = f(n-1) + (n-1)f(n-2),$$

για $n \geqslant 2$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} g(n) = \frac{f(n)}{n!} &= \frac{f(n-1)}{n!} + \frac{(n-1)f(n-2)}{n!} \\ &= \frac{1}{n}\frac{f(n-1)}{(n-1)!} + \frac{1}{n}\frac{f(n-2)}{(n-2)!} = \frac{1}{n}g(n-1) + \frac{1}{n}g(n-2). \end{aligned}$$

Άρα,

$$ng(n) = g(n-1) + g(n-2) \text{ για κάθε } n \geqslant 2.$$

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με x^{n-1} και αθροίζοντας για κάθε $n \geqslant 2$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} ng(n)x^{n-1} &= \sum_{n=2}^{\infty} g(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} g(n-2)x^{n-1} \Leftrightarrow \\
\sum_{n=2}^{\infty} g(n)(x^n)' &= \sum_{n=2}^{\infty} g(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} g(n-2)x^{n-1} \Leftrightarrow \\
\left(\sum_{n=2}^{\infty} g(n)x^n\right)' &= \sum_{n=1}^{\infty} g(n)x^n + x\sum_{n=0}^{\infty} g(n)x^n \Leftrightarrow \\
(g^*(x) - g(0) - xg(1))' &= (g^*(x) - g(0)) + xg^*(x) \\
(g^*(x))' - 1 &= g^*(x) - 1 + xg^*(x) \Leftrightarrow \\
\frac{(g^*(x))'}{g^*(x)} &= 1 + x \Leftrightarrow \\
(\ln g^*(x))' &= 1 + x \Leftrightarrow \\
\ln g^*(x) &= \int (1+x)dx \\
\ln g^*(x) &= x + \frac{x^2}{2} + c.
\end{aligned}$$

Για $x = 0$ γνωρίζουμε ότι $g^*(0) = g(0) = \dfrac{f(0)}{0!} = 1$ επομένως $\ln 1 = 0 + 0^2 + c \Rightarrow c = 0$.

Άρα

$$\ln g^*(x) = \ln f^{**}(x) = x + \frac{x^2}{2}$$

δηλαδή

$$f^{**}(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}. \qquad \square$$

Μεταθέσεις με σταθερά σημεία

Μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ έχει το $i \in [n]$ **σταθερό σημείο** αν και μόνο αν $\sigma(i) = i$.
Παράδειγμα: Η μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \mathbf{5} & 6 & \mathbf{7} & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & \mathbf{5} & 1 & \mathbf{7} & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

έχει δύο σταθερά σημεία ενώ η μετάθεση

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 8 & 7 & 5 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

δεν έχει καθόλου σταθερά σημεία.

Άσκηση 13. *Να υπολογισθεί ο αριθμός $d_{n,k}$ των μεταθέσεων μήκους n που έχουν k σταθερά σημεία.*

Λύση. Προφανώς ισχύει ότι

$$n! = \sum_{k=0}^{n} d_{n,k} \tag{2}$$

Αν $d_n = d_{n,0}$ το πλήθος των μεταθέσεων του $[n]$ που δεν έχουν σταθερά σημεία τότε

$$d_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k}. \tag{3}$$

Πραγματικά, τα k σταθερά σημεία μιας μετάθεσης μήκους n με k σταθερά σημεία μπορούν να επιλεγούν με $\binom{n}{k}$ τρόπους. Τα υπόλοιπα στοιχεία της μετάθεσης αποτελούν μια μετάθεση μήκους $n-k$ που δεν έχει σταθερά σημεία.

Παράδειγμα: Η μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 9 & 7 & 2 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

έχει 3 σταθερά σημεία: τα 1, 3 και 8.

Τα υπόλοιπα στοιχεία της αποτελούν μια μετάθεση μήκους $9 - 3 = 6$ χωρίς σταθερά σημεία δηλαδή την

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 5 & 9 & 7 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$$

Αν τεθεί

$$f(n) = 1 \text{ και } g(n) = d_n$$

τότε ισχύει ότι

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k) g(n-k)$$

οπότε

$$(n!)^{**} = f^{**}(x) g^{**}(x) \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} = e^x g^{**}(x).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} g^{**}(x) &= e^{-x} \frac{1}{1-x} \\ &= ((-1)^n)^{**} (n!)^{**} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)! \right)^{**}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

οπότε από τη σχέση (3) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} d_{n,k} &= \binom{n}{k} d_{n-k} \\ &= \binom{n}{k} (n-k)! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \\ &= \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-i)^i}{i!}. \end{aligned}$$ □

Αντίστροφες σχέσεις

Άσκηση 14. *Να δειχθεί ότι αν*

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g(k)$$

τότε

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k).$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση. Αν τεθεί $h(n) = 1$ τότε

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g(k) h(n-k)$$

οπότε

$$f^{**}(x) = g^{**}(x) h^{**}(x) \Leftrightarrow f^{**}(x) = g^{**}(x) e^{x}.$$

Επομένως,

$$g^{**}(x) = f^{**}(x) e^{-x}$$

Επειδή

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \text{ δηλαδή } e^{-x} = ((-1)^n)^{**}$$

προκύπτει ότι

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k) (-1)^{n-k}.$$

□

3η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Αντιστροφή

Αντιστροφή

Ένας πολύ σημαντικό πρόβλημα που εμφανίζεται στις εφαρμογές, γνωστό ως **πρόβλημα της αντιστροφής**, είναι η εύρεση του τύπου της ακολουθίας όταν δίδεται η γεννήτριά της (ή η εκθετική γεννήτριά της).

Στην περίπτωση αυτή αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά η γεννήτρια συνάρτηση f^*, δηλαδή $f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, οπότε $f(n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Η ανάπτυξη της f^* σε δυναμοσειρά δεν είναι πάντα εύκολη και εξαρτάται από την μορφή της f^*.

Αντιστροφή ρητών γεννητριών συναρτήσεων

Όταν η f^* είναι ρητή συνάρτηση αναλύεται σε μερικά κλάσματα, τα οποία στη συνέχεια αναπτύσσονται ευκολότερα σε δυναμοσειρές.

Παράδειγμα 1. *Να βρεθεί η ακολουθία $f(n)$ όταν*

$$f^*(x) = \frac{1-2x^2-x}{(1-x)^2(1-3x)}.$$

Λύση. Αναλύοντας την f^* σε μερικά κλάσματα προκύπτει ότι

$$f^*(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-3x}.$$

Επειδή

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

και

$$\frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n,$$

προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
f^*(x) &= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 + (n+1) + 3^n\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+3^n)x^n.
\end{aligned}
$$

Άρα, $f(n) = n + 3^n$. $\square$

Αντιστροφή μη ρητών γεννητριών συναρτήσεων

Στην περίπτωση όπου η f^* δεν είναι ρητή προσπαθούμε να εκφράσουμε να εκφράσουμε την f^* με τη βοήθεια άλλων γνωστών γεννητριών και αλγεβρικών πράξεων όπως η πρόσθεση, το γινόμενο, η παράγωγος κλπ.

Παράδειγμα 2. *Να βρεθεί η ακολουθία $f(n)$ όταν*

$$f^*(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-1} (1-x)^{-1} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-2} \ln(1-x).$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$f^*(x) = (g^*(x)h^*(x))'$$

όπου

$$g^*(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-1} \text{ και } h^*(x) = -\ln(1-x).$$

Αναπτύσσοντας τις γεννήτριες συναρτήσεις $g^*(x)$, $h^*(x)$ σε δυναμοσειρές:

$$g^*(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$$

και

$$h^*(x) = -\ln(1 + (-x)) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

προκύπτει ότι

$$g(n) = \frac{1}{2^n} \text{ και } h(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{αν } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{αν } n = 0 \end{cases}.$$

Από το θεώρημα της συνέλιξης

$$f^*(x) = ((h \circledast g)^*(x))'$$

Επιπλέον για $n \geqslant 1$ είναι

$$\begin{aligned}
(h \circledast g)(n) &= \sum_{k=0}^{n} h(k)g(n-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\frac{1}{2^{n-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\frac{1}{2^{n-(k+1)}} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k+1},
\end{aligned}$$

ενώ για $n = 0$ έχουμε ότι

$$(h \circledast g)(0) = h(0)g(n) = 0.$$

Κατόπιν τούτων από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
f^*(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(h \circledast g)(n)x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} ((h \circledast g)(n)x^n)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(h \circledast g)(n)x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(h \circledast g)(n+1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k+1}x^n.
\end{aligned}$$

Άρα

$$f(n) = \frac{(n+1)}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k+1}. \qquad \square$$

Θεώρημα αντιστροφής του Lagrange

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η συνάρτηση f^* δίδεται σε πεπλεγμένη μορφή, δηλαδή δεν δίδεται ο ακριβής τύπος της αλλά μια συναρτησιακή εξίσωση της οποία η f^* είναι λύση. Για παράδειγμα ζητείται να ευρεθεί ο τύπος της ακολουθίας $(f(n))$ όταν ισχύει ότι

$$x(f^*(x))^2 + (x-1)f^*(x) - x + 1 = 0. \tag{4}$$

Οι περιπτώσεις αυτές συνήθως αντιμετωπίζονται με τη βοήθεια ενός πολύ σημαντικού θεωρήματος, γνωστού ως **θεώρημα αντιστροφής του Lagrange**, το οποίο έχει πολλές ισοδύναμες μορφές.

Μια ειδική μορφή του δίδεται στο επόμενο θεώρημα.

Πρόταση 3 (Θεώρημα αντιστροφής του Lagrange). *Αν μια γεννήτρια συνάρτηση f^* ικανοποιεί μια συναρτησιακή εξίσωση της μορφής*

$$f^*(x) = 1 + xF(f^*(x))$$

όπου $F(z)$ είναι μια δυναμοσειρά, τότε ο αριθμός $nf(n)$ θα είναι ίσος με το συντελεστή του z^{n-1} στη δυναμοσειρά $(F(z+1))^n$, δηλαδή

$$nf(n) = [z^{n-1}](F(z+1))^n,$$

όπου $n \in \mathbb{N}^*$.

Έτσι, για παράδειγμα η εξίσωση (4) γράφεται

$$f^*(x) = 1 + x\left((f^*(x))^2 + f^*(x) - 1\right) = 1 + xF(f^*(x))$$

όπου $F(z) = z^2 + z - 1$ και στη συνέχεια εφαρμόζεται το Θεώρημα αντιστροφής του Lagrange.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 5. *Να βρεθεί ο αριθμός $f(n)$ των τριαδικών δένδρων με n κορυφές, όταν είναι γνωστό ότι η γεννήτρια συνάρτηση $f^*(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση*

$$f^*(x) = 1 + x(f^*(x))^3.$$

Λύση. Θεωρούμε το πολυώνυμο $F(z) = z^3$ για το οποίο ισχύει ότι

$$(F(z+1))^n = (z+1)^{3n} = \sum_{i=0}^{3n} \binom{3n}{i} z^i. \tag{1}$$

Επειδή η γεννήτρια συνάρτηση f^* ικανοποιεί τη συναρτησιακή σχέση

$$f^*(x) = 1 + xF(f^*(x)),$$

εφαρμόζεται το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange, οπότε, λόγω της σχέσης (1), προκύπτει ότι

$$nf(n) = [z^{n-1}](F(z+1))^n = \binom{3n}{n-1}.$$

Άρα,

$$f(n) = \frac{1}{n}\binom{3n}{n-1} = \frac{1}{2n+1}\binom{3n}{n}.$$ □

Εφαρμογή 6. *Να βρεθεί ο αριθμός $f(n)$ των δένδρων με ρίζα, που έχουν n κορυφές με επιγραφή, όταν είναι γνωστό ότι η εκθετική γεννήτρια συνάρτησή τους ικανοποιεί την εξίσωση*

$$f^{**}(x) = xe^{f^{**}(x)}.$$

Λύση. Προκειμένου να γράψουμε την εξίσωση της εκφώνησης στη μορφή του θεωρήματος αντιστροφής του Lagrange θέτουμε

$$g(x) = 1 + f^{**}(x)$$

οπότε είναι

$$\begin{aligned} f^{**}(x) = xe^{f^{**}(x)} &\Leftrightarrow g(x) - 1 = xe^{g(x)-1} \\ &\Leftrightarrow g(x) = 1 + xe^{g(x)-1} \\ &\Leftrightarrow g(x) = 1 + xF(g(x)) \end{aligned}$$

όπου $F(z) = e^{z-1}$. Επειδή

$$(F(z+1))^n = e^{nz} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(nz)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n^i}{i!} z^i,$$

από το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange προκύπτει ότι για $n \geqslant 1$

$$n[x^n]g(x) = n\frac{f(n)}{n!} = [z^{n-1}](F(z+1))^n = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Άρα,

$$f(n) = n^{n-1} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Προφανώς, $f(0) = f^{**}(0) = 0$. □

Εφαρμογή 7. *Να ευρεθεί ο τύπος της ακολουθίας $(f(n))$ όταν*
$$x(f^*(x))^2 + (x-1)f^*(x) - x + 1 = 0.$$

Λύση. Η δοσμένη συναρτησιακή εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} f^*(x) &= 1 + x\left((f^*(x))^2 + f^*(x) - 1\right) \\ &= 1 + xF(f^*(x)) \end{aligned}$$

όπου $F(z) = z^2 + z - 1$.

Για $n \geqslant 1$ είναι

$$\begin{aligned} (F(z+1))^n &= \left((z+1)^2 + (z+1) - 1\right)^n = (z^2+3z+1)^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (z^2+3z)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i (z+3)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} z^j 3^{i-j} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{i} \binom{i}{j} 3^{i-j} z^{i+j} \\ &\overset{k=i+j}{=} \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{i}{k-i} 3^{2i-k} z^k \end{aligned}$$

Οπότε από το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange για $n \geqslant 1$

$$nf(n) = [z^{n-1}](F(z+1))^n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{i}{n-1-i} 3^{2i-n+1}$$

Άρα,

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{i}{n-1-i} 3^{2i-n+1}, \text{ για } n \geqslant 1,$$

ενώ $f(0) = f^*(0) = 1$ $\square$

Εφαρμογές

Οι γεννήτριες συναρτήσεις χρησιμοποιούνται για την επίλυση συναρτησιακών εξισώσεων.

Σύμφωνα με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων, αρχικά βρίσκεται η γεννήτρια συνάρτηση $y^*(x)$ της άγνωστης ακολουθίας, και στη συνέχεια με αντιστροφή βρίσκεται η ζητούμενη ακολουθία y_n.

Γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Γενική μορφή:

$$a_\nu y_{n+\nu} + a_{\nu-1} y_{n+\nu-1} + \cdots + a_0 y_n = \beta_n. \tag{1}$$

Αρχικές συνθήκες:

$$y_0 = c_0, y_1 = c_1, \ldots, y_{\nu-1} = c_{\nu-1}. \tag{2}$$

Για την επίλυση της εξίσωσης (1) με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών[7] (2), σύμφωνα με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων, αρχικά τίθεται

$$y^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n.$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (1) επί $x^{n+\nu}$ και αθροίζοντας ως προς n, προκύπτει μια αλγεβρική εξίσωση με άγνωστο της γεννήτρια συνάρτηση $y^*(x)$.

Κατόπιν τούτων, επιλύοντας την εξίσωση αυτή, ευρίσκεται η $y^*(x)$ και στη συνέχεια, με αντιστροφή, βρίσκεται και η y_n.

[7] Αν δεν δίδονται αρχικές τιμές τότε η γενική λύση βρίσκεται συναρτήσει των παραμέτρων $c_0, c_1, \ldots, c_{\nu-1}$.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 3. *Να λυθεί η εξίσωση*

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0,$$

όταν $y_0 = 1$ *και* $y_1 = 2$.

Λύση. Από τη δοσμένη εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες προκύπτει ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2}x^{n+2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^{n+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2}x^{n+2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1}x^{n+1} + x^2\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^{n} = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} y_n x^n - 2x\sum_{n=1}^{\infty} y_n x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = 0$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n - (y_0 + y_1 x)\right) - 2x\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n - y_0\right) + x^2\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = 0$$

$$y^*(x) - (1 + 2x) - 2x(y^*(x) - 1) + x^2 y^*(x) = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1)y^*(x) = 1.$$

Άρα,

$$y^*(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,$$

οπότε $y_n = n + 1$. □

Παράδειγμα 4. *Να λυθεί η εξίσωση*

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^{n+2},$$

όταν $y_0 = y_1 = 3$.

Λύση. Αν τεθεί $y^*(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n x^n$, τότε από τη δοσμένη εξίσωση προκύπτει ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2}x^{n+2} - 4x\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1}x^{n+1} + 4x^2\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = 4x^2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} y_n x^n - 4x\sum_{n=1}^{\infty} y_n x^n + 4x^2\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = \frac{4x^2}{1-2x}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n - (3+3x)\right) - 4x\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n - 3\right) + 4x^2\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = \frac{4x^2}{1-2x}$$

$$y^*(x) - (3+3x) - 4xy^*(x) + 12x + 4x^2y^*(x) = \frac{4x^2}{1-2x}$$

$$(1-4x+4x^2)y^*(x) = \frac{4x^2}{1-2x} + 3 + 3x - 12x$$

$$y^*(x) = \frac{22x^2 - 15x + 3}{(1-2x)^3}.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τον τύπο της διωνυμικής σειράς, προκύπτει ότι

$$y^*(x) = (22x^2 - 15x + 3)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}(-2x)^n.$$

Επειδή

$$\binom{-3}{n} = \frac{(-3)(-4)\cdots(-3-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{n!}$$
$$= (-1)^n \frac{(n+2)!}{2\cdot n!} = (-1)^n \frac{(n+2)(n+1)}{2},$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
y^*(x) &= (22x^2 - 15x + 3)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+2)(n+1)}{2}(-1)^n 2^n x^n \\
&= (22x^2 - 15x + 3)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)2^{n-1}x^n \\
&= 22\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)2^{n-1}x^{n+2} - 15\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)2^{n-1}x^{n+1} \\
&\qquad + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)2^{n-1}x^n \\
&= 22\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)2^{n-3}x^n - 15\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n2^{n-2}x^n \\
&\qquad + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)2^{n-1}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(11n(n-1) - 15(n+1)n + 6(n+2)(n+1)\right)2^{n-2}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2 - 4n + 6\right)2^{n-1}x^n.
\end{aligned}$$

Άρα, $y_n = (n^2 - 4n + 6)2^{n-1}$. □

Ανάλογα επιλύονται και συστήματα γραμμικών αναγωγικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές.

Παράδειγμα 5. *Να λυθεί το σύστημα*

$$13y_{n+1} - 35y_n - 6z_n = 0$$

$$13z_{n+1} - 6y_n - 30z_n = 0$$

όπου $y_0 = 1$, $z_0 = 5$.

Λύση. Αν τεθεί $y^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$ και $z^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n x^n$ από την πρώτη εξίσωση του συστήματος προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις

$$13\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1}x^{n+1} - 35\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^{n+1} - 6\sum_{n=0}^{\infty} z_n x^{n+1} = 0$$

$$13\sum_{n=1}^{\infty} y_n x^n - 35x\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n - 6x\sum_{n=0}^{\infty} z_n x^n = 0$$

$$13(y^*(x) - y_0) - 35xy^*(x) - 6xz^*(x) = 0$$

$$(13 - 3x)y^*(x) - 6xz^*(x) = 13 \tag{3}$$

Ανάλογα από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις

$$13\sum_{n=0}^{\infty} z_{n+1}x^{n+1} - 6\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^{n+1} - 30\sum_{n=0}^{\infty} z_n x^{n+1} = 0$$

$$13\sum_{n=1}^{\infty} z_n x^n - 6x\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n - 30x\sum_{n=0}^{\infty} z_n x^n = 0$$

$$13(z^*(x) - z_0) - 6xy^*(x) - 30xz^*(x) = 0$$

$$-6xy^*(x) + (13-30x)z^*(x) = 65 \tag{4}$$

Οι εξισώσεις (3) και (4) αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα $y^*(x)$ και $z^*(x)$. Δια επιλύσεώς του προκύπτουν:

$$y^*(x) = \frac{1}{(1-3x)(1-2x)} \text{ και } z^*(x) = \frac{5-13x}{(1-3x)(1-2x)}$$

Αναλύοντας τις παραπάνω ρητές συναρτήσεις σε απλά κλάσματα προκύπτει ότι

$$y^*(x) = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x} = 3\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(3^{n+1} - 2^{n+1})x^n$$

και

$$\begin{aligned} z^*(x) &= \frac{2}{1-3x} + \frac{3}{1-2x} \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n)x^n. \end{aligned}$$

Άρα, $y_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$ και $z_n = 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n$. □

Γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις με πολυωνυμικούς συντελεστές

Ανάλογα επιλύονται και οι γραμμικές αναγωγικές εξισώσεις με πολυωνυμικούς συντελεστές. Η μόνη διαφορά είναι ότι η εξίσωση από την οποία προκύπτει η γεννήτρια $y^*(x)$ δεν είναι αλγεβρική, αλλά διαφορική.

Παράδειγμα 6. *Να λυθεί η αναγωγική εξίσωση*

$$(n+1)y_{n+1} - 2(2n+1)y_n = 0,$$

όταν $y_0 = 1$.

Λύση. Από τη δοσμένη εξίσωση και την αρχική συνθήκη προκύπτει ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)y_{n+1}x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)y_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n y_n x^n - 4x\sum_{n=1}^{\infty} n y_n x^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = 0$$

$$(1-4x)\sum_{n=1}^{\infty} n y_n x^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = 0$$

$$(1-4x)x\sum_{n=1}^{\infty} y_n (n x^{n-1}) - 2x\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = 0$$

$$(1-4x)\sum_{n=1}^{\infty} y_n (x^n)' - 2\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n = 0$$

$$(1-4x)(y^*(x))' - 2y^*(x) = 0.$$

Η τελευταία διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, και επιλύεται την κατά τα γνωστά.

Πράγματι, για $y^*(x) \neq 0$ η παραπάνω εξίσωση δίδει

$$\frac{(y^*(x))'}{y^*(x)} = \frac{2}{1-4x}$$

$$\int \frac{(y^*(x))'}{y^*(x)}dx = \int \frac{2}{1-4x}dx$$

$$\ln|y^*(x)| = -\frac{1}{2}\ln(1-4x) + \ln k, \text{ όπου } k > 0$$

$$\ln|y^*(x)| = \ln\left(\frac{k}{\sqrt{1-4x}}\right)$$

$$y^*(x) = \frac{c}{\sqrt{1-4x}}, \text{όπου } c = \pm k.$$

Επειδή, $c = y^*(0) = y_0 = 1$, προκύπτει ότι

$$y^*(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον τύπο της διωνυμικής σειράς, προκύπτει ότι

$$y^*(x) = (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n. \tag{1}$$

Επιπλέον, επειδή

$$
\begin{aligned}
\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} \\
&= (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!} \\
&= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! 2\cdot 4\cdots(2n)} \\
&= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n},
\end{aligned}
$$

από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$
y^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}(-1)^n 4^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.
$$

Άρα,

$$
y_n = \binom{2n}{n}. \qquad \square
$$

4η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Γεννήτριες ακολουθιών της Συνδυαστικής

Γεννήτριες ακολουθιών της Συνδυαστικής

Στην ενότητα αυτή θα βρεθούν με τη βοήθεια των γεννητριών συναρτήσεων οι τύποι ορισμένων σημαντικών ακολουθιών της Συνδυαστικής Ανάλυσης.

Αριθμοί Fibonacci

Η ακολουθία (f_n) των αριθμών Fibonacci ορίζεται αναδρομικά από τη σχέση

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \tag{1}$$

όπου $f_0 = f_1 = 1$.

Προκειμένου να βρεθεί ο τύπος της (f_n), αρχικά βρίσκεται η γεννήτριά της $f^*(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n x^n$.

Πράγματι, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}x^{n+1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}x^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n - (f_0 + f_1 x) = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n - f_0\right) + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

$$f^*(x) - 1 - x = x(f^*(x) - 1) + x^2 f^*(x)$$

$$(x^2 + x - 1)f^*(x) = -1$$

$$f^*(x) = -\frac{1}{x^2 + x - 1}.$$

Κατόπιν τούτων, βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x - 1 = 0$,

$$\rho_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ και } \rho_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

και αναλύοντας το κλάσμα της $f^*(x)$ σε μερικά κλάσματα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-\rho_1} - \frac{1}{x-\rho_2}\right) \overset{8}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\rho_2}{1+\rho_2 x} - \frac{\rho_1}{1+\rho_1 x}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\rho_2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\rho_2 x)^n - \rho_1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\rho_1 x)^n\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) x^n. \end{aligned}$$

Άρα,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right),$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

[8] Αφού $\rho_1\rho_2 = -1$.

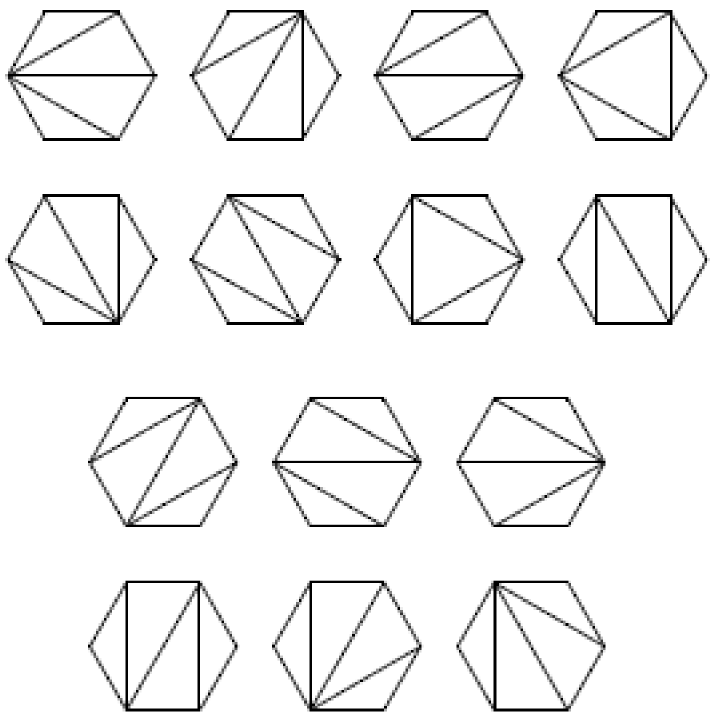
Αριθμοί Catalan

Οι αριθμοί Catalan θεωρούνται από πολλούς ως οι σημαντικότεροι, μετά τους διωνυμικούς, αριθμοί της Συνδυαστικής Ανάλυσης.

Εμφανίσθηκαν για πρώτη φορά στο πρόβλημα της τριγωνοποίησης ενός κυρτού πολυγώνου, και από τότε εμφανίζονται σε ποικίλα συνδυαστικά προβλήματα. Υπάρχουν τουλάχιστον 200 συνδυαστικές ερμηνείες των αριθμών Catalan μέχρι σήμερα, οι οποίες αυξάνουν συνεχώς.

Ενδεικτικά αναφέρονται ορισμένα συνδυαστικά αντικείμενα τα οποία απαριθμούνται από τον αριθμό Catalan τάξης n, ο οποίος συμβολίζεται με C_n :

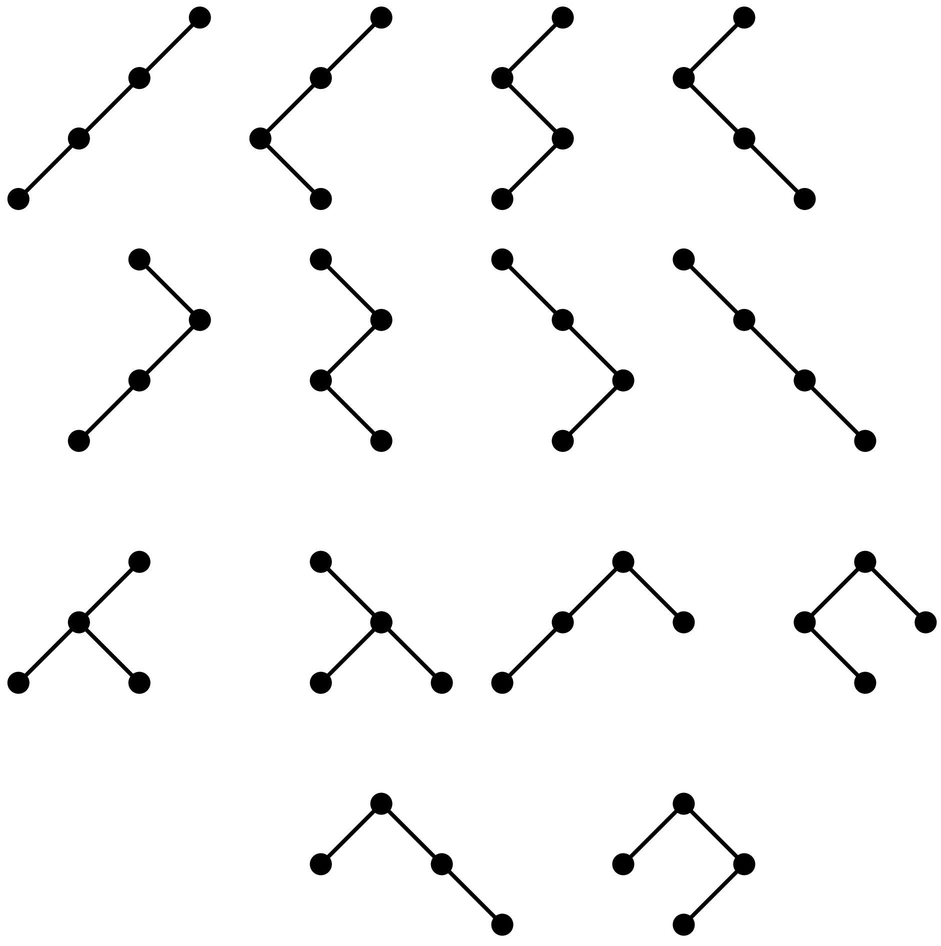
1) Οι τριγωνοποιήσεις ενός κυρτού πολυγώνου με $n+2$ πλευρές, σε n τρίγωνα, φέροντας $n-1$ μη τεμνόμενες διαγωνίους.



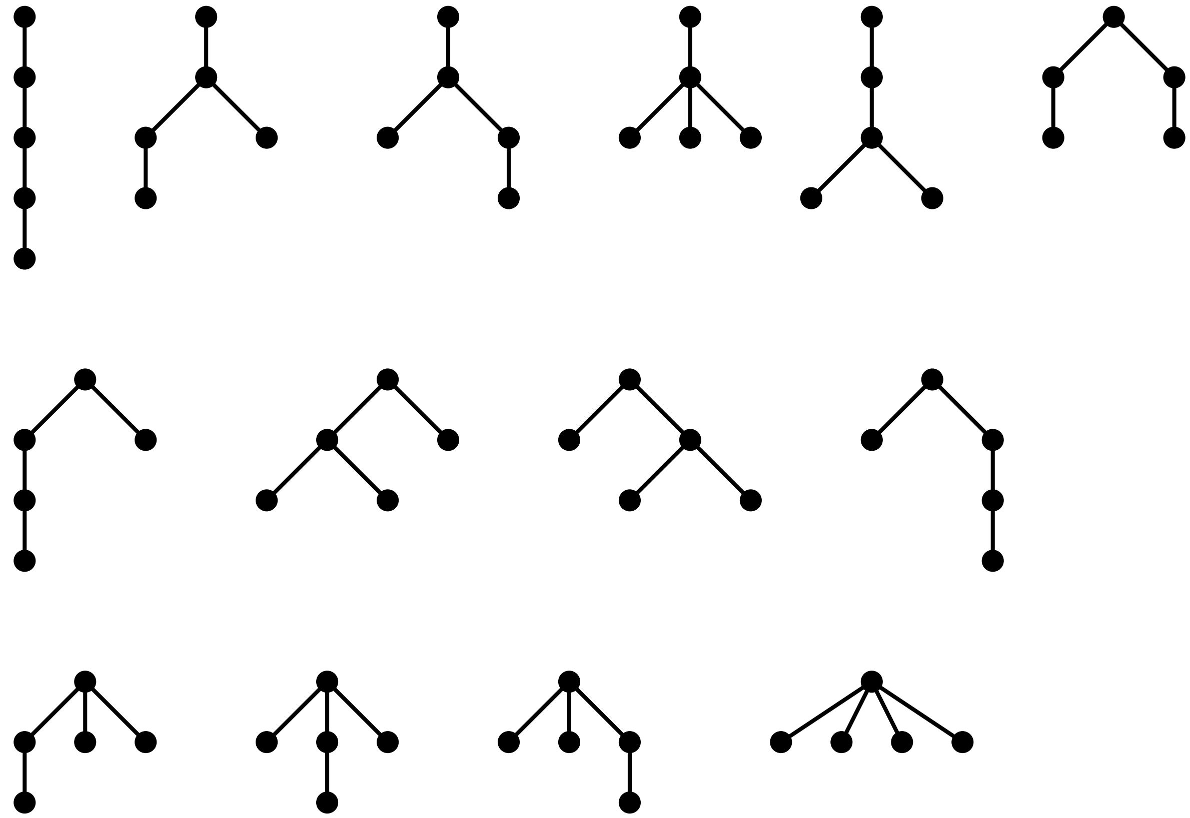
2) Οι τρόποι που μπορούν να τοποθετηθούν παρενθέσεις σε ένα γινόμενο $n+1$ παραγόντων.

$$
\begin{gathered}
((((a\cdot b)\cdot c)\cdot d)\cdot e),\;\; (((a\cdot b)\cdot c)\cdot (d\cdot e)),\\
((a\cdot b)\cdot ((c\cdot d)\cdot e)),\;\; ((a\cdot b)\cdot (c\cdot (d\cdot e))),\\
((a\cdot (b\cdot c))\cdot (d\cdot e)),\;\; ((a\cdot ((b\cdot c)\cdot d))\cdot e),\\
(a\cdot (((b\cdot c)\cdot d)\cdot e)),\;\; (a\cdot ((b\cdot c)\cdot (d\cdot e))),\\
(a\cdot (b\cdot ((c\cdot d)\cdot e))),\;\; (a\cdot (b\cdot (c\cdot (d\cdot e))))\\
(((a\cdot b)\cdot (c\cdot d))\cdot e),\\
(((a\cdot (b\cdot c))\cdot d)\cdot e),\\
((a\cdot (b\cdot (c\cdot d)))\cdot e),\\
(a\cdot ((b\cdot (c\cdot d))\cdot e)),
\end{gathered}
$$

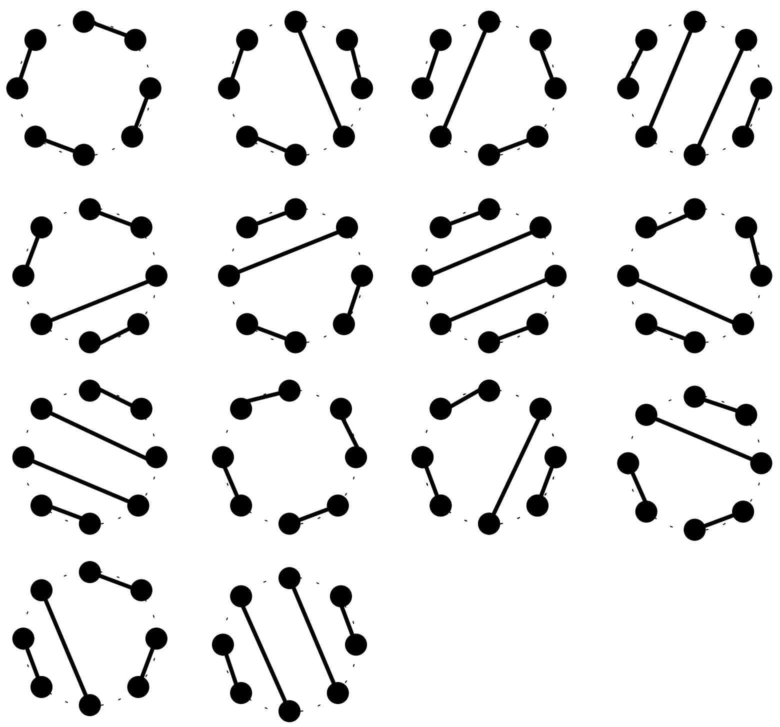
3) Τα δυαδικά δένδρα με n κορυφές.



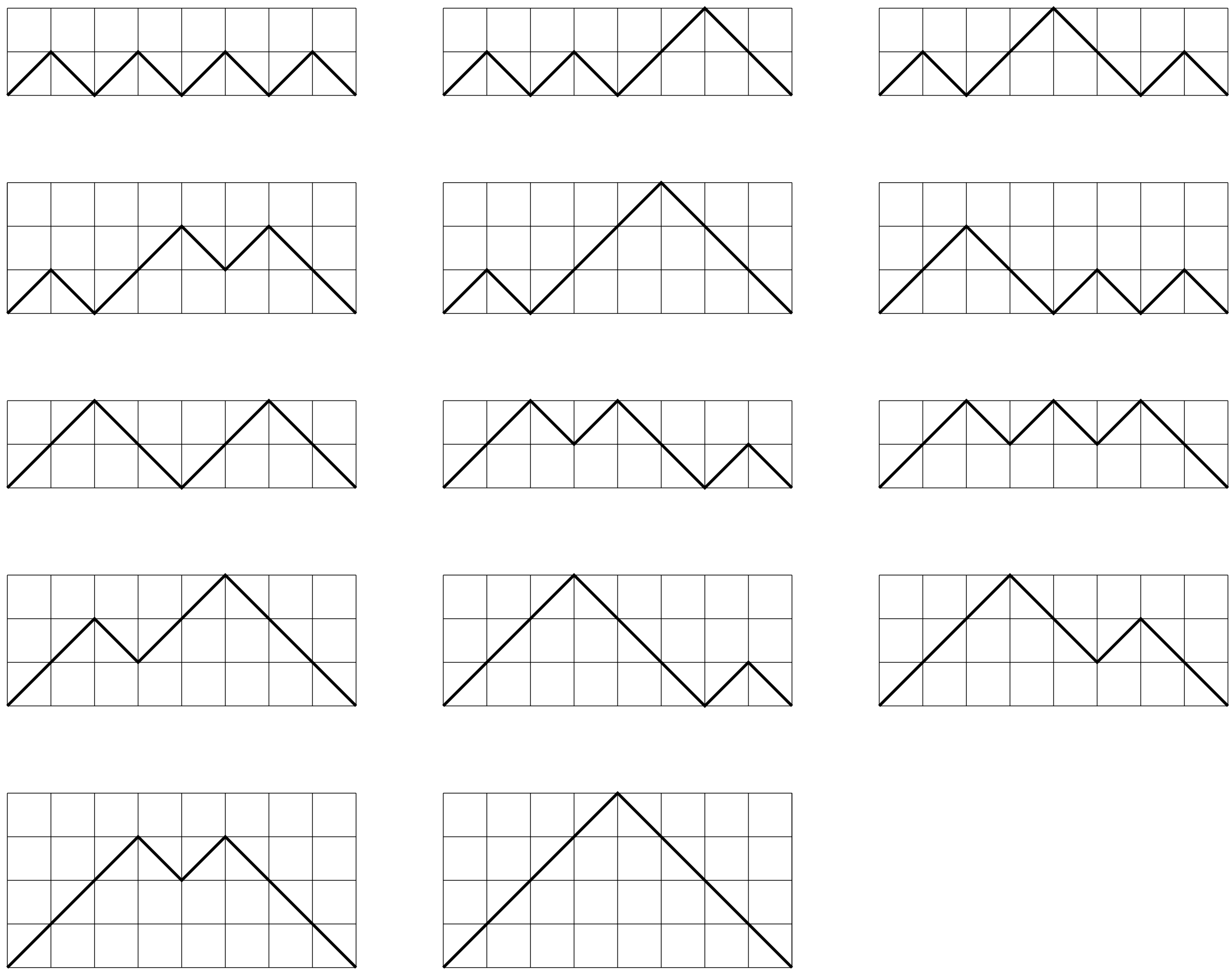
4) Τα διατεταγμένα δένδρα με n δεσμούς.



5) Οι τρόποι που μπορούν να ενωθούν $2n$ σημεία της περιφέρειας ενός κύκλου ανά δύο, χωρίς να διασταυρωθούν οι χορδές.



6) Τα μονοπάτια Dyck μήκους $2n$.



Η ακολουθία (C_n) των αριθμών Catalan ικανοποιεί την αναγωγική εξίσωση του Segner:

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} C_kC_{n-k-1}$$

για κάθε $n \geqslant 1$, και έχει αρχική τιμή $C_0 = 1$.

Προκειμένου να βρεθεί ο τύπος της (C_n) αρχικά βρίσκεται η γεννήτριά της, $C^*(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_nx^n$.

Πράγματι, από την αναγωγική εξίσωση του Segner προκύπτει ότι

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_kC_{n-k} = C_n \circledast C_n,$$

συνεπώς, από την Πρόταση 1 προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}x^n = (C_n \circledast C_n)^*(x)$$

$$\frac{1}{x}(C^*(x) - 1) = (C_n \circledast C_n)^*(x)$$

$$\frac{1}{x}(C^*(x) - 1) = (C^*(x))^2,$$

οπότε θα είναι

$$x(C^*(x))^2 - C^*(x) + 1 = 0$$

και για $x \neq 0$,

$$C^*(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}, \text{ ή } C^*(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Η δεύτερη λύση απορρίπτεται διότι η $C^*(x)$ είναι συνεχής στο 0 με $C^*(0) = C_0 = 1$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = +\infty$.

Άρα,

$$C^*(x) = \frac{1- \sqrt{1-4x}}{2x}$$
$$= \frac{1 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n}{2x}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\binom{\frac{1}{2}}{n}4^n x^{n-1}. \tag{1}$$

Επειδή

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^n n!\cdot 2\cdot 4\cdots(2n-2)} = (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!},$$

η σχέση (1) δίνει

$$C^*(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}2^{2n}x^{n-1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n.$$

Άρα,

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο παραπάνω τύπος μπορεί να προκύψει επίσης ως εφαρμογή του θεωρήματος αντιστροφής του Lagrange.

Πράγματι, από τη σχέση

$$x\left(C^*(x)\right)^2 - C^*(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow C^*(x) = 1 + x\left(C^*(x)\right)^2$$

ορίζοντας $F(z) = z^2$ προκύπτει ότι

$$C^*(x) = 1 + xF(C^*(x))$$

οπότε επειδή

$$(F(z+1))^n = (z+1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} z^i$$

από το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange προκύπτει ότι

$$nC_n = [z^{n-1}](F(z+1))^n = \binom{2n}{n-1}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} \\ &= \frac{1}{n}\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n}\frac{(2n)!}{(n-1)!n!(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} \\ &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

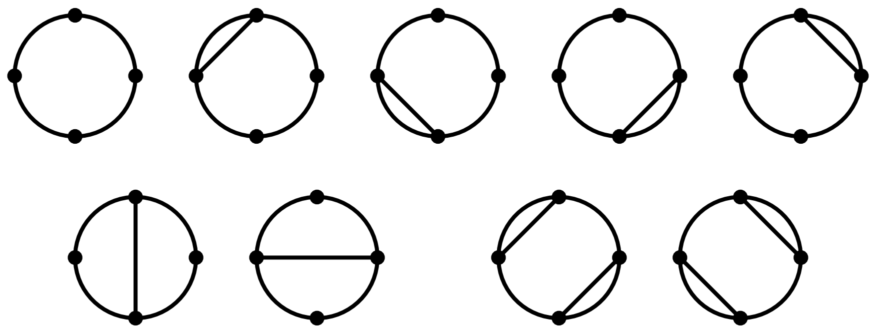
Αριθμοί Motzkin

Οι **αριθμοί Motzkin** αποτελούν επίσης μια άλλη σημαντική κατηγορία αριθμών με πολλές εφαρμογές στη Συνδυαστική Ανάλυση.

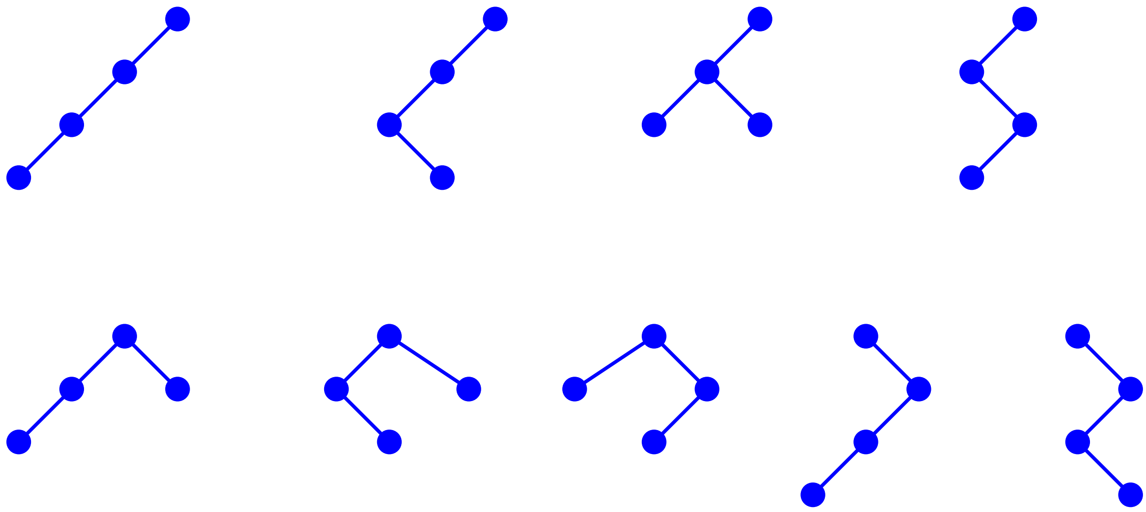
Εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στο πρόβλημα των τρόπων σύνδεσης οποιωνδήποτε σημειών, μεταξύ n δοσμένων σημείων της περιφέρειας ενός κύκλου, με μη τεμνόμενες χορδές.

Σήμερα, είναι γνωστά πολλά συνδυαστικά αντικείμενα τα οποία απαριθμούνται από τον αριθμό Motzkin τάξης n, ο οποίος συμβολίζεται με M_n. Ενδεικτικά αναφέρονται ορισμένα από αυτά:

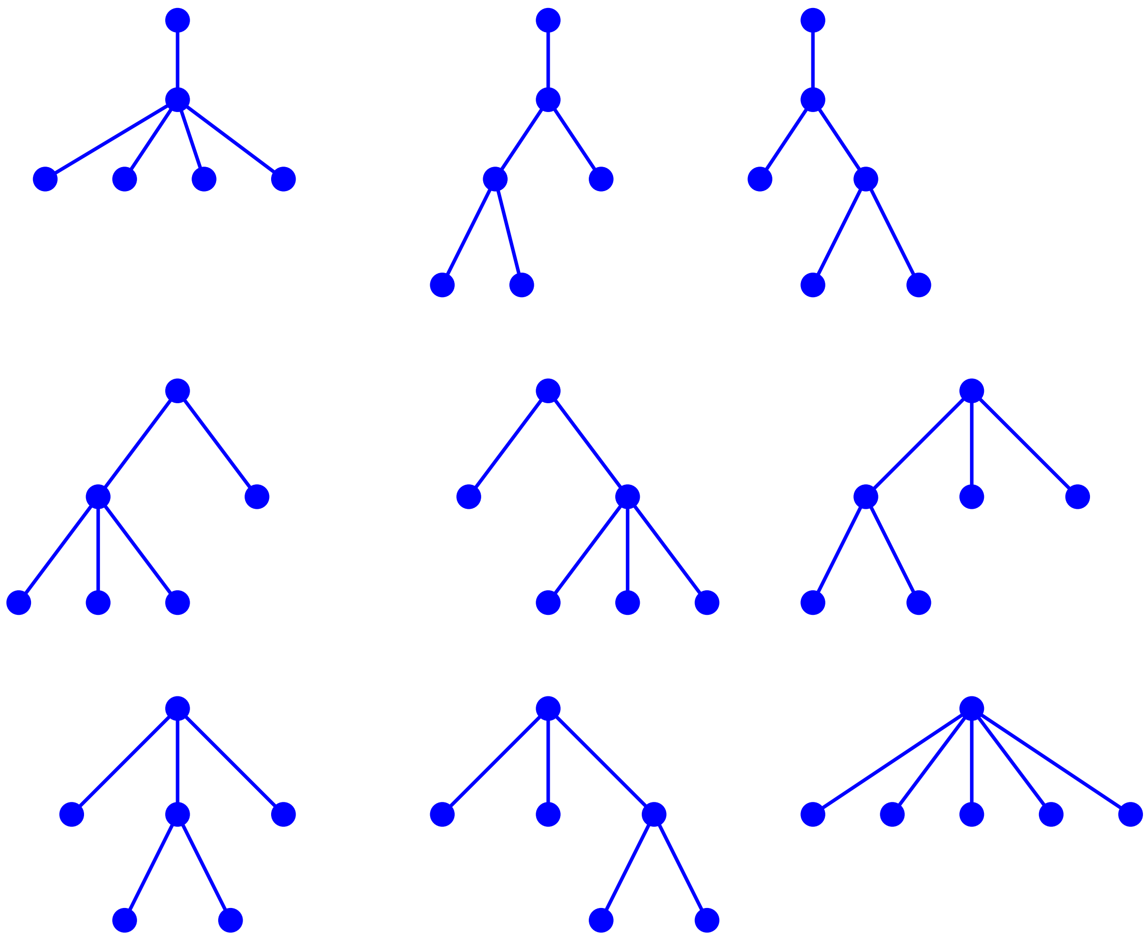
1. Οι τρόποι σχεδίασης οποιουδήποτε αριθμού μη τεμνόμενων χορδών ανάμεσα σε n διακεκριμένα σημεία της περιφέρειας ενός κύκλου.



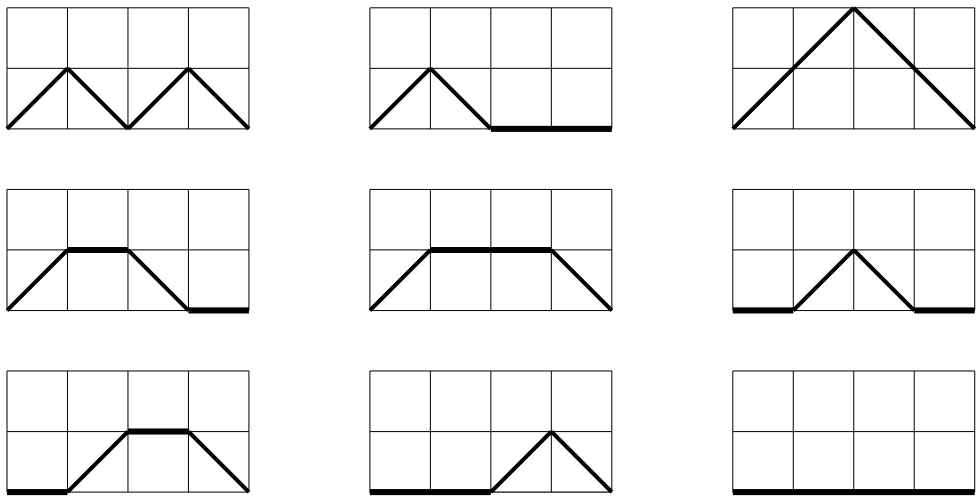
2. Τα δυαδικά δένδρα με $n-1$ δεσμούς, τα οποία δεν περιέχουν δύο διαδοχικούς δεξιούς δεσμούς.



3. Τα διατεταγμένα δένδρα με $n+1$ δεσμούς, στα οποία καμιά κορυφή, πλην της ρίζας, δεν μπορεί να έχει μόνο ένα παιδί.



4. Τα μονοπάτια Motzkin μήκους n, δηλαδή μονοπάτια από το σημείο $(0,0)$ στο σημείο $(n,0)$ με βήματα $(1,1)$, $(1,-1)$ και $(1,0)$, τα οποία δεν πέφτουν κάτω από τον άξονα των τετμημένων.



Η ακολουθία (M_n) των αριθμών Motzkin ικανοποιεί την αναγωγική εξίσωση

$$M_n = M_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} M_k M_{n-k-2},$$

για κάθε $n \geqslant 2$ και έχει αρχικές τιμές $M_0 = M_1 = 1$.

Προκειμένου να βρεθεί ο τύπος της (M_n), αρχικά βρίσκεται η γεννήτριά της, $M^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n x^n$.

Πράγματι, από την αναγωγική εξίσωση των αριθμών Motzkin προκύπτει ότι

$$M_{n+2} = M_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} M_k M_{n-k} = M_{n+1} + M_n \circledast M_n,$$

οπότε, από την Πρόταση 1 προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} M_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (M_n \circledast M_n) x^n$$

$$\frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{\infty} M_n x^n = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} M_n x^n + (M_n \circledast M_n)^*(x)$$

$$\frac{1}{x^2}(M^*(x) - (1+x)) = \frac{1}{x}(M^*(x) - 1) + (M^*(x))^2,$$

οπότε θα είναι

$$x^2 (M^*(x))^2 + (x-1) M^*(x) + 1 = 0,$$

και για $x \neq 0$,

$$M^*(x) = \frac{1-x-\sqrt{(1-x)^2-4x^2}}{2x^2} \text{ ή } \frac{1-x+\sqrt{(1-x)^2-4x^2}}{2x^2}.$$

Η δεύτερη λύση, όπως και στην περίπτωση της γεννήτριας $C^*(x)$ απορρίπτεται, οπότε, τελικά,

$$M^*(x) = \frac{1 - x - \sqrt{(1-x)^2 - 4x^2}}{2x^2}. \tag{2}$$

Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής και της αντίστοιχης σχέσης της γεννήτριας $C^*(x)$ των αριθμών Catalan, αποδεικνύονται οι επόμενοι τύποι

$$M^*(x) = \frac{1}{1-x} C^* \left(\left(\frac{x}{1-x} \right)^2 \right),$$

και

$$C^*(x) = \frac{x}{1-x} M^* \left(\frac{x}{1-x} \right) + 1.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τους τύπους αυτούς, αποδεικνύονται αντίστοιχα οι τύποι

$$M_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} C_k,$$

και

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_k,$$

οι οποίοι δείχνουν τη στενή σχέση που υπάρχει μεταξύ των αριθμών Motzkin και Catalan.

Άσκηση 15. *Να αποδειχθεί ότι για τις γεννήτριες συναρτήσεις των αριθμών Motzkin και Catalan ισχύει η σχέση*

$$M^*(x) = \frac{1}{1-x} C^* \left(\left(\frac{x}{1-x} \right)^2 \right)$$

και στη συνέχεια να αποδειχθεί ο τύπος

$$M_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{k} C_k, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Λύση. Γνωρίζουμε τους τύπους

$$C^*(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ και } M^*(x) = \frac{1 - x - \sqrt{(1-x)^2 - 4x}}{2x^2}$$

Αν στον πρώτο τύπο αντί για x τεθεί $\left(\frac{x}{1-x} \right)^2$ προκύπτει ότι

$$\frac{1}{1-x} C^* \left(\left(\frac{x}{1-x} \right)^2 \right) = \frac{1}{1-x} \frac{1 - \sqrt{1 - 4\left(\frac{x}{1-x} \right)^2}}{2\left(\frac{x}{1-x} \right)^2}$$

$$= \frac{1}{1-x} \frac{1 - \sqrt{\frac{(1-x)^2 - 4x^2}{(1-x)^2}}}{2\frac{x^2}{(1-x)^2}} = \frac{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{(1-x)^2 - 4x^2}}{\frac{2x^2}{(1-x)^2}}$$

$$= \frac{1 - x - \sqrt{(1-x)^2 - 4x^2}}{2x^2} = M^*(x)$$

Κατόπιν τούτων είναι

$$
\begin{aligned}
M^*(x) &= \frac{1}{1-x} C^*\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{x}{1-x}\right)^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{1}{(1-x)^{2n+1}} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (1-x)^{-(2n+1)} x^{2n} \\
&\overset{9}{=} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-(2n+1)}{k} x^k\right) x^{2n} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Γνωρίζουμε ότι $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$ (βλ. Ανάλυση και Εφαρμογές, τόμος 1, σελ. 36) άρα θέτωντας $2n+1$ αντί n προκύπτει

$$
\binom{-(2n+1)}{k} = (-1)^k \binom{2n+k}{k}
$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (3) προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
M^*(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} C_n \binom{2n+k}{k} x^{2n+k} \\
&\overset{m=2n+k}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=2n}^{\infty} C_n \binom{m}{m-2n} x^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} C_n \binom{m}{2n} x^m = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_k \binom{n}{2k}\right) x^n
\end{aligned}
$$

[9] Σύμφωνα με τον τύπο της διωνυμικής σειράς

Άρα,

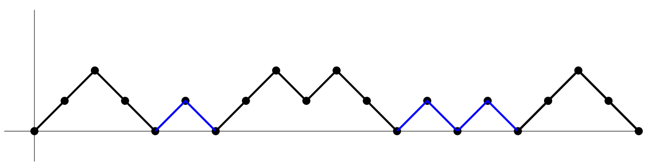
$$M(n) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_k \binom{n}{2k}, \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \qquad \square$$

Αριθμοί Fine

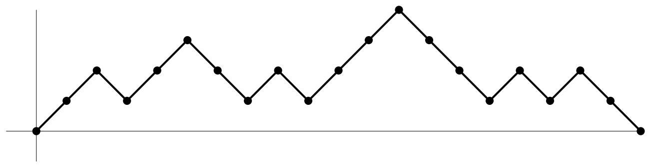
Μια άλλη σημαντική κατηγορία αριθμών είναι οι αριθμοί Fine οι οποίοι ορίσθηκαν από τον Terrence Fine το 1970 χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ομοιότητας. Εδώ θα δοθεί ένας ισοδύναμος ορισμός των αριθμών Fine με τη βοήθεια των μονοπατιών Dyck.

Μια κορυφής ενός μονοπατιού Dyck σε ύψος 1 ονομάζεται **λόφος** του μονοπατιού.

Για παράδειγμα, το μονοπάτι α έχει τρεις λόφους, ενω το μονοπάτι β δεν έχει λόφο.



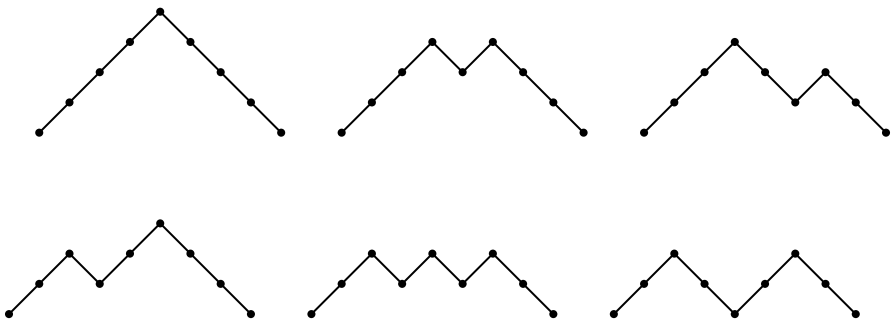
$\alpha = uudduduududdududuudd$



$\beta = uuduudduduuuddduduudd$

Το πλήθος των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n χωρίς λόφους ονομάζεται **αριθμός Fine τάξεως** n και συμβολίζεται με F_n.

Για παράδειγμα, $F_0 = 1$, $F_1 = 0$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 6$



Τα μονοπάτια Dyck ημιμήκους 4 που δεν έχουν λόφους

Άσκηση 16. *Να δειχθεί ότι*

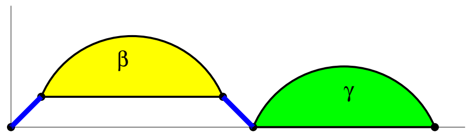
$$F_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k F_{n-1-k}, \ n \geqslant 2$$

Λύση. Έστω $\mathcal{D}_n$ το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n και $\mathcal{A}_n$ το υποσύνολο του $\mathcal{D}_n$ που αποτελείται από τα μονοπάτια που δεν έχουν λόφους.

Κάθε μη κενό μονοπάτι $a \in \mathcal{A}_n$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$a = u\beta d\gamma \text{ (διάσπαση της πρώτης επιστροφής)}$$

όπου β μη κενό μονοπάτι Dyck και γ μονοπάτι Dyck χωρίς λόφους.

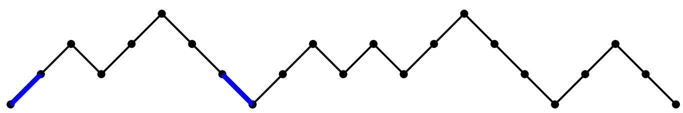


Η διάσπαση της πρώτης επιστροφής

Για παράδειγμα το μονοπάτι

$$a = u \ uduuddud \ d \ uududuudduudd$$

γράφεται στη μορφή $a = u\beta d\gamma$ όπου $\beta = uduuddud$ και $\gamma = uududuudduudd$.



Τα μονοπάτια a, β, γ

Αν το μονοπάτι β έχει ημιμήκος k, όπου $k \in [n-1]$ τότε το μονοπάτι γ θα έχει ημιμήκος $n-1-k$ και το ζεύγος (β, γ) σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή μπορεί να επιλεγεί κατά $|\mathcal{D}_k||\mathcal{A}_{n-1-k}|$ τρόπους. Αθροίζοντας ως προς k προκύπτει ότι

$$F_n = |\mathcal{A}_n| = \sum_{k=1}^{n-1} |\mathcal{D}_k||\mathcal{A}_{n-1-k}| = \sum_{k=1}^{n-1} C_k F_{n-1-k}. \qquad \square$$

Άσκηση 17. *Να δειχθεί ότι*

$$C_n = F_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_k F_{n-1-k}, n \geqslant 1$$

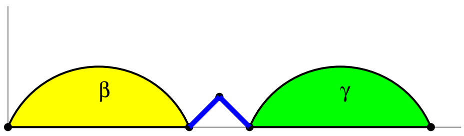
και στη συνέχεια να δειχθεί ότι

$$F^*(x) = \frac{C^*(x)}{1 + xC^*(x)}$$

Λύση. Έστω B_n το σύνολο όλων των μονοπατιών του $\mathcal{D}_n$ τα οποία έχουν τουλάχιστον ένα λόφο. Κάθε μονοπάτι $a \in \mathcal{B}_n$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$a = \beta ud\gamma \text{ (διάσπαση του τελευταίου λόφου)}$$

όπου $\beta \in \mathcal{D}_k$, $k \in [0, n-1]$ (μπορεί και κενό) και $\gamma \in \mathcal{A}_{n-1-k}$.

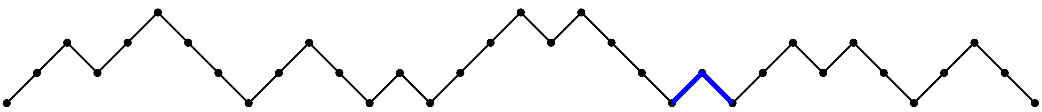


Η διάσπαση του τελευταίου λόφου

Για παράδειγμα για το μονοπάτι

$$a = uuduudddduuddduuudddduduududdduudd$$

γράφεται στη μορφή $a = \beta ud\gamma$ όπου
$\beta = uuduudddduudduduuududdd$ και $\gamma = uududdduudd$.



Τα μονοπάτια a, β, γ

Κατόπιν τούτων το ζεύγος (β, γ) μπορεί να επιλεγεί κατά $|\mathcal{D}_k||\mathcal{A}_{n-1-k}|$ τρόπους και αθροίζοντας ως προς k όπως και πριν προκύπτει ότι

$$|\mathcal{B}_n| = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{D}_k||\mathcal{A}_{n-1-k}|.$$

οπότε

$$\begin{aligned} C_n &= |\mathcal{D}_n| = |\mathcal{A}_n| + |\mathcal{B}_n| \\ &= |\mathcal{A}_n| + \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{D}_k||\mathcal{A}_{n-1-k}| \\ &= F_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_k F_{n-1-k}. \end{aligned}$$

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} C_k F_{n-1-k} x^n \\ C^*(x) - C_0 &= F^*(x) - F_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} C_k F_{n-k} x^{n+1} \\ C^*(x) - 1 &= F^*(x) - 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n \circledast F_n\right) x^n \\ C^*(x) &= F^*(x) + x \left(C_n \circledast F_n\right)^* \\ C^*(x) &= F^*(x) + xC^*(x)F^*(x) \\ F^*(x) &= \frac{C^*(x)}{1 + xC^*(x)} \end{aligned}$$

□

Άσκηση 18. *Να δειχθεί ότι*

1. $C_n = 2F_n + F_{n-1}$, $n \geqslant 1$.
2. $F^*(x) = \dfrac{1 + C^*(x)}{x+2}$.
3. $F_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{2^k} C_{n-k}$, $n \geqslant 2$.

Λύση. 1. Προφανώς, η ισότητα ισχύει για $n = 1$, αφού $C_1 = F_0 = 1$ και $F_1 = 0$.

Για $n \geqslant 2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} C_n &\overset{17}{=} F_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_k F_{n-1-k} \\ &= F_n + F_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k F_{n-1-k} \\ &\overset{16}{=} F_n + F_{n-1} + F_n = 2F_n + F_{n-1}. \end{aligned}$$

2. Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n &= 2\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} F_{n-1} x^n \\ C^*(x) - C_0 &= 2(F^*(x) - F_0) + x\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\ C^*(x) - 1 &= 2(F^*(x) - 1) + xF^*(x) \\ C^*(x) &= -1 + (x+2)F^*(x) \\ F^*(x) &= \frac{1 + C^*(x)}{x+2}. \end{aligned}$$

3. Αν τεθεί $1 + C^*(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ όπου

$$a_n = \begin{cases} C_n, & n \geqslant 1 \\ 2, & n = 0 \end{cases}$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F^*(x) &= \frac{1 + C^*(x)}{x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2}}(1 + C^*(x)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^n} \circledast a_n \right) x^n \end{aligned}$$

οπότε για $n \geqslant 2$ είναι

$$\begin{aligned} F_n = [x^n]F^*(x) &= \frac{1}{2}(\frac{(-1)^n}{2^n} \circledast a_n) \\ &\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} a_{n-k} \\ &\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{2^k} C_{n-k} + \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} C_1 + \frac{(-1)^n}{2^n} 2 \right) \\ &\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{2^k} C_{n-k} \end{aligned}$$

□

5η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Γεννήτριες συναρτήσεις συνόλων

Γεννήτριες συναρτήσεις συνόλων

Σε πολλά προβλήματα των Διακριτών Μαθηματικών αναζητείται ο τύπος μιας ακολουθίας (a_n) η οποία απαριθμεί τα στοιχεία ενός συνόλου $\mathcal{A}$ συνδυαστικών αντικειμένων που ικανοποιούν κάποια ιδιότητα. Συνήθως η ιδιότητα αυτή περιγράφεται από μια απεικόνιση $p : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ με τη βοήθεια της οποίας θα δοθεί ένας ισοδύναμος ορισμός της γεννήτριας συνάρτησης που απλοποιεί πολύ την επίλυση του προβλήματος απαρίθμησης αφού για τον υπολογισμό της δεν απαιτείται πρώτα να ευρεθεί μια αναδρομική σχέση.

Αν $\mathcal{A}$ είναι ένα σύνολο συνδυαστικών αντικειμένων, τότε κάθε απεικόνιση $p : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ ονομάζεται **παράμετρος** (του συνόλου $\mathcal{A}$).

Παραδείγματα

1. Στο σύνολο $\{0,1\}^*$ των δυαδικών λέξεων οι απεικονίσεις p, q με

   $p(a) =$ πλήθος γραμμάτων της λέξης a

   και

   $q(a) =$ πλήθος μηδενικών της λέξης a

   είναι δύο παράμετροι.

2. Στο σύνολο $\mathscr{B}$ των δυαδικών δένδρων οι απεικονίσεις p, q με

   $p(T) =$ αριθμός κορυφών του δυαδικού δένδρου T

   και

   $q(T) =$ αριθμός δεξιών παιδιών του δένδρου T

   είναι δύο παράμετροι.

3. Στο σύνολο $\mathscr{T}$ των διατεταγμένων δένδρων οι απεικονίσεις p, q, r με

   $p(T) =$ αριθμός δεσμών του διατεταγμένου δένδρου T

   $q(T) =$ αριθμός φύλλων του διατεταγμένου δένδρου T

   και

   $r(T) =$ βαθμός ρίζας του διατεταγμένου δένδρου T

   είναι τρεις παράμετροι.

4. Στο σύνολο $\mathscr{D}$ των μονοπατιών Dyck οι απεικονίσεις p, q, r με

   $p(a) =$ ημιμήκος του μονοπατιού a

   $q(a) =$ αριθμός κορυφών του μονοπατιού a

   και

   $r(T) =$ αριθμός επιστροφών του μονοπατιού a

   είναι τρεις παράμετροι.

Μια παράμετρος p στο $\mathcal{A}$ ονομάζεται **βασική** αν τα σύνολα $\{a \in \mathcal{A} : p(a) = n\}$ είναι πεπερασμένα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Κάθε μη βασική παράμετρος p ονομάζεται **δευτερεύουσα**.

Στα προηγούμενα παραδείγματα, μόνο η παράμετρος p είναι βασική.

Αν $p : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ είναι μια βασική παράμετρος τότε η δυναμοσειρά

$$A(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}} x^{p(a)}$$

ονομάζεται **γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{A}$ ως προς την παράμετρο** p

Πρόταση 4. *Αν $\mathcal{A}$ είναι ένα σύνολο συνδυαστικών αντικειμένων, p μια βασική παράμετρος στο $\mathcal{A}$ και (a_n) η ακολουθία με τύπο*

$$a_n = |\{a \in \mathcal{A} : p(a) = n\}|\,,$$

τότε η γεννήτρια συνάρτηση $a^*(x)$ της ακολουθίας a_n ισούται με την γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ του συνόλου A ως προς την παράμετρο p.

Απόδειξη. Επειδή η ακολουθία $(\mathcal{A}_n)$ με

$$\mathcal{A}_n = \{a \in \mathcal{A} : p(a) = n\}$$

αποτελεί μια διαμέριση του $\mathcal{A}$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{a\in\mathcal{A}} x^{p(a)} \\
&= \sum_{a\in\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}_n} x^{p(a)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{a\in\mathcal{A}_n} x^{p(a)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{a\in\mathcal{A}_n} x^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n} \sum_{a\in\mathcal{A}_n} 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{A}_n|\, x^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n} \\
&= a^*(x)
\end{aligned}$$

□

Από την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να βρούμε την γεννήτρια συνάρτηση χωρίς να χρειάζεται να βρεθεί η αντίστοιχη αναδρομική σχέση της ακολουθίας.

Παράδειγμα 1. *Να ευρεθεί ο αριθμός a_n των δυαδικών λέξεων με n γράμματα.*

Λύση. Κάθε μη κενή[10] δυαδική λέξη a γράφεται μονοσήμαντα σε μια από τις παρακάτω δύο μορφές:

$$a = b0 \text{ ή } a = b1$$

όπου $b = \{0,1\}^*$.

Επομένως, η γεννήτρια συνάρτηση A του συνόλου $\{0,1\}^*$ ως προς την παράμετρο $p(a) =$ αριθμός γραμμάτων της λέξης a είναι:

$$\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{a\in\{0,1\}^*} x^{p(a)} \\
&= x^{p(\epsilon)} + \sum_{b\in\{0,1\}^*} x^{p(b0)} + \sum_{b\in\{0,1\}^*} x^{p(b1)} \\
&= 1 + \sum_{b\in\{0,1\}^*} x^{p(b)+1} + \sum_{b\in\{0,1\}^*} x^{p(b)+1} \\
&= 1 + 2x \sum_{b\in\{0,1\}^*} x^{p(b)} \\
&= 1 + 2xA(x).
\end{aligned}$$

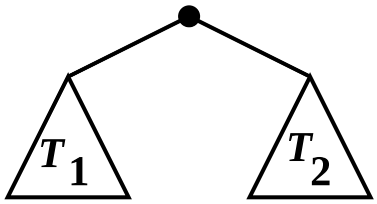
Άρα, $A(x) = \dfrac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ και

$$a_n = [x^n]A(x) = 2^n, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \qquad \square$$

[10] Η κενή δυαδική λέξη συμβολίζεται με ϵ

Παράδειγμα 2. *Να ευρεθεί ο αριθμός* a_n *των δυαδικών δένδρων με n κορυφές.*

Λύση. Έστω $\mathcal{B}$ το σύνολο των δυαδικών δένδρων. Κάθε μη κενό[11] δένδρο $T \in \mathcal{B}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή



όπου T_1, $T_2 \in \mathcal{B}$. (Τα T_1, T_2 μπορεί να είναι κενά.)

Επομένως, η γεννήτρια συνάρτηση $B(x)$ του συνόλου $\mathcal{B}$ ως προς την παράμετρο $p(T)$ = αριθμός κορυφών του T είναι

$$\begin{aligned}
B(x) &= \sum_{T \in \mathcal{B}} x^{p(T)} \\
&= x^{p(\square)} + \sum_{T_1, T_2 \in \mathcal{B}} x^{p(T_1)+p(T_2)+1} \\
&= 1 + x \sum_{T_1, T_2 \in \mathcal{B}} x^{p(T_1)} x^{p(T_2)} \\
&= 1 + x \left(\sum_{T_1 \in \mathcal{B}} x^{p(T_1)} \right) \left(\sum_{T_2 \in \mathcal{B}} x^{p(T_2)} \right) \\
&= 1 + xB(x)B(x) \\
&= 1 + xB^2(x),
\end{aligned}$$

οπότε η γεννήτρια συνάρτηση $B(x)$ ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση

$$xB^2(x) - B(x) + 1 = 0$$

[11] Το κενό δυαδικό δένδρο συμβολίζεται με $\square$

που ως γνωστόν είναι η συναρτησιακή εξίσωση των αριθμών Catalan. Άρα,

$$a_n = [x^n]B(x) = C_n, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Ανάλογα αποτελέσματα έχουμε στα επόμενα δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 3. *Να ευρεθεί ο αριθμός a_n των διατεταγμένων δένδρων που έχουν n δεσμούς.*

Παράδειγμα 4. *Να ευρεθεί ο αριθμός b_n των μονοπατιών Dyck που έχουν ημιμήκος n.*

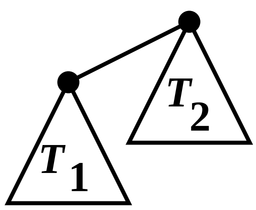
Λύσεις για τα παραδείγματα 3 και 4. Έστω $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$ τα σύνολα των διατεταγμένων δένδρων και μονοπατιών Dyck αντίστοιχα. Θεωρούμε τις παραμέτρους p, q στα σύνολα $\mathcal{T}$ και $\mathcal{D}$ αντίστοιχα με

$$p(T) = \text{ αριθμός δεσμών του } T, \text{ όπου } T \in \mathcal{T}$$

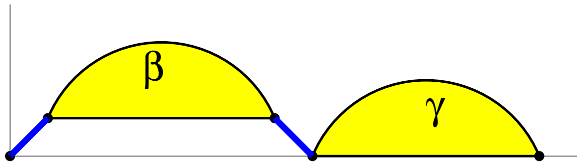
και

$$q(a) = \text{ ημιμήκος του } a, \text{ όπου } a \in \mathcal{D}$$

Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω διασπάσεις των μη κενών διατεταγμένων δένδρων και μη κενών μονοπατιών Dyck αντίστοιχα

$T =$  όπου $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$

και

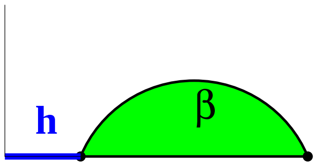
$a =$ 

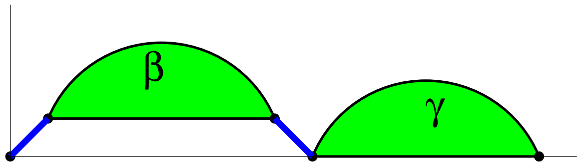
όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{D}$

προκύπτουν οι σχέσεις $p(T) = p(T_1)+p(T_2)+1$ και $q(a) = q(b) + q(c) + 1$ με τη βοήθεια των οποίων όπως και στο παράδειγμα 2 των δυαδικών δένδρων προκύπτει ότι οι γεννήτριες συναρτήσεις των συνόλων $\mathcal{T}$ και $\mathcal{B}$ ως προς τις παραμέτρους p, q αντίστοιχα ισούται με την γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Catalan. Άρα $a_n = b_n = C_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Παράδειγμα 5. *Να ευρεθεί ο αριθμός των μονοπατιών Motzkin μήκους n.*

Λύση. Έστω $\mathcal{M}$ το σύνολο των μονοπατιών Motzkin. Κάθε μη κενό[12] μονοπάτι $a \in \mathcal{M}$ γράφεται μονοσήμαντα σε μια από τις παρακάτω μορφές

$a =$ 

ή $a =$ 

$$a = h\beta \qquad\qquad a = u\beta d\gamma$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{M}$.

Κατόπιν τούτου η γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ του συνόλου $\mathcal{M}$ ως προς την παράμετρο

$$p(a) = \text{μήκος του μονοπατιού } a$$

είναι

$$\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{a \in \mathcal{M}} x^{p(a)} \\
&= x^{p(\epsilon)} + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{p(h\beta)} + \sum_{\beta,\gamma \in \mathcal{M}} x^{p(u\beta d\gamma)} \\
&= 1 + \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{p(\beta)+1} + \sum_{\beta,\gamma \in \mathcal{M}} x^{p(\beta)+p(\gamma)+2} \\
&= 1 + x \sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{p(\beta)} + x^2 \left(\sum_{\beta \in \mathcal{M}} x^{p(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{M}} x^{p(\gamma)} \right) \\
&= 1 + xA(x) + x^2 A^2(x)
\end{aligned}$$

[12] Το κενό μονοπάτι συμβολίζεται με ϵ

Άρα, η γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση

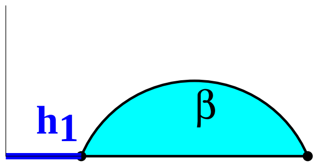
$$x^2A^2(x) + (x-1)A(x) + 1 = 0$$

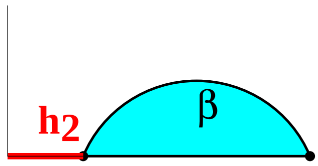
που ως γνωστόν είναι η συναρτησιακή εξίσωση των αριθμών Motzkin. Άρα $A(x) = M(x)$ και επομένως $a_n = M_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Άσκηση 1. *Να ευρεθεί ο αριθμός a_n των μονοπατιών μήκους n από το $(0,0)$ στο $(n,0)$ που δεν κατεβαίνουν κάτω από τον άξονα, με βήματα 4 ειδών: ανοδικό u, καθοδικό d και δύο είδη οριζόντιων βημάτων h_1, h_2.*

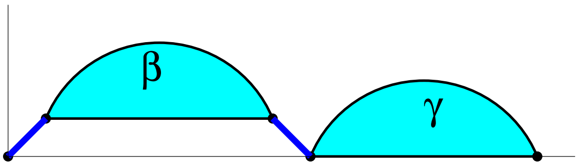
Λύση. Έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο αυτών των μονοπατιών και $p(a)$ = μήκος του a, για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Κάθε μη κενό[13] μονοπάτι $a \in \mathcal{A}$ γράφεται μονοσήμαντα σε μια από τις παρακάτω μορφές:

$a =$ 

ή $a =$ 

$a = h_1\beta$ $\qquad$ $a = h_2\beta$

$a =$ 

$$a = u\beta d\gamma$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{A}$.

Επομένως, για την γεννήτρια συνάρτηση A του $\mathcal{A}$ ως

[13] Το κενό μονοπάτι συμβολίζεται με ϵ

προς την παράμετρο p ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
A(x) &= x^{p(\epsilon)} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{p(h_1\beta)} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{p(h_2\beta)} + \sum_{\beta,\gamma \in \mathcal{A}} x^{p(u\beta d\gamma)} \\
&= 1 + \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{p(\beta)+1} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{p(\beta)+1} + \sum_{\beta,\gamma \in \mathcal{A}} x^{p(\beta)+p(\gamma)+2} \\
&= 1 + 2x \sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{p(\beta)} + x^2 \left(\sum_{\beta \in \mathcal{A}} x^{p(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{A}} x^{p(\gamma)} \right) \\
&= 1 + 2xA(x) + x^2 A^2(x) \\
&= (1 + xA(x))^2
\end{aligned}$$

Αν τεθεί $F(x) = 1 + xA(x)$ προκύπτει ότι

$$\frac{F(x) - 1}{x} = F^2(x) \Leftrightarrow xF^2(x) - F(x) + 1 = 0$$

Άρα, $F(x) = C^*(x)$ (η γεννήτρια των αριθμών Catalan) και επομένως

$$\begin{aligned}
A(x) = \frac{F(x) - 1}{x} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^{n-1} \\
= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} x^n.
\end{aligned}$$

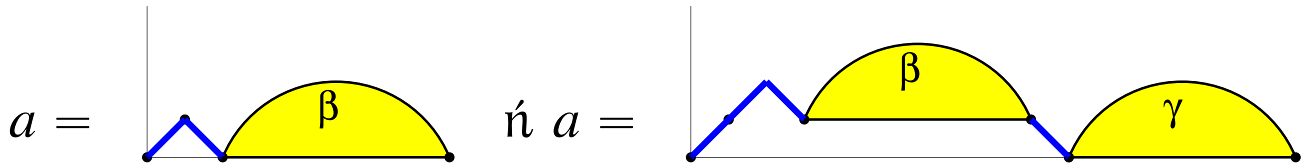
Άρα, $a_n = [x^n]A(x) = C_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Άσκηση 2. *Να ευρεθεί ο αριθμός των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n που δεν περιέχουν τρεις διαδοχικές ανόδους.*

Λύση. Έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο όλων των μονοπατιών Dyck που δεν περιέχουν τρεις διαδοχικές ανόδους.

Επειδή κάθε μη κενό μονοπάτι $a \in \mathcal{A}$ δεν μπορεί να αρχίζει από τρεις ανόδους θα γράφεται μονοσήμαντα σε μια από τις παρακάτω μορφές:



$$a = ud\beta \qquad\qquad a = uud\beta d\gamma$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{A}$.

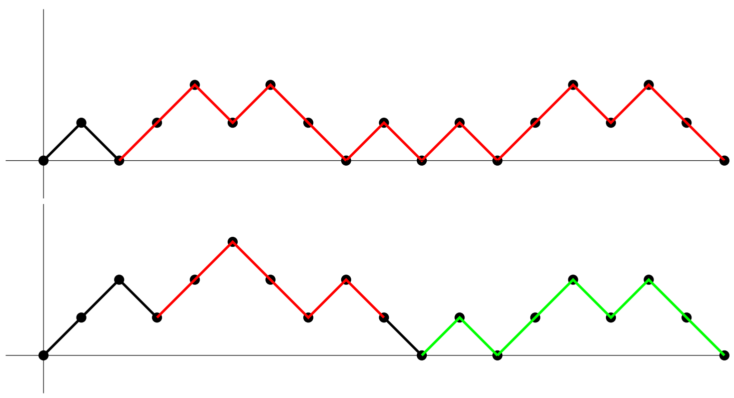
Για παράδειγμα το μονοπάτι

$$a = ud\ \textcolor{red}{uududdududuududd}$$

είναι της πρώτης μορφής, ενώ το μονοπάτι

$$a' = uud\ \textcolor{red}{uuddud}\ d\ \textcolor{green}{uduudud d}$$

είναι της δεύτερης μορφής, όπως φαίνεται στα επόμενα δύο σχήματα:



Κατόπιν τούτων η γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ του συνόλου $\mathcal{A}$ ως προς την παράμετρο $p(a) =$ ημιμήκος του a για κάθε $a \in \mathcal{A}$ είναι

$$\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{a\in\mathcal{A}} x^{p(a)} \\
&= x^{p(\epsilon)} + \sum_{\beta\in\mathcal{A}} x^{p(ud\beta)} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{A}} x^{p(uud\beta d\gamma)} \\
&= 1 + \sum_{\beta\in\mathcal{A}} x^{p(\beta)+1} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{A}} x^{p(\beta)+p(\gamma)+2} \\
&= 1 + x\sum_{\beta\in\mathcal{A}} x^{p(\beta)} + x^2 \left(\sum_{\beta\in\mathcal{A}} x^{p(\beta)}\right)\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{A}} x^{p(\gamma)}\right) \\
&= 1 + xA(x) + x^2A^2(x)
\end{aligned}$$

Άρα, η γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^2A^2(x) + (x-1)A(x) + 1 = 0$$

που ως γνωστόν είναι η συναρτησιακή εξίσωση των αριθμών Motzkin.

Άρα, $A(x) = M(x)$ και επομένως $a_n = M_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

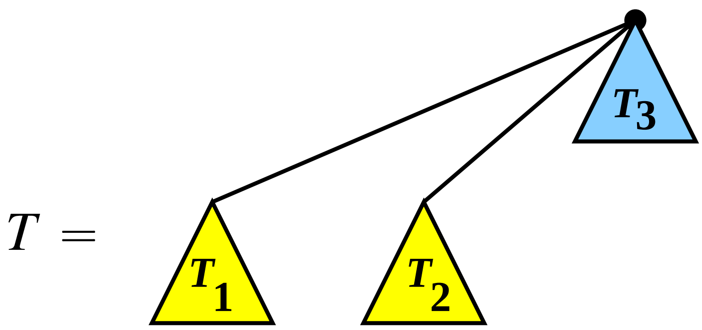
Άσκηση 3. *Να ευρεθεί ο αριθμός a_n των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς που η ρίζα τους έχει άρτιο βαθμό.*

Λύση. Έστω $\mathcal{T}$ το σύνολο όλων των διατεταγμένων δένδρων και $\mathcal{A}$ το υποσύνολο του $\mathcal{T}$ που περιέχει όλα τα δένδρα που έχουν άρτιο βαθμό ρίζας.

Έστω p η παράμετρος του $\mathcal{T}$ με $p(T) =$ αριθμός δεσμών του T και $A(x)$ η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{A}$ ως προς την παράμετρο p.

Γνωρίζουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{T}$ ως προς την παράμετρο p είναι η γεννήτρια συνάρτηση $C^*(x)$ των αριθμών Catalan.

Προφανώς, το μηδενικό διατεταγμένο δένδρο $\bullet$ (δηλαδή το δένδρο που περιέχει μόνο μια κορυφή) ανήκει στο $\mathcal{A}$ ενώ κάθε μη μηδενικό δένδρο $T \in \mathcal{A}$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή:



όπου $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ και $T_3 \in \mathcal{A}$.

Κατόπιν τούτων ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
A(x) &= x^{p(\bullet)} + \sum_{T_1,T_2\in\mathcal{T},T_3\in\mathcal{A}} x^{p(T_1)+p(T_2)+p(T_3)+2} \\
&= 1 + x^2 \sum_{T_1,T_2\in\mathcal{T},T_3\in\mathcal{A}} x^{p(T_1)} x^{p(T_2)} x^{p(T_3)} \\
&= 1 + x^2 \left(\sum_{T_1\in\mathcal{T}} x^{p(T_1)} \right) \left(\sum_{T_2\in\mathcal{T}} x^{p(T_2)} \right) \left(\sum_{T_3\in\mathcal{A}} x^{p(T_3)} \right) \\
&= 1 + x^2 (C^*(x))^2 A(x)
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{1}{1 - x^2(C^*(x))^2} \\
&= \frac{1}{(1 - xC^*(x))(1 + xC^*(x))} \\
&= \frac{C^*(x)}{1 + xC^*(x)} \text{ (διότι } C^*(x) = \frac{1}{1 - xC^*(x)}) \\
&= F(x) \text{ (η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Fine)}
\end{aligned}$$

οπότε $a_n = F_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ισοδύναμες παράμετροι

Δύο βασικές παράμετροι $p/\mathcal{A}$ και $q/\mathcal{B}$ ονομάζονται **ισοδύναμες** αν οι γεννήτριες συναρτήσεις A, B ως προς τις παραμέτρους p και q αντίστοιχα είναι ίσες.

Παράδειγμα 1. *Οι παράμετροι $p(a)$ = ημιμήκος του a στο σύνολο $\mathcal{D}$ των μονοπατιών Dyck και $q(T)$ = αριθμός δεσμών του T στο σύνολο $\mathcal{T}$ των διατεταγμένων δένδρων είναι ισοδύναμες αφού οι αντίστοιχες γεννήτριες είναι ίσες με τη γεννήτρια των αριθμών Catalan.*

Παράδειγμα 2. *Οι παράμετροι $p(a)$ = ημιμήκος του a στο σύνολο $\mathcal{A}$ των μονοπατιών Dyck που δεν έχουν τρεις διαδοχικές ανόδους και $q(a)$ = μήκος του a στο σύνολο M των μονοπατιών Motzkin είναι ισοδύναμες αφού οι αντίστοιχες γεννήτριες συναρτήσεις είναι ίσες με τη γεννήτρια των αριθμών Motzkin.*

Πρόταση 5. *Δύο βασικές παράμετροι $p/\mathcal{A}$ και $q/\mathcal{B}$ είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ με*

$$q(f(a)) = p(a) \text{ για κάθε } a \in \mathcal{A}. \tag{4}$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζεται ότι οι ακολουθίες $(\mathcal{A}_n)$ και $(\mathcal{B}_n)$ με $\mathcal{A}_n = \{a \in \mathcal{A} : p(a) = n\}$ και $\mathcal{B}_n = \{\beta \in \mathcal{B} : q(\beta) = n\}$ αποτελούν διαμερίσεις των συνόλων $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ αντίστοιχα.

Αρχικά υποθέτουμε ότι οι παράμετροι p, q είναι ισοδύναμοι. Τότε είναι

$$\begin{aligned}
A(x) = B(x) &\Leftrightarrow \sum_{a\in\mathcal{A}} x^{p(a)} = \sum_{\beta\in\mathcal{B}} x^{p(\beta)} \\
&\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{a\in\mathcal{A}_n} x^{p(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\beta\in\mathcal{B}_n} x^{p(\beta)} \\
&\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{a\in\mathcal{A}_n} x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\beta\in\mathcal{B}_n} x^{n} \\
&\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{A}_n|\, x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} |\mathcal{B}_n|\, x^{n} \\
&\Leftrightarrow |\mathcal{A}_n| = |\mathcal{B}_n|, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f_n : \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}_n$.

Έστω η απεικόνισηη $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ με $f(a) = f_n(a)$ αν $a \in \mathcal{A}_n$. Θα αποδειχθεί ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

Πράγματι, αν $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ με $a_1 \neq a_2$ θα υπάρχουν $n, m \in \mathbb{N}$ με $a_1 \in \mathcal{A}_n$ και $a_2 \in \mathcal{A}_m$.

Αν $n = m$, δηλαδή $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_n$ τότε $f(a_1) = f_n(a_1) \neq$

$f_n(a_2) = f(a_2)$, αφού η απεικόνιση f_n είναι $1-1$.

Αν $n \neq m$, τότε $f(a_1) = f_n(a_1) \in \mathcal{B}_n$, $f(a_2) = f_m(a_2) \in \mathcal{B}_m$ και $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{B}_m = \emptyset$ οπότε $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Άρα, f $1-1$.

Αν τώρα $\beta \in \mathcal{B}$ τότε θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $\beta \in \mathcal{B}_n$ και επειδή η απεικόνιση f_n είναι επί θα υπάρχει $a \in \mathcal{A}_n$ με $f_n(a) = \beta$. Επιπλέον, επειδή $a \in \mathcal{A}_n$ θα είναι $f(a) = f_n(a)$ οπότε $f(a) = \beta$. Αρα, η απεικόνιση f είναι και επί, οπότε τελικά η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

Τέλος, για την απόδειξη της σχέσης (4):

$$q(f(a)) = p(a) \text{ για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

θεωρούμε $a \in \mathcal{A}$. Τότε θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $a \in \mathcal{A}_n$ οπότε $p(a) = n$. Επιπλέον $f(a) = f_n(a) \in \mathcal{B}_n$, οπότε $q(f(a)) = n$. Άρα, τελικά $q(f(a)) = p(a)$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ που ικανοποιεί την σχέση (4). Είναι

$$B(x) = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} x^{q(\beta)} \overset{14}{=} \sum_{f(a) \in \mathcal{B}} x^{q(f(a))} = \sum_{a \in \mathcal{A}} x^{p(a)} = A(x). \qquad \square$$

.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατασκευή μιας αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ που ικανοποιεί την σχέση (4) επιτυγχάνοντας έτσι την κωδικοποίηση μιας συνδυαστικής δομής[15] από μια άλλη.

[14]Αφού για κάθε $\beta \in \mathcal{B}$ υπάρχει μοναδικό $a \in \mathcal{A}$ με $f(a) = \beta$

[15]Δηλαδή ενός συνόλου εφοδιασμένου με μια παράμετρο.

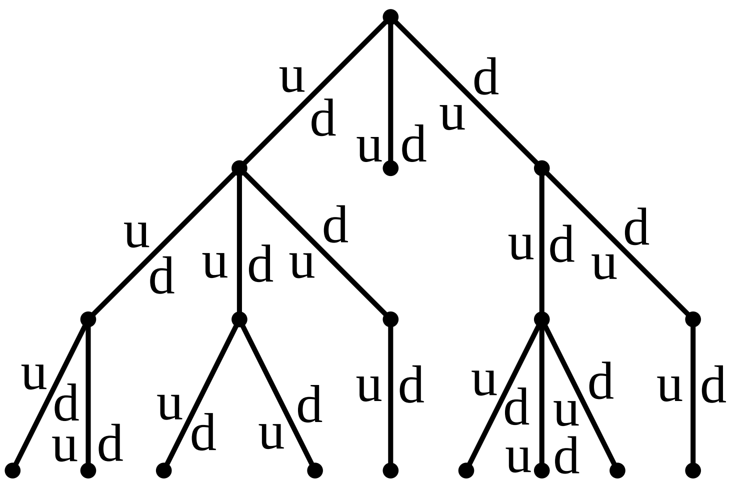
Παράδειγμα 1. *Να κωδικοποιηθούν τα διατεταγμένα δένδρα με n δεσμούς από τις λέξεις Dyck ημιμήκους n.*

Για το σκοπό αυτό θα ορίσουμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : \mathcal{T} \to \mathcal{D}$ με $q(T) = p(f(T))$ για κάθε $T \in \mathcal{T}$, όπου $q(T)$ είναι το πλήθος των δεσμών του δένδρου T και $p(a)$ είναι το ημιμήκος της λέξης Dyck a.

Για την κατασκευή της λέξης $f(T)$ διασχίζουμε τους κόμβους του δένδρου T σε προδιάταξη και όταν συναντάμε ένα δεσμό πρώτη φορά σημειώνουμε u, ενώ όταν τον συναντάμε δεύτερη φορά σημειώνουμε d.

Κατόπιν τούτου η λέξη $f(T)$ που προκύπτει είναι λέξη Dyck και περιέχει n ανόδους και n καθόδους, όπου n είναι το πλήθος των δεσμών του T.

Για παράδειγμα, για το επόμενο διατεταγμένο δένδρο T

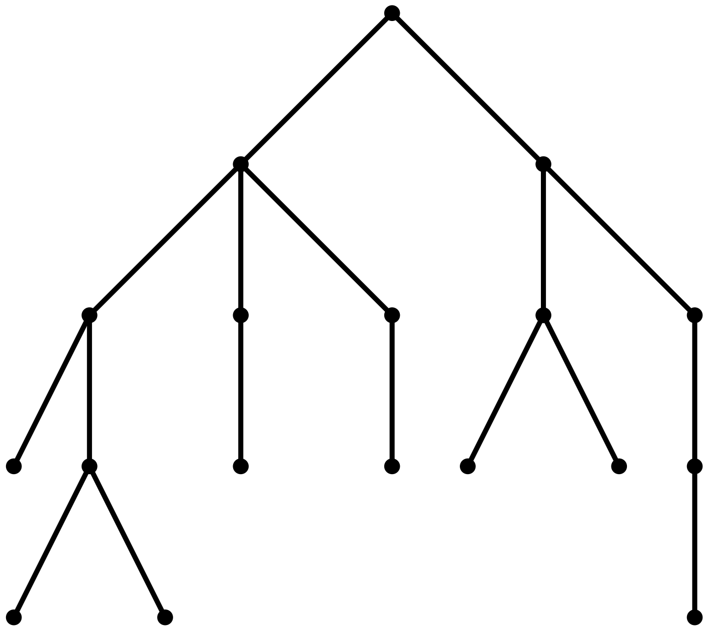


προκύπτει ότι

$$f(T) = uuudud duudud duuddd duduuudud udduuddd.$$

Ασκήσεις

1. Να ευρεθεί η λέξη Dyck που κωδικοποιεί το παράκατω δένδρο



2. Να περιγραφεί η αντίστροφη της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρεθεί το δένδρο $f^{-1}(a)$ όταν $a = uuudduddduduudu dduudd$.

3. Να περιγραφεί το σύνολο των λέξεων Dyck που κωδικοποιούν τα δένδρα με βαθμό ρίζας 1.

Παράδειγμα 2. *Να κωδικοποιηθούν τα μονοπάτια Dyck ημιμήκους n που δεν έχουν τρεις διαδοχικές ανόδους από τις λέξεις Motzkin μήκους n.*

Για το σκοπό αυτό θα ορίσουμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ με $p(a) = q(f(a))$, για κάθε $a \in \mathcal{A}$, όπου $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο των μονοπατιών Dyck που δεν έχουν τρεις διαδοχικές ανόδους, $\mathcal{M}$ το σύνολο των λέξεων Motzkin, $p(a)$ το ημιμήκος του μονοπατιού Dyck a και $q(\beta)$ το μήκος της λέξης Motzkin.

Για την κατασκευή της λέξης $f(a)$ όπου $a \in \mathcal{A}$ χωρίζουμε τις καθόδους του μονοπατιού a σε τρεις κατηγορίες:

1. Κάθοδοι που έπονται ακριβώς δύο διαδοχικών ανόδων.

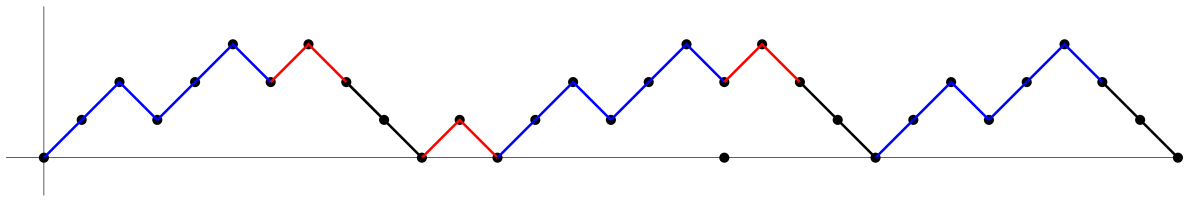
2. Κάθοδοι που έπονται ακριβώς μιας ανόδου.

3. Κάθοδοι που έπονται καθόδου.

Η λέξη $f(a)$ προκύπτει από το a δια αντικαταστάσεως κάθε καθόδου της πρώτης κατηγορίας μαζί με τις δύο ανόδους που προηγούνται από μια άνοδο (δηλαδή $uud \mapsto u$), κάθε καθόδου της δεύτερης κατηγορίας μαζί με την άνοδο που προηγείται από ένα οριζόντιο βήμα (δηλαδη $ud \mapsto h$), και διατηρώντας της καθόδους της τρίτης κατηγορίας όπως είναι.

Προφανώς, το πλήθος των γραμμάτων της $f(a)$ (δηλαδή το μήκος της) ισούται με τον πλήθος των n καθόδων του μονοπατιού a, δηλαδή με το ημιμήκος του a.

Για παράδειγμα, για το μονοπάτι



$$a = \color{blue}{uud}\,\color{blue}{uud}\,\color{red}{ud}\,d\,d\,\color{red}{ud}\,\color{blue}{uud}\,\color{blue}{uud}\,\color{red}{ud}\,d\,d\,\color{blue}{uud}\,\color{blue}{uud}\,d\,d$$

προκύπτει

$$f(a) = \color{blue}{u}\,\color{blue}{u}\,\color{red}{h}\,d\,d\,\color{red}{h}\,\color{blue}{u}\,\color{blue}{u}\,\color{red}{h}\,d\,d\,\color{blue}{u}\,\color{blue}{u}\,d\,d$$

Ασκήσεις

1. Να ευρεθεί η λέξη Motzkin που κωδικοποιεί το μονοπάτι $a = ududuudduuduududuudddd$.

2. Να περιγραφεί η αντίστροφη της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρεθεί το μονοπάτι $f^{-1}(\beta)$ όταν $b = uuuhdhududhdduududhd$.

6η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Γεννήτριες συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Γεννήτριες συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Η γεννήτρια συνάρτηση μιας διπλής ακολουθίας $(f(n,k))$ ορίζεται από τον τύπο

$$f^*(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f(n,k) y^k x^n.$$

Άσκηση 1. *Να ευρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας* $(f(n,k))$ *με* $f(n,k) = \binom{n}{k}$

Λύση.

$$\begin{aligned} f^*(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k} y^k x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} y^k\right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(1+y)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(x(1+y))^n \\ &= \frac{1}{1-x(1+y)} \end{aligned}$$

□

Άσκηση 2. *Να ευρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της διπλής ακολουθίας* $(f(n,k))$ *με*

$$f(n,k) = \min\{n,k\},\ n,k \geqslant 1.$$

Λύση.

$$\begin{aligned}
f^*(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f(n,k)y^k x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1} ky^k x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} ny^k x^n \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty} ky^k x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} ny^k x^n \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} ky^k \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} x^n\right) + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \left(\sum_{k=n}^{\infty} y^k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} ky^k \frac{x^{k+1}}{1-x} + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \frac{y^n}{1-y} \\
&= \frac{x}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty} n(xy)^n + \frac{1}{1-y}\sum_{n=1}^{\infty} n(xy)^n \\
&= \left(\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y}\right)\sum_{n=1}^{\infty} n(xy)^n \\
&= \frac{1-xy}{(1-x)(1-y)}\sum_{n=1}^{\infty} n(xy)^n \\
&= \frac{(1-xy)xy}{(1-x)(1-y)}\sum_{n=1}^{\infty} n(xy)^{n-1} \\
&\overset{16}{=} \frac{(1-xy)xy}{(1-x)(1-y)}\sum_{n=1}^{\infty} ((xy)^n)' \\
&= \frac{(1-xy)xy}{(1-x)(1-y)}\left(\frac{xy}{1-xy}\right)'
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{(1-xy)xy}{(1-x)(1-y)}\frac{1}{(1-xy)^2} \\ &= \frac{xy}{(1-x)(1-y)(1-xy)} \end{aligned} \qquad \square$$

Άσκηση 3. *Δίδεται η διπλή ακολουθία $f(n,k)$, $n,k \geqslant 0$ με $f(n,0) = f(0,k) = 1$ και*

$$f(n,k) = f(n,k-1) + f(n-1,k-1) + f(n-1,k) \qquad (5)$$

Να ευρεθεί η γεννήτρια συνάρτηση της f και στη συνέχεια ο τύπος της.

Λύση. Χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση (5) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n,k)y^k\right)x^n &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n,k-1)y^k\right)x^n \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n-1,k-1)y^k\right)x^n \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n-1,k)y^k\right)x^n \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα εκφράσουμε τα προηγούμενα αθροίσματα συναρτήσει της γεννήτριας συνάρτησης $f^*(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f(n,k)y^k x^n$.

[16] Η παραγώγιση είναι ως προς την μεταβλητή xy.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n,k)y^k\right)x^n &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f(n,k)y^k - f(n,0)\right)x^n\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f(n,k)y^k\right)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f(n,k)y^k x^n - \sum_{k=0}^{\infty} f(0,k)y^k - \sum_{n=1}^{\infty} x^n\\
&= f^*(x,y) - \frac{1}{1-y} - \frac{x}{1-x}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n,k-1)y^k\right)x^n &= y\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n,k-1)y^{k-1}\right)x^n\\
&= y\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f(n,k)y^k\right)x^n\\
&= y\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f(n,k)y^k\right)x^n - y\sum_{k=0}^{\infty} f(0,k)y^k\\
&= yf^*(x,y) - \frac{y}{1-y}.
\end{aligned}
$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n-1,k-1)y^k\right)x^n = y\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n-1,k-1)y^{k-1}\right)x^n$$
$$= y\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f(n-1,k)y^k\right)x^n$$
$$= xy\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f(n-1,k)y^k\right)x^{n-1}$$
$$= xy\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f(n,k)y^k\right)x^n$$
$$= xyf^*(x,y).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f(n-1,k)y^k\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f(n-1,k)y^k - f(n-1,0)\right)x^n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f(n-1,k)y^k x^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$
$$= x\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f(n-1,k)y^k x^{n-1} - \frac{x}{1-x}$$
$$= x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f(n,k)y^k x^n - \frac{x}{1-x}$$
$$= xf^*(x,y) - \frac{x}{1-x}.$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις με αντικατάσταση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
f^*(x,y) &- \frac{1}{1-y} - \frac{x}{1-x} \\
&= yf^*(x,y) - \frac{y}{1-y} + xyf^*(x,y) + xf^*(x,y) - \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow \\
&f^*(x,y)(1-x-y-xy) = 1
\end{aligned}$$

Άρα, τελικά

$$f^*(x,y) = \frac{1}{1-x-y-xy}.$$

Προκειμένου να βρούμε τον τύπο της διπλής ακολουθίας $f(n,k)$ αναπτύσουμε την παραπάνω ρητή συνάρτηση σε δυναμοσειρά.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
f^*(x,y) &= \frac{1}{1-y-x(1+y)} = \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{x(1+y)}{1-y}} \\
&= \frac{1}{1-y} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+y}{1-y} x \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+y)^n}{(1-y)^{n+1}} x^n.
\end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$(1+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k$$

και

$$\frac{1}{(1-y)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} y^k$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο της συνέλιξης προκύπτει ότι

$$\frac{(1+y)^n}{(1-y)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n+k-i}{k-i}y^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n+k-i}{n}y^k$$

Επομένως,

$$f^*(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n+k-i}{n}\right)y^k x^n$$

οπότε

$$f(n,k) = [x^n y^k]f^*(x,y) = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n+k-i}{n}.$$

$\square$

Για την εύρεση του τύπου μιας διπλής ακολουθίας $f(n,k)$ πολλές φορές χρησιμοποιείται η συνάρτηση

$$F_n(y) = \sum_{k=0}^{\infty} f(n,k)y^k$$

Άσκηση 4. *Έστω $f(n,k)$, $n,k \geqslant 1$ ο αριθμός των επαναληπτικών διατάξεων n στοιχείων ανά k στις οποίες δεν υπάρχουν δύο διαδοχικά όμοια στοιχεία.*

i) *Να δειχθεί ότι $f(n,1) = n$ και*

$$f(n,k) = (n-1)f(n,k-1), \text{ για } k \geqslant 2 \text{ και } n \geqslant 1.$$

ii) *Να δειχθεί ότι η γεννήτρια συνάρτηση $F_n(y) = \sum_{k=1}^{\infty} f(n,k)y^k$ δίδεται από τον τύπο*

$$F_n(y) = \frac{ny}{1-(n-1)y}$$

και στη συνέχεια να ευρεθεί ο τύπος της διπλής ακολουθίας $f(n,k)$.

Λύση. i) Προφανώς οι διατάξεις των n ανά 1 δεν μπορούν να έχουν δύο διαδοχικά όμοια στοιχεία οπότε $f(n,1) = n$.

Για $k \geqslant 2$ αν διαγράψουμε από μια επαναληπτική διάταξη $\delta_{n,k}$ των n ανά k χωρίς δύο διαδοχικά όμοια στοιχεία το τελευταίο της στοιχείο θα προκύψει μια επαναληπτική διάταξη $\delta_{n,k-1}$ που δεν έχει επίσης δύο διαδοχικά όμοια στοιχεία.

Επιπλέον, επειδή το τελευταίο στοιχείο, έστω i, της $\delta_{n,k}$ είναι διαφορετικό από το προτελευταίο οι δυνατές τιμές που μπορεί να λάβει το i είναι $(n-1)$. Κατόπιν τούτων σε κάθε διάταξη $\delta_{n,k}$ αντιστοιχούμε μονοσήμαντα το ζευγάρι $(\delta_{n,k-1}, i)$.

Για παράδειγμα, η επαναληπτική διάταξη

$\delta_{6,4} = 5\ 1\ 6\ 1$

αντιστοιχεί στο ζεύγος $(\delta_{6,3}, 1) = (5\ 1\ 6, 1)$.

Πιο γενικά, η επαναληπτική διάταξη $5\ 1\ 6\ i$ αντιστοιχεί στο ζεύγος $(5\ 1\ 6, i)$ όπου $i \neq 6$.

Οπότε σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή

$$\begin{aligned} f(n,k) &= \text{ αριθμός } \delta_{n,k} \\ &= (n-1) \cdot \text{ αριθμός } \delta_{n,k-1} \\ &= (n-1) f(n,k-1) \end{aligned}$$

ii) Για τη γεννήτρια συνάρτηση $F_n(y)$ είναι

$$\begin{aligned}
F_n(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} f(n,k)y^k \\
&= f(n,1)y + \sum_{k=2}^{\infty} f(n,k)y^k \\
&= ny + \sum_{k=2}^{\infty} (n-1)f(n,k-1)y^k \\
&= ny + (n-1)y \sum_{k=2}^{\infty} f(n,k-1)y^{k-1} \\
&= ny + (n-1)y \sum_{k=1}^{\infty} f(n,k)y^k \\
&= ny + (n-1)yF_n(y).
\end{aligned}$$

Άρα,

$$F_n(y) = \frac{ny}{1-(n-1)y}$$

Δια αναπτύξεως της παραπάνω ρητής συνάρτησης σε δυναμοσειρά προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
F_n(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} ny(n-1)^k y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} n(n-1)^k y^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} n(n-1)^{k-1} y^k
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(n,k)y^k = \sum_{k=1}^{\infty} n(n-1)^{k-1}y^k \Leftrightarrow f(n,k) = n(n-1)^{k-1}.$$

$\square$

Άσκηση 5. *Να ευρεθεί ο τύπος της διπλής ακολουθίας $(N(n,k))$ της οποίας η γεννήτρια συνάρτηση ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση*

$$N^*(x,y) = 1 + x(N^*(x,y))^2 + x(y-1)N^*(x,y).$$

Λύση. Έστω $N^*(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} N(n,k)y^k\right)x^n$

Προφανώς, από την εξίσωση ισχύει ότι $N(0,k) = \delta_{0,k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Ισχύει ότι

$$N^*(x,y) = 1 + x\left((N^*(x,y))^2 + (y-1)N^*(x,y)\right)$$

Θα εφαρμοσθεί το Θεώρημα Αντιστροφής του Lagrange όπου το x είναι η μεταβλητή και το y θεωρείται ως παράμετρος.

Αν τεθεί $F(z) = z^2 + (y-1)z = z(z+y-1)$, τότε για $n \geqslant 1$

$$n[x^n]N^*(x,y) = [z^{n-1}](F(z+1))^n$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}(F(z+1))^n = (z+1)^n(z+y)^n &= \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}z^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}y^{n-j}z^j\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}y^{n-j}z^{i+j}\\ &\overset{m=i+j}{=} \sum_{m=0}^{2n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{m-j}\binom{n}{j}y^{n-j}z^m.\end{aligned}$$

Οπότε για $n \geqslant 1$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} n[x^n]N^*(x,y) &= [z^{n-1}](F(z+1))^n \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{n-1-j}\binom{n}{j} y^{n-j} \\ &\overset{k=n-j}{=} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1}\binom{n}{k} y^k \end{aligned}$$

Επειδή,

$$N^*(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} N(n,k) y^k \right) x^n$$

προκύπτει ότι για $n \geqslant 1$

$$[x^n]N^*(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} N(n,k) y^k$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι για $n \geqslant 1$ είναι

$$N(n,k) = \frac{1}{n}\binom{n}{k-1}\binom{n}{k}. \qquad \square$$

Οι αριθμοί $N(n,k)$ της προηγούμενης άσκησης ονομάζονται **αριθμοί Narayana** και όπως θα δούμε έχουν σημαντικές εφαρμογές.

Στην επόμενη πρόταση δίδεται μια γενίκευση του τύπου αντιστροφής του Lagrange

Πρόταση 6. *Αν μια γεννήτρια συνάρτηση* f^* *ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση*

$$f^*(x) = 1 + xF(f^*(x))$$

όπου $F(z)$ *είναι μια δυναμοσειρά του* z *και* G *είναι ένα πολυώνυμο του* z *τότε*

$$n[x^n]G(f^*(x)) = [z^{n-1}]\left(G'(1+z)(F(z+1))^n\right).$$

Ειδικά, αν $G(z) = z^s$, $s \in \mathbb{N}^*$, *τότε για* $n \geqslant 1$

$$[x^n](f^*(x))^s = \frac{s}{n}[z^{n-1}]\left((z+1)^{s-1}(F(z+1))^n\right)$$

Παράδειγμα 1. *Να ευρεθούν οι συντελεστές των δυνάμεων της γεννήτριας των αριθμών Catalan.*

Γνωρίζουμε ότι η γεννήτρια $C^*(x)$ των αριθμών Catalan ικανοποιεί την συναρτησιακή εξίσωση

$$C^*(x) = 1 + x(C^*(x))^2.$$

Εφαρμόζοντας το γενικευμένο τύπο της αντιστροφής του Lagrange, θέτουμε $F(z) = z^2$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$$C^*(x) = 1 + xF(C^*(x))$$

και για $s \in \mathbb{N}^*$ είναι

$$\begin{aligned}(z+1)^{s-1}(F(z+1))^n &= (z+1)^{s-1}(z+1)^{2n} = (z+1)^{2n+s-1}\\ &= \sum_{i=0}^{2n+s-1}\binom{2n+s-1}{i}z^i\end{aligned}$$

οπότε για $n \geqslant 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}[x^n](C^*(x))^s &= \frac{s}{n}[z^{n-1}]\left((z+1)^{s-1}(F(z+1))^n\right)\\ &= \frac{s}{n}\binom{2n+s-1}{n-1} = \frac{s}{n+s}\binom{2n+s-1}{n}.\end{aligned}$$

Άσκηση 6. *Να ευρεθεί ο τύπος της διπλής ακολουθίας $(R(n,k))$ της οποίας η γεννήτρια*

$$R^*(x,y) = \frac{1}{1-xyC^*(x)}$$

Λύση. Έστω

$$R^*(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} R(n,k)y^k x^n. \tag{6}$$

Από το δοσμένο τύπο προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}R^*(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k (C^*(x,y))^k\\ &= 1+\sum_{k=1}^{\infty} x^k y^k\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{k}{m+k}\binom{2m+k-1}{m}x^m\right)\\ &= 1+\sum_{k=1}^{\infty} x^k y^k + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{k}{m+k}\binom{2m+k-1}{m+k-1}y^k x^{m+k}\\ &\overset{n=m+k}{=} \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}\binom{2n-k-1}{n-1}y^k x^n \qquad (7)\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) προκύπτει ότι $R(n,k)=0$, αν $k>n$, $R(n,n)=1$ και

$$R(n,k) = \frac{k}{n}\binom{2n-k-1}{n-1}, \text{ αν } 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

Οι αριθμοί $R(n,k)$ ονομάζονται **αριθμοί Riordan** και εμφανίζονται πολλές φορές στις εφαρμογές. $\square$

7η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Διμεταβλητές γεννήτριες συναρτήσεις συνόλων

Διμεταβλητές γεννήτριες συναρτήσεις συνόλων

Αν $\mathcal{A}$ είναι ένα σύνολο συνδυαστικών αντικειμένων με μια βασική παράμετρο p και μια δευτερεύουσα παράμετρο q τότε η διμεταβλητή δυναμοσειρά

$$A(x,y) = \sum_{a \in \mathcal{A}} x^{p(a)} y^{q(a)}$$

ονομάζεται **(διμεταβλητή) γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{A}$ ως προς τις παραμέτρους** p, q.

Πρόταση 7. *Αν $\mathcal{A}$ είναι ένα σύνολο συνδυαστικών αντικειμένων, p βασική παράμετρος στο $\mathcal{A}$, q δευτερεύουσα παράμετρος στο $\mathcal{A}$ και $(a_{n,k})$ η διπλή ακολουθία που ορίζεται από τον τύπο*

$$a_{n,k} = \left|\{a \in \mathcal{A} : p(a) = n \text{ και } q(a) = k\}\right|$$

τότε η γεννήτρια συνάρτηση $a^*(x,y)$ της ακολουθίας αυτής ισούται με την γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου A ως προς τις παραμέτρους p, q.

Απόδειξη. Επειδή η ακολουθία $(\mathcal{A}_n)$, $n \in \mathbb{N}$ με

$$\mathcal{A}_n = \{a \in \mathcal{A} : p(a) = n\}$$

αποτελεί μια διαμέριση του σύνολου $\mathcal{A}$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} A(x,y) &= \sum_{a\in\mathcal{A}} x^{p(a)}y^{q(a)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{a\in\mathcal{A}_n} x^{p(a)}y^{q(a)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{a\in\mathcal{A}_n} y^{q(a)} \end{aligned}$$

Ανάλογα, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ η ακολουθία $(\mathcal{A}_{n,k})$, $k\in\mathbb{N}$ αποτελεί μια διαμέριση του συνόλου $\mathcal{A}_n$, οπότε ισχύει ότι

$$\sum_{a\in\mathcal{A}_n} y^{q(a)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{a\in\mathcal{A}_{n,k}} y^{q(a)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{a\in\mathcal{A}_{n,k}} y^k = \sum_{k=0}^{\infty} |\mathcal{A}_{n,k}|\, y^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}y^k$$

Από αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στον τύπο της γεννήτριας προκύπτει ότι

$$A(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}y^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}y^kx^n = a^*(x,y). \quad \square$$

Παρατηρήσεις

1. Επειδή το σύνολο $\mathcal{A}_n$ είναι πεπερασμένο έπεται ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ οι όροι της ακολουθίας $(a_{n,k})$, $k\in\mathbb{N}$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος είναι ίσοι με 0. Έτσι η γεννήτρια συνάρτηση $A(y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{n,k}y^k$ είναι ουσιαστικά ένα πολυώνυμο.

2. Η γεννήτρια συνάρτηση $A(x,1)$ είναι ίση με την γεννήτρια συνάρτηση του συνόλου $\mathcal{A}$ ως προς την παράμε-

τρο p, αφού

$$A(x,1) = \sum_{a\in\mathcal{A}} x^{p(a)}1^{q(a)} = \sum_{a\in\mathcal{A}} x^{p(a)}.$$

Παράδειγμα 1. *Να ευρεθεί ο αριθμός $a_{n,k}$ των δυαδικών λέξεων με n γράμματα από τα οποία k είναι ίσα με 1, όπου $k \leqslant n$.*

Λύση. Κάθε μη κενή δυαδική λέξη $a \in \{0,1\}^*$ γράφεται μονοσήμαντα σε μια από τις παρακάτω μορφές

$$a = b0 \text{ ή } a = b1$$

όπου $b \in \{0,1\}^*$.

Οπότε η γεννήτρια συνάρτηση $A(x,y)$ του συνόλου $\{0,1\}^*$ ως προς τις παραμέτρους $p(a) =$ αριθμός γραμμάτων της a και $q(a) =$ αριθμός των 1 στη λέξη a είναι

$$\begin{aligned} A(x,y) &= \sum_{a\in\{0,1\}^*} x^{p(a)}y^{q(a)} \\ &= x^{p(\epsilon)}y^{q(\epsilon)} + \sum_{b\in\{0,1\}^*} x^{p(b0)}y^{q(b0)} + \sum_{b\in\{0,1\}^*} x^{p(b1)}y^{q(b1)} \\ &= 1 + \sum_{b\in\{0,1\}^*} x^{p(b)+1}y^{q(b)} + \sum_{b\in\{0,1\}^*} x^{p(b)+1}y^{q(b)+1} \\ &= 1 + x\sum_{b\in\{0,1\}^*} x^{p(b)}y^{q(b)} + xy\sum_{b\in\{0,1\}^*} x^{p(b)}y^{q(b)} \\ &= 1 + xA(x,y) + xyA(x,y) \end{aligned}$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
A(x,y) &= \frac{1}{1-x(y+1)} = \sum_{n=0} x^n (y+1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n y^k
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$
a_{n,k} = [x^n y^k] A(x,y) = \binom{n}{k}. \qquad \square
$$

Στα επόμενα θα χρησιμοποιηθεί ο παρακάτω συμβολισμός

Αν P είναι μια λογική πρόταση, τότε ορίζεται η έκφραση

$$
[P] = \begin{cases} 1, & \text{αν } P \text{ αληθής} \\ 0, & \text{αν } P \text{ ψευδής} \end{cases}
$$

η οποία ονομάζεται **συμβολισμός Iverson**.

Για παράδειγμα, στο σύνολο των δυαδικών λέξεων για την πρόταση

P: Η δυαδική λέξη περιέχει τρια διαδοχικά 0.

είναι

[10010001 έχει τρία διαδοχικά 0] $= 1$

[11010100 έχει τρία διαδοχικά 0] $= 0$.

Παράδειγμα 2. *Να ευρεθεί ο αριθμός των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς που έχει*

i) *k φύλλα*

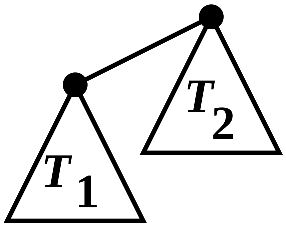
ii) *βαθμός ρίζας r.*

Λύση. Ο αριθμός $a_{n,k}$ (αντ. $b_{n,r}$) των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς και k φύλλα (αντ. βαθμό ρίζας r) είναι ο συντελεστής της γεννήτριας

$$F(x,y) = \sum_{T\in\mathcal{T}} x^{p(T)}y^{q(T)} \left(\text{αντ. } G(x,y) = \sum_{T\in\mathcal{T}} x^{p(T)}y^{d(T)}\right)$$

όπου $p(T)$ = αριθμός δεσμών του T και $q(T)$ = αριθμός φύλλων του T (αντ. $d(T)$ = βαθμός ρίζας του T.)

Προκειμένου να υπολογιστούν οι συναρτησιακές εξισώσεις των γεννητριών συναρτήσεων F, G θα χρησιμοποιηθεί η γνωστή διάσπαση των μη κενών διατεταγμένων δένδρων:

$T =$ 

i) Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= \sum_{T\in\mathcal{T}} x^{p(T)}y^{q(T)} \\
&= x^{p(\bullet)}y^{q(\bullet)} + \sum_{T_1,T_2\in\mathcal{T}} x^{p(T_1)+p(T_2)+1}y^{q(T_1)+q(T_2)+[T_1=\bullet]} \\
&= 1 + x\left(\sum_{T_1\in\mathcal{T}} x^{p(T_1)}y^{q(T_1)+[T_1=\bullet]}\right)\left(\sum_{T_2\in\mathcal{T}} x^{p(T_2)}y^{q(T_2)}\right) \\
&= 1 + x\left(x^{p(\bullet)}y^{q(\bullet)+1} + \sum_{T_1\in\mathcal{T}\setminus\{\bullet\}} x^{p(T_1)}y^{q(T_1)}\right)F(x,y) \\
&= 1 + x\left(y + \sum_{T_1\in\mathcal{T}} x^{p(T_1)}y^{q(T_1)} - x^{p(\bullet)}y^{q(\bullet)}\right)F(x,y) \\
&= 1 + x\left(y-1+F(x,y)\right)F(x,y).
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$F(x,y) = 1 + x\left(F(x,y)\right)^2 + x(y-1)F(x,y)$$

δηλαδή η $F(x,y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Narayana οπότε

$$a_{n,k} = [x^n y^k]F(x,y) = N(n,k) = \frac{1}{n}\binom{n}{k-1}\binom{n}{k}.$$

ii)

$$\begin{aligned}
G(x,y) &= \sum_{T\in\mathcal{T}} x^{p(T)}y^{d(T)} \\
&= x^{p(\bullet)}y^{d(\bullet)} + \sum_{T_1,T_2\in\mathcal{T}} x^{p(T_1)+p(T_2)+1}y^{d(T_2)+1} \\
&= 1 + xy\left(\sum_{T_1\in\mathcal{T}} x^{p(T_1)}\right)\left(\sum_{T_2\in\mathcal{T}} x^{p(T_2)}y^{d(T_2)}\right) \\
&= 1 + xyC^*(x)G(x,y)
\end{aligned}$$

οπότε

$$G(x,y) = \frac{1}{1-xyC^*(x)}$$

δηλαδή η $G(x,y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Riordan, οπότε

$$b_{n,r} = [x^ny^k]G(x,y) = R(n,k) = \frac{r}{n}\binom{2n-r-1}{n-1}. \qquad \square$$

Παράδειγμα 3. *Να ευρεθεί ο αριθμός των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n που έχει*

i) *k κορυφές*

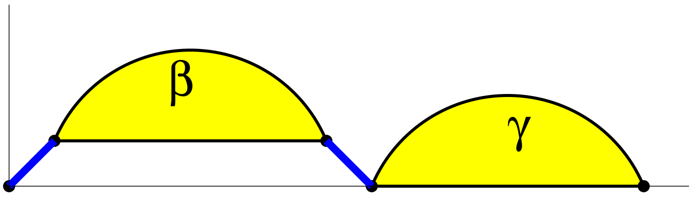
ii) *r επιστροφές*

Λύση. Ο αριθμός $a_{n,k}$ (αντ. $b_{n,k}$) των μονοπατιών Dyck ημιμήκους n με k κορυφές (αντ. r επιστροφές) είναι ο συντελεστής της γεννήτριας

$$F(x,y) = \sum_{a\in\mathcal{D}} x^{p(a)}y^{q(a)} \left(\text{αντ. } G(x,y) = \sum_{a\in\mathcal{D}} x^{p(a)}y^{r(a)}\right)$$

όπου $p(a)$ = ημιμήκος του a και $q(a)$ = αριθμός κορυφών του a ($r(a)$ = αριθμός επιστροφών του a).

Προκειμένου να υπολογισθούν οι συναρτησιακές εξισώσεις των γεννητριών συναρτήσεων F και G θα χρησιμοποιηθεί η διάσπαση της πρώτης επιστροφής των μη κενών μονοπατιών Dyck.

$a =$ 

i) Πράγματι

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \sum_{a\in\mathcal{D}} x^{p(a)}y^{q(a)} \\
&= x^{p(\epsilon)}y^{q(\epsilon)} + \sum_{\beta,\gamma\in\mathcal{D}} x^{p(\beta)+p(\gamma)+1}y^{q(\beta)+q(\gamma)+[\beta=\epsilon]} \\
&= 1 + x\left(\sum_{\beta\in\mathcal{D}} x^{p(\beta)}y^{q(\beta)+[\beta=\epsilon]}\right)\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{D}} x^{p(\gamma)}y^{q(\gamma)}\right) \\
&= 1 + x\left(x^{p(\epsilon)}y^{q(\epsilon)+1} + \sum_{\beta\in\mathcal{D}\setminus\{\epsilon\}} x^{p(\beta)}y^{q(\beta)}\right)F(x,y) \\
&= 1 + x\left(y + \sum_{b\in\mathcal{D}} x^{p(\beta)}y^{q(\beta)} - x^{p(\epsilon)}y^{q(\epsilon)}\right)F(x,y) \\
&= 1 + x(y-1+F(x,y))F(x,y)
\end{aligned}$$

Άρα,

$$F(x,y) = 1 + x\left(F(x,y)\right)^2 + x(y-1)F(x,y),$$

δηλαδή η $F(x, y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Narayana οπότε

$$a_{n,k} = [x^n y^k]F(x, y) = N(n, k) = \frac{1}{n}\binom{n}{k-1}\binom{n}{k}.$$

ii)

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \sum_{a \in \mathcal{D}} x^{p(a)} y^{r(a)} \\ &= x^{p(\epsilon})y^{r(\epsilon)} + \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{D}} x^{p(\beta)+p(\gamma)+1} y^{r(\gamma)+1} \\ &= 1 + xy \left(\sum_{\beta \in \mathcal{D}} x^{p(\beta)} \right) \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{D}} x^{p(\gamma)} y^{r(\gamma)} \right) \\ &= 1 + xyC^*(x)G(x, y), \end{aligned}$$

οπότε

$$G(x, y) = \frac{1}{1 - xyC^*(x)}$$

δηλαδή η $G(x, y)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Riordan οπότε

$$b_{n,r} = [x^n y^r]G(x, y) = R(n, r) = \frac{r}{n}\binom{2n-r-1}{n-1}. \qquad \square$$