1η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΑΡΙΘΜΟΙ

- **Συνδυαστικοί αριθμοί**
- **Αριθμοί Catalan**
  - **Δυαδικά δένδρα με** n **κορυφές**
  - **Λέξεις και μονοπάτια Dyck**

Συνδυαστικοί αριθμοί

Η απλή ακολουθία των **παραγοντικών** $n!$ και η διπλή ακολουθία των **συνδυασμών** $\binom{n}{k}$ εμφανίζονται σε πολλά προβλήματα απαρίθμησης που μελετήσαμε στα Μαθηματικά των Υπολογιστών.

Υπάρχουν και πολλές άλλες ακολουθίες αριθμών που εμφανίζονται συχνά σε προβλήματα απαρίθμησης και κατασκευής αντικειμένων, οι οποίες λόγω της σημαντικότητάς τους είναι επώνυμες. Παραδείγματα τέτοιων επώνυμων ακολουθιών αποτελούν οι απλές ακολουθίες των αριθμών **Fibonacci**, **Catalan**, **Bell**, **Σςηρöδερ**, **Motzkin** κ.α. και οι διπλές ακολουθίες των αριθμών **Stirling**, **Narayana**, κ.α.

Όπως φαίνεται στις επόμενες ενότητες οι ιδιότητες αυτών των αριθμών συνδέονται με την δομή των αντικειμένων που απαριθμούν.
Αρκετά νωρίς παρατηρήθηκε ότι όταν δύο συνδυαστικά αντικείμενα απαριθμούνται από την ίδια ακολουθία αριθμών συνήθως υπάρχει μια ''δομική'' συγγένεια μεταξύ τους.
Παραδείγματος χάριν, τα αντικείμενα στα οποία εμφανίζονται οι αριθμοί **Catalan** μπορούν να ορισθούν αναδρομικά από δύο ''μικρότερα'' αντικείμενα του ίδιου τύπου με αυτά.
Από το γεγονός αυτό προέκυψε η ανάγκη συστηματικής μελέτης και καταγραφής ορισμένων ακολουθιών αριθμών.

Το 1973, ο **Sloane** εξέδωσε το βιβλίο **A Handbook of Integer Sequences**, το οποίο περιλάμβανε στοιχεία για περίπου 2300 ακολουθίες. Το 1995, σε συνεργασία με τον **Plouffe**, ακολούθησε νέα έκδοση υπό τον τίτλο **The Encyclopedia of Integer Sequences**, η οποία περιλάμβανε περίπου 5000 ακολουθίες. Η χρησιμότητα αυτών των βιβλίων έγινε φανερή από την αρχή (βλ. για παράδειγμα τις βιβλιοκριτικές των **Borwein** και **Corless** (J. M. Borwein and R. M. Corless, An Encyclopedia of Integer Sequences, *SIAM Review* **38** (1996), 333–337.), ή του **Guy** (R. Guy, The Encyclopedia of Integer Sequences, *Amer. Math. Monthly* **104**(2), 180–184). Από το 1996, τα βιβλία αυτά πέρασαν σε ηλεκτρονική μορφή διαθέσιμη στο διαδίκτυο, γνωστή ως **The Online Encyclopedia of Integer Sequences**

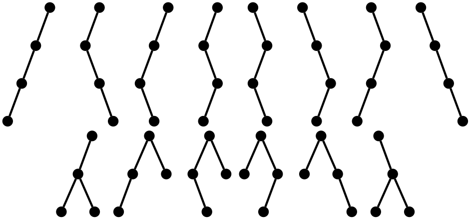
https://oeis.org/

η οποία σήμερα (2020) περιλαμβάνει πάνω από 330.000 ακολουθίες ακεραίων αριθμών, και ανανεώνεται καθημερινά από ερευνητές με νέες ακολουθίες και με νέα στοιχεία για τις υπάρχουσες ακολουθίες.

Βασικά συνδυαστικά αντικείμενα

Αντικείμενο	**Αριθμός**	**Παράδειγμα για** $n = 4$ **και** $k = 2$
υποσύνολα του $[n]$	2^n	$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$.
k-υποσύνολα του $[n]$	$\binom{n}{k}$	$\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$.
μεταθέσεις του $[n]$	$n!$	1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.
μεταθέσεις του $[n]$ με k ξένους κύκλους	$\lvert S(n,k)\rvert$	(1)(234), (1)(243), (2)(134), (2)(143), (3)(124), (3)(142), (4)(123), (4)(132), (12)(34), (13)(24), (14)(23).

Αντικείμενο	**Αριθμός**	**Παράδειγμα για** $n = 4$ **και** $k = 2$
διαμερίσεις του $[n]$	B_n	$\{\{1\},\{2,3,4\}\}$, $\{\{2\},\{1,3,4\}\}$, $\{\{3\},\{1,2,4\}\}$, $\{\{4\},\{1,2,3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$, $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$, $\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$, $\{\{2,3\},\{1\},\{4\}\}$, $\{\{2,4\},\{1\},\{3\}\}$ $\{\{3,4\},\{1\},\{2\}\}$, $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$, $\{\{1234\}\}$.
διαμερίσεις του $[n]$ σε k υποσύνολα	$\overline{S}(n,k)$	$\{\{1\},\{2,3,4\}\}$, $\{\{2\},\{1,3,4\}\}$, $\{\{3\},\{1,2,4\}\}$, $\{\{4\},\{1,2,3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$, $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$.
Διαμερίσεις του n (χωρίς σειρά)	p_n	4, $3+1$, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$.
Διαμερίσεις του n σε k μέρη (χωρίς σειρά)	$p_{n,k}$	$3+1$, $2+2$
Διαμερίσεις του n (με σειρά)	2^{n-1}	4, $3+1$, $1+3$, $2+2$, $2+1+1$, $1+2+1$, $1+1+2$, $1+1+1+1$.
Διαμερίσεις του n σε k μέρη (με σειρά)	$\binom{n-1}{k-1}$	$3+1$, $1+3$, $2+2$

Αντικείμενο	Αριθμός	Παράδειγμα για $n = 4$ και $k = 2$
Δυαδικά δένδρα με n κόμβους	C_n	

Δυαδικά δένδρα

Υπενθυμίζεται ότι ένα δένδρο με ρίζα ονομάζεται **δυαδικό δένδρο** αν κάθε κόμβος του που δεν είναι φύλλο έχει είτε ένα αριστερό, είτε ένα δεξιό παιδί, είτε δύο παιδιά (ένα αριστερό και ένα δεξιό).
Όπως ειπώθηκε στα δυαδικά δένδρα συμπεριλαμβάνεται και το κενό δυαδικό δένδρο, δηλαδή το δένδρο χωρίς κανένα κόμβο.

Έστω $\mathcal{B}_n$ το σύνολο των δυαδικών δένδρων με n κόμβους και $\mathcal{B} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n$.

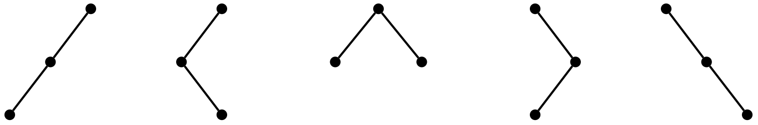
Παραδείγματα

$\mathcal{B}_0$: $\square$ (κενό δυαδικό δένδρο)

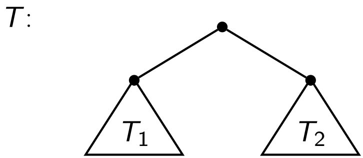
$\mathcal{B}_1$:

$\mathcal{B}_2$:

$\mathcal{B}_3$:



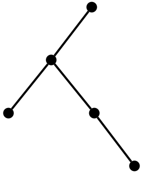
Κάθε μη κενό δυαδικό δένδρο T μπορεί να διασπασθεί κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή:



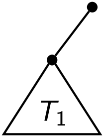
όπου T_1, T_2 είναι επίσης δυαδικά δένδρα (συμπεριλαμβανομένου και του κενού δυαδικού δένδρου), τα οποία ονομάζονται **αριστερό** (αντ. **δεξιό**) **υποδένδρο της ρίζας**. Στην περίπτωση όπου κάποιο από τα υποδένδρα της ρίζας είναι κενό τότε προφανώς δεν υπάρχει ο δεσμός που συνδέει τη ρίζα με τη ρίζα του αντίστοιχου υποδένδρου.

Παραδείγματα

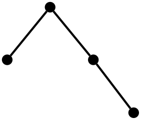
Το δένδρο T:

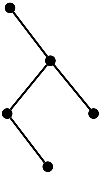
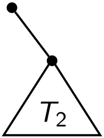


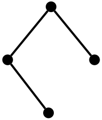
διασπάται στη μορφή

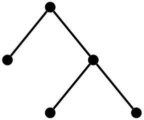
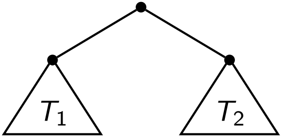


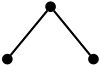
όπου T_1:



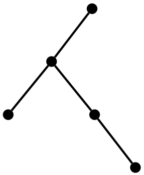
Το δένδρο T:  διασπάται στη μορφή 

όπου T_2: 

Το δένδρο T:  διασπάται στη μορφή 

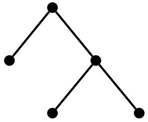
όπου T_1:  και T_2: 

Έστω $\mathcal{B}_{n,k}$ το σύνολο όλων των δυαδικών δένδρων με n κόμβους στα οποία το αριστερό υποδένδρο της ρίζας περιέχει k κόμβους.
Για παράδειγμα το δένδρο



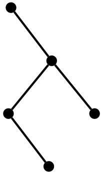
ανήκει στο σύνολο $\mathcal{B}_{5,4}$,

το δένδρο



ανήκει στο σύνολο $\mathcal{B}_{5,1}$,

το δένδρο



ανήκει στο σύνολο $\mathcal{B}_{5,0}$.

Προφανώς, επειδή κάθε μη κενό δυαδικό δένδρο T με n κόμβους ανήκει σε ένα μοναδικό σύνολο $\mathcal{B}_{n,k}$, τα σύνολα $\mathcal{B}_{n,0}$, $\mathcal{B}_{n,1}$, ..., $\mathcal{B}_{n,n-1}$ αποτελούν μια διαμέριση του $\mathcal{B}_n$.
Επομένως, ισχύει ότι

$$|\mathcal{B}_n| = |\mathcal{B}_{n,0}| + |\mathcal{B}_{n,1}| + \cdots + |\mathcal{B}_{n,n-1}| = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{B}_{n,k}|, \text{ για κάθε } n \geq 1. \quad (1)$$

Επιπρόσθετα, κάθε δυαδικό δένδρο $T \in \mathcal{B}_{n,k}$ ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από το αριστερό και το δεξιό υποδένδρο της ρίζας T_1 και T_2 αντίστοιχα. Αν $T \in \mathcal{B}_{n,k}$ τότε $T_1 \in \mathcal{B}_k$ και $T_2 \in \mathcal{B}_{n-1-k}$.
Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή

$$|\mathcal{B}_{n,k}| = |\mathcal{B}_k||\mathcal{B}_{n-1-k}| \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι

$$|\mathcal{B}_n| = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{B}_k||\mathcal{B}_{n-1-k}|, \text{ για κάθε } n \geq 1 \text{ και } |\mathcal{B}_0| = 1.$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται **τύπος του Segner**.

Έτσι,

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{B}_1| &= \sum_{k=0}^{0} |\mathcal{B}_k||\mathcal{B}_{0-k}| = |\mathcal{B}_0||\mathcal{B}_0| = 1 \cdot 1 = 1, \\
|\mathcal{B}_2| &= \sum_{k=0}^{1} |\mathcal{B}_k||\mathcal{B}_{1-k}| = |\mathcal{B}_0||\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_1||\mathcal{B}_0| = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2, \\
|\mathcal{B}_3| &= \sum_{k=0}^{2} |\mathcal{B}_k||\mathcal{B}_{2-k}| = |\mathcal{B}_0||\mathcal{B}_2| + |\mathcal{B}_1||\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2||\mathcal{B}_0| = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = \\
|\mathcal{B}_4| &= \sum_{k=0}^{3} |\mathcal{B}_k||\mathcal{B}_{3-k}| = |\mathcal{B}_0||\mathcal{B}_3| + |\mathcal{B}_1||\mathcal{B}_2| + |\mathcal{B}_2||\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_3||\mathcal{B}_0| \\
&= 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14.
\end{aligned}
$$

Η ακολουθία των αριθμών $|\mathcal{B}_n|$ ονομάζεται ακολουθία των **αριθμών Catalan** και συμβολίζεται με C_n.

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \text{ για κάθε } n \geq 1 \text{ και } C_0 = 1.$$ (**Τύπος του Segner**)

Μερικές από τις τιμές της ακολουθίας C_n δίδονται στον επόμενο πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

Επομένως, για παράδειγμα, υπάρχουν 16796 δυαδικά δένδρα με 10 κόμβους.

Η ακολουθία C_n αυξάνει αρκετά γρήγορα, για παράδειγμα

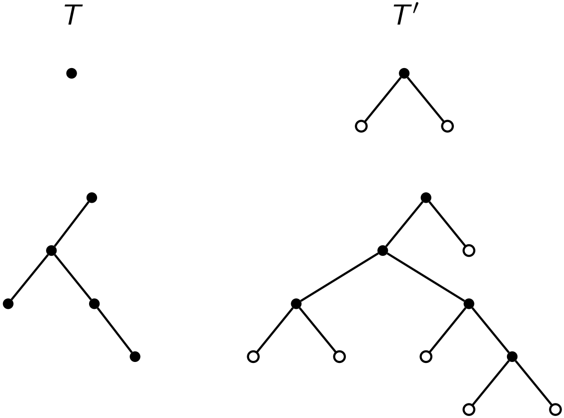
$$\begin{aligned} C_{15} &= 9\ 694\ 845 \\ C_{20} &= 6\ 564\ 120\ 420 \\ C_{25} &= 4\ 861\ 946\ 401\ 452 \\ C_{100} &= \underbrace{896\ \cdots\ 320}_{\text{57 ψηφία}} \end{aligned}$$

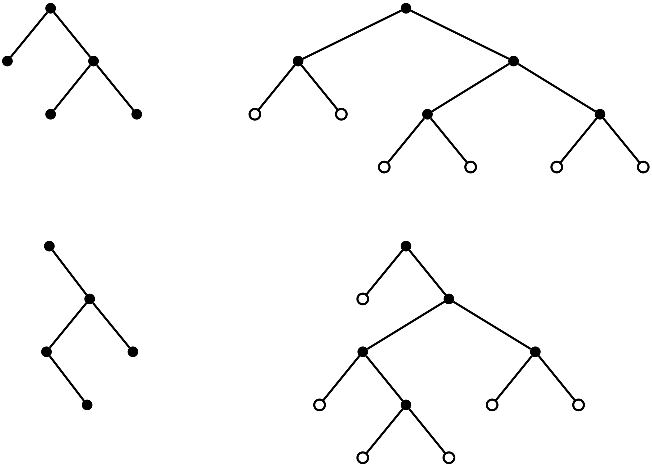
έτσι, είναι ανέφικτη η κατασκευή όλων των δυαδικών δένδρων με περισσότερους από 25 κόμβους.

Λέξεις και μονοπάτια Dyck

Κάθε δυαδικό δένδρο T μπορεί να επεκταθεί κατά μοναδικό τρόπο σε ένα δυαδικό δένδρο T' (όπου κάθε κόμβος του έχει 0 ή 2 παιδιά) προσθέτοντας ένα αριστερό (αντ. δεξιό) παιδί σε κάθε κόμβο με δεξιό (αντ. αριστερό) παιδί, και δύο παιδιά σε κάθε φύλλο του T. Προφανώς, το δυαδικό δενδρο T μπορεί να προκύψει ξανά από το T' σβήνοντας όλα τα φύλλα του.

Παραδείγματα

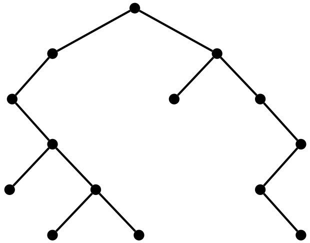




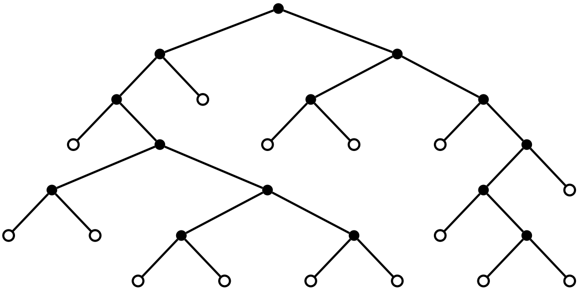
Κάθε δυαδικό δένδρο T με n κόμβους μπορεί να κωδικοποιηθεί από μια δυαδική λέξη μήκους $2n$ ως εξής:

1. Επεκτείνουμε το δυαδικό δένδρο T στο δυαδικό δένδρο T'
2. Διασχίζουμε το δένδρο T' σε προδιάταξη και κάθε φορά που συναντάμε αριστερό παιδί σημειώνουμε 1, ενώ κάθε φορά που συναντάμε δεξιό παιδί σημειώνουμε 0.
3. Η κωδικοποίηση του δένδρου είναι η δυαδική λέξη που παράγεται από την παραπάνω διαδικασία.

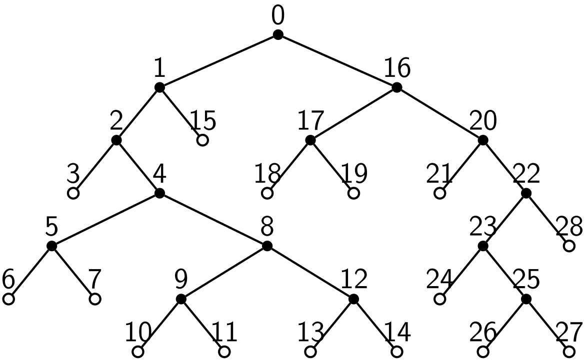
Παράδειγμα Από το δένδρο T



προκύπτει το δένδρο T'



Αριθμούμε τους κόμβους του δένδρου T' σε προδιάταξη



Από την παραπάνω αρίθμηση προκύπτει η δυαδική λέξη

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0

21	22	23	24	25	26	27	28
1	0	1	1	0	1	0	0

Η δυαδική λέξη που προκύπτει κατά την κωδικοποίηση ενός δυαδικού δένδρου ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες και ονομάζεται λέξη Dyck.

Μια δυαδική λέξη a ονομάζεται **λέξη Dyck** αν ικανοποιεί τις ιδιότητες:

1. Η a έχει το ίδιο πλήθος 1 και 0.
2. Σε κάθε πρόθεμα (αρχικό τμήμα) της a ο αριθμός των 1 είναι μεγαλύτερος ή ίσος του αριθμού των 0.

Προφανώς, όλες οι λέξεις Dyck έχουν άρτιο μήκος. Η κενή λέξη θεωρείται λέξη Dyck.

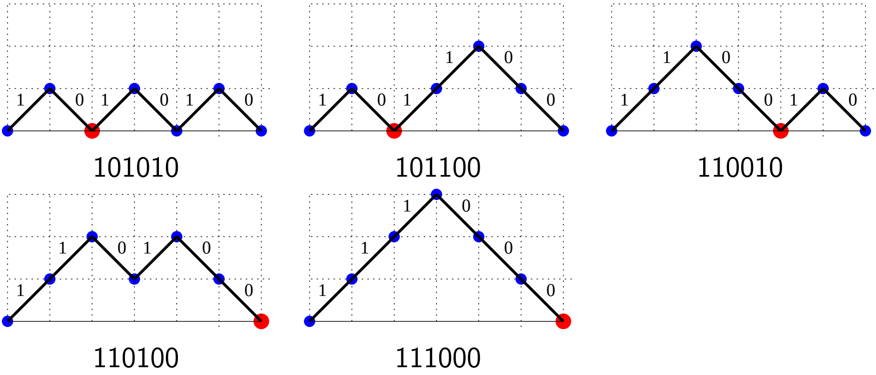
Παραδείγματα

1. Η λέξη $a = 1100110000$ **δεν** είναι λέξη Dyck διότι ο αριθμός των 1 δεν είναι ίσος με τον αριθμό των 0 στη λέξη a.
2. Η λέξη $a = 1100100110$ **δεν** είναι λέξη Dyck διότι στο πρόθεμα 1100100 ο αριθμός των 0 είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των 1.
3. Η λέξη $a = 1100101100$ είναι λέξη Dyck διότι ικανοποιεί και τις δύο ιδιότητες.

Το σύνολο όλων των λέξεων Dyck μήκους $2n$ συμβολίζεται με $\mathcal{D}_n$.

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{D}_0: & \epsilon \quad (\text{κενή λέξη}) & |\mathcal{D}_0| = 1 \\[1em]
\mathcal{D}_1: & 10 & |\mathcal{D}_1| = 1 \\[1em]
\mathcal{D}_2: & \begin{array}{c} 1010 \\ 1100 \end{array} & |\mathcal{D}_2| = 2 \\[1em]
\mathcal{D}_3: & \begin{array}{c} 101010 \\ 101100 \\ 110010 \\ 110100 \\ 111000 \end{array} & |\mathcal{D}_3| = 5.
\end{array}
$$

Οι λέξεις Dyck του $\mathcal{D}_n$ μπορούν να αναπαρασταθούν γεωμετρικά από μονοπάτια με βήματα $(1,1)$ για κάθε άσσο και $(1,-1)$ για κάθε μηδενικό. Τα μονοπάτια που προκύπτουν αρχίζουν από το σημείο $(0,0)$, περιέχουν $2n$ βήματα, τελειώνουν στο σημείο $(0,2n)$, δεν διέρχονται κάτω από τον οριζόντιο άξονα x και ονομάζονται **μονοπάτια Dyck** μήκους $2n$.



$\mathcal{D}_3$: Τα μονοπάτια Dyck μήκους 6

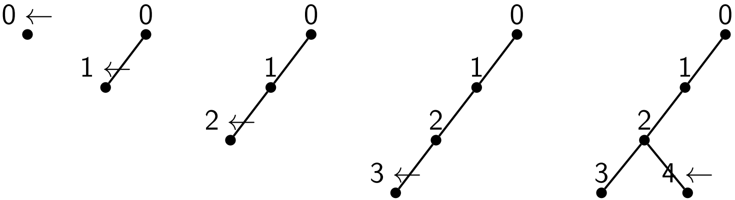
Σε κάθε λέξη Dyck α μήκους $2n$ αντιστοιχεί ένα δυαδικό δένδρο T με n κόμβους. Η εύρεση του δένδρου T (δηλαδή την αποκωδικοποίηση της λέξης Dyck α) μπορεί να γίνει ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία, η οποία κατασκευάζει βήμα–βήμα το αντίστοιχο δένδρο T' με τη βοήθεια ενός δείκτη:

1. Αρχικά το δένδρο T' αποτελείται μόνο από τον κόμβο ρίζα και ο δείκτης βρίσκεται στη ρίζα του δένδρου.
2. Διαβάζουμε τη λέξη Dyck α γράμμα–γράμμα (από τα αριστερά προς τα δεξιά). Όταν διαβάζουμε 1 τότε προσθέτουμε αριστερό παιδί στον κόμβο που βρίσκεται ο δείκτης και μεταφέρουμε τον δείκτη στο παιδί αυτό. Όταν διαβάζουμε 0 τότε προσθέτουμε δεξιό παιδί στον πλησιέστερο πρόγονο του κόμβου που βρίσκεται ο δείκτης και δεν έχει ήδη δεξιό παιδί, και μεταφέρουμε τον δείκτη στο παιδί αυτό.
3. Το δυαδικό δένδρο T προκύπτει σβήνοντας όλα τα φύλλα του δένδρου T'.

Παράδειγμα Για τη λέξη Dyck

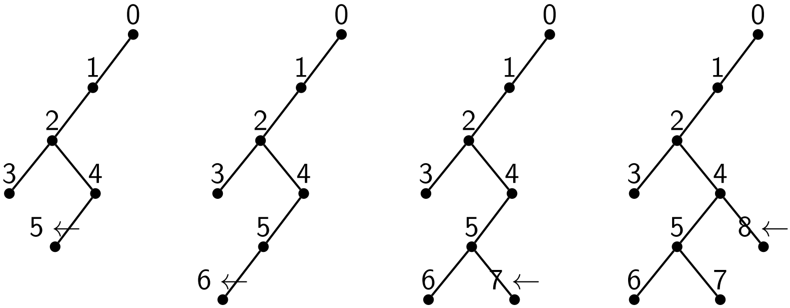
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0

έχουμε διαδοχικά τα δένδρα



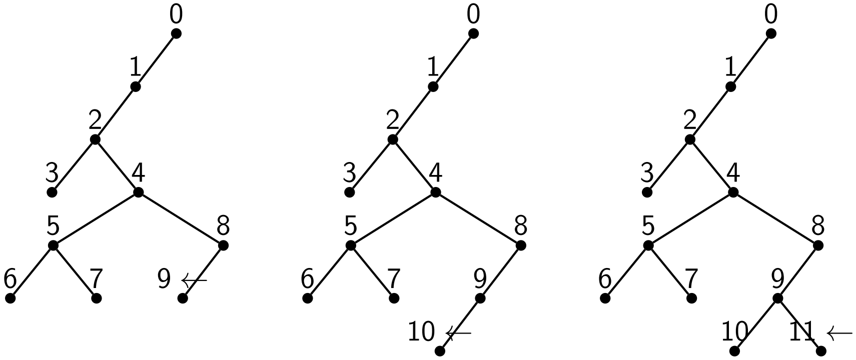
διαφάνεια 1 από 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0



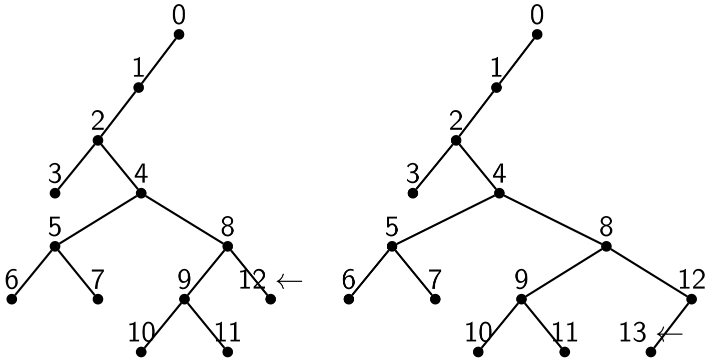
διαφάνεια 2 από 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0



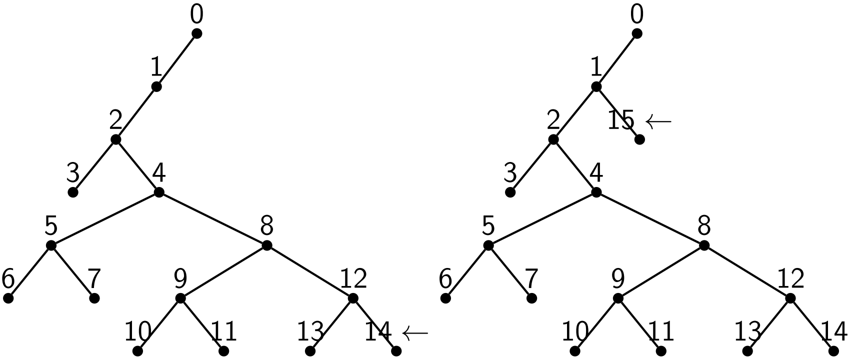
διαφάνεια 3 από 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0



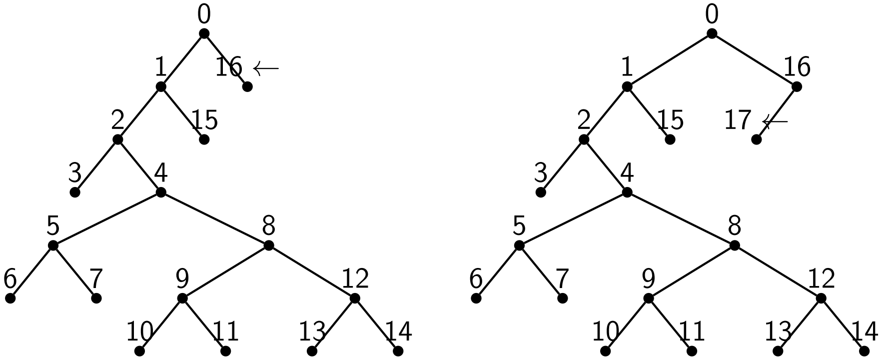
διαφάνεια 4 από 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0



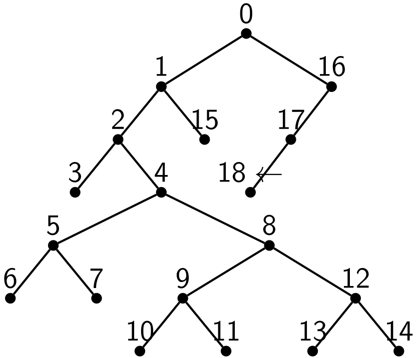
διαφάνεια 5 από 18

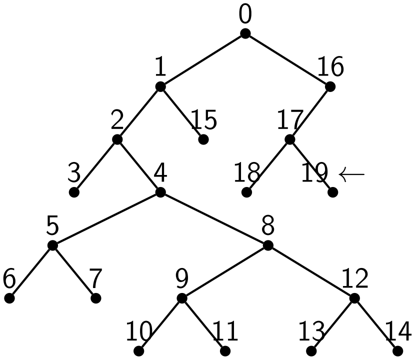
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0



διαφάνεια 6 από 18

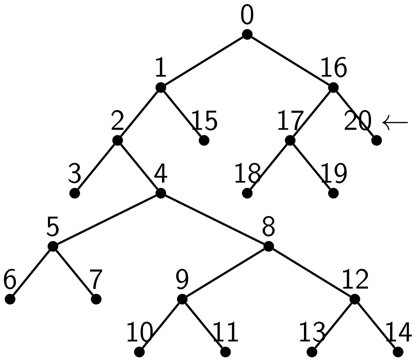
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0





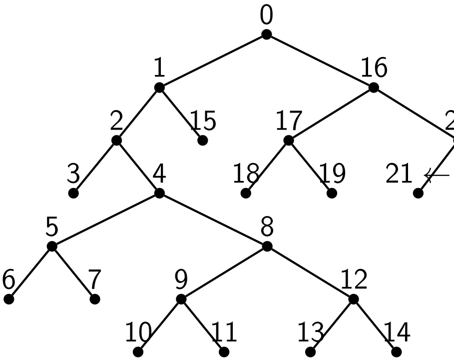
διαφάνεια 7 από 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0



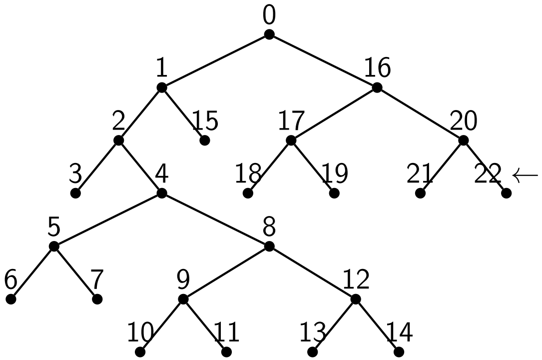
διαφάνεια 8 από 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0



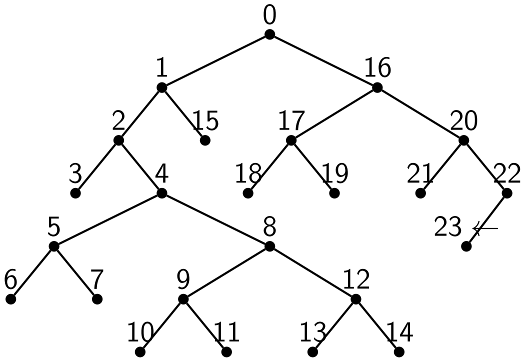
διαφάνεια 9 από 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0



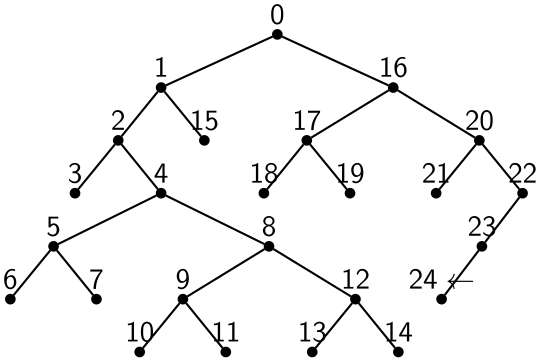
διαφάνεια 10 από 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0



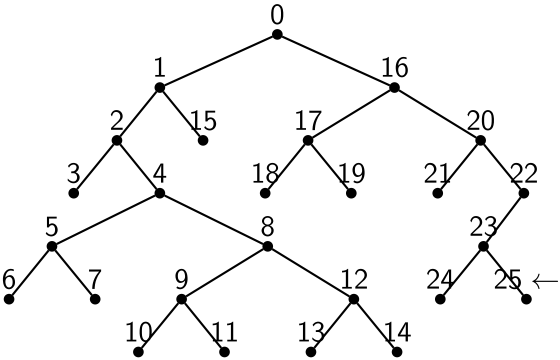
διαφάνεια 11 από 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0



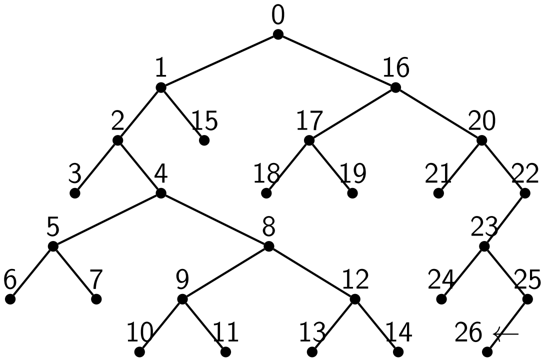
διαφάνεια 12 από 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0



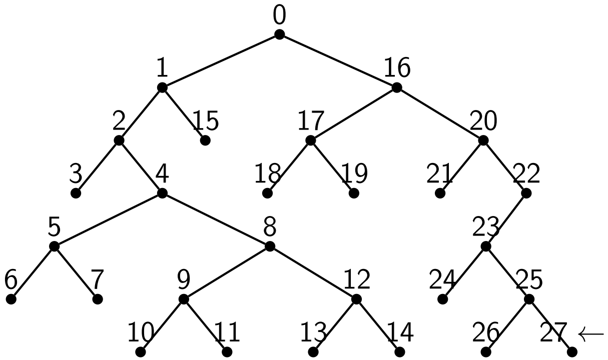
διαφάνεια 13 από 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0



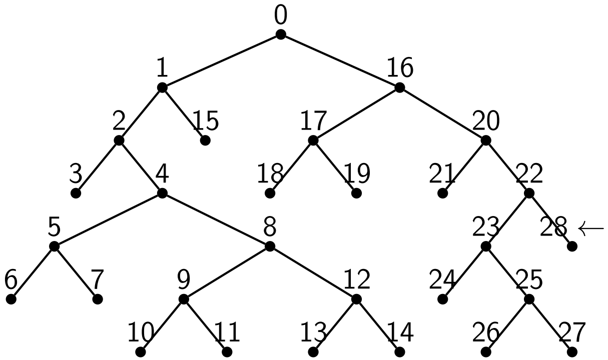
διαφάνεια 14 από 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0



διαφάνεια 15 από 18

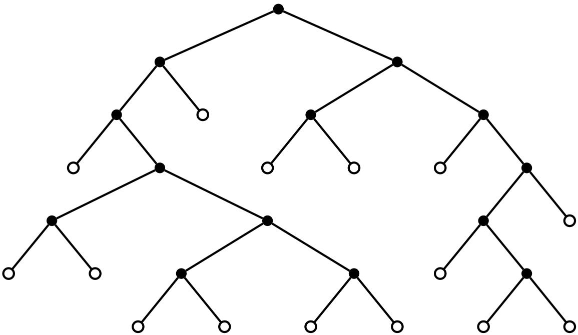
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0



διαφάνεια 16 από 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0

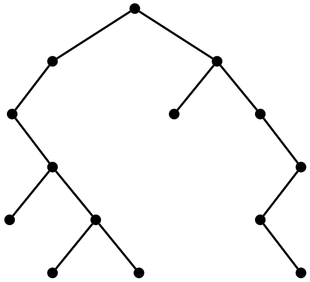
οπότε T' είναι το δένδρο:



διαφάνεια 17 από 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0

Το ζητούμενο δένδρο T προκύπτει σβήνοντας όλα τα φύλλα του δένδρου T' οπότε έχουμε το δένδρο T:



διαφάνεια 18 από 18

Από τις προηγούμενες κατασκευές μπορεί να αποδειχθεί η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1

Ο αριθμός των λέξεων Dyck μήκους $2n$ ισούται με τον n-στό αριθμό Catalan, δηλαδή $|\mathcal{D}_n| = C_n$.

Ο τύπος του Segner $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$, $C_0 = 1$ έχει το μειονέκτημα ότι στον υπολογισμό κάποιου όρου της ακολουθίας των αριθμών Catalan (C_n) απαιτείται η γνώση όλων των προηγούμενων όρων.

Τύπος για τους αριθμούς Catalan

Με τη βοήθεια των λέξεων Dyck μπορούμε να βρούμε (και να αποδείξουμε) ένα απλούστερο τύπο για τους αριθμούς Catalan.

Πρόταση 2

Ο n-οστός αριθμός Catalan C_n δίδεται από τον τύπο

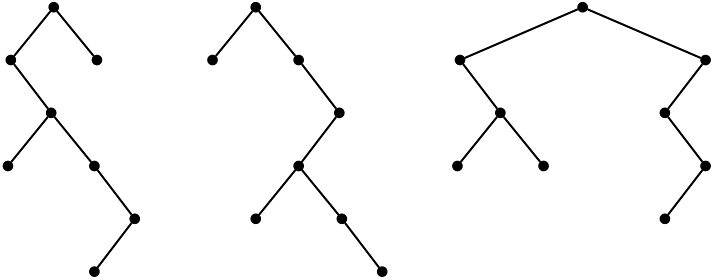
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Ασκήσεις προς επίλυση

- (*Δυαδικά δένδρα και λέξεις Dyck*) Να κωδικοποιηθούν όλα τα δυαδικά δένδρα με 4 κόμβους από την αντίστοιχη λέξη Dyck.
- (*Δυαδικά δένδρα και λέξεις Dyck*) Να βρεθούν τα δυαδικά δένδρα που κωδικοποιούνται από τις παρακάτω λέξεις Dyck:

1. 11001011110101100000.
2. 10111010010011001010.
3. 11010100110010101100.
4. 10101110101001100100.

- (*Δυαδικά δένδρα και λέξεις Dyck*) Να βρεθούν οι δυαδικές λέξεις Dyck που κωδικοποιούν τα παρακάτω δυαδικά δένδρα:



T_1 T_2 T_3

- (*Ρυθμός αύξησης αριθμών Catalan*) Να αποδειχθεί ότι για την ακολουθία των αριθμών Catalan ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{C_{n-1}} = 4.$$

- 1. Να δειχθεί ότι οι αριθμοί Catalan ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
C_2 &= 2C_1\\
C_3 &= 3C_2 - C_1\\
C_4 &= 4C_3 - 3C_2\\
C_5 &= 5C_4 - 6C_3 + C_2\\
C_6 &= 6C_5 - 10C_4 + 4C_3\\
C_7 &= 7C_6 - 15C_5 + 10C_4 - C_3
\end{aligned}$$

  2. Να δειχθεί ότι

$$C_n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n+1-k}{k} C_{n-k}.$$

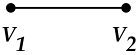
- Να δειχθεί ότι
$$C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 .$$
- Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι
$$(n-3)C_{n-2} = \frac{n}{2}\left(C_1 C_{n-3} + C_2 C_{n-4} + \cdots + C_{n-3} C_1\right).$$

2η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΑΡΙΘΜΟΙ

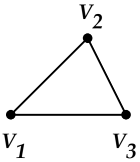
- Αριθμοί Catalan
  - **Τριγωνοποιήσεις κυρτού πολυγώνου**
  - **Υπολογισμός γινομένου**
  - **Διατεταγμένα δένδρα**

Τριγωνοποιήσεις κυρτού πολυγώνου

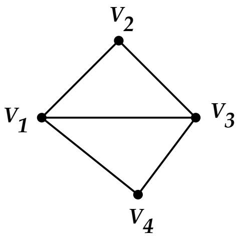
Τριγωνοποίηση ενός κυρτού πολυγώνου είναι η διαμέριση του σε τρίγωνα χρησιμοποιώντας μη τεμνόμενες διαγωνίους του.
Έστω T_n ο αριθμός των τριγωνοποίησεων ενός κυρτού πολυγώνου με $n+2$ κορυφές σε n τρίγωνα.
Παραδείγματα
$n = 0$ ($T_0 = 1$)

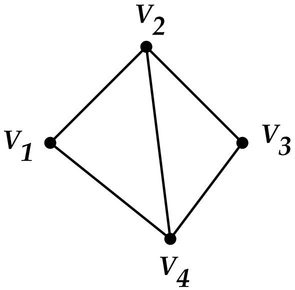


$n = 1$ ($T_1 = 1$)

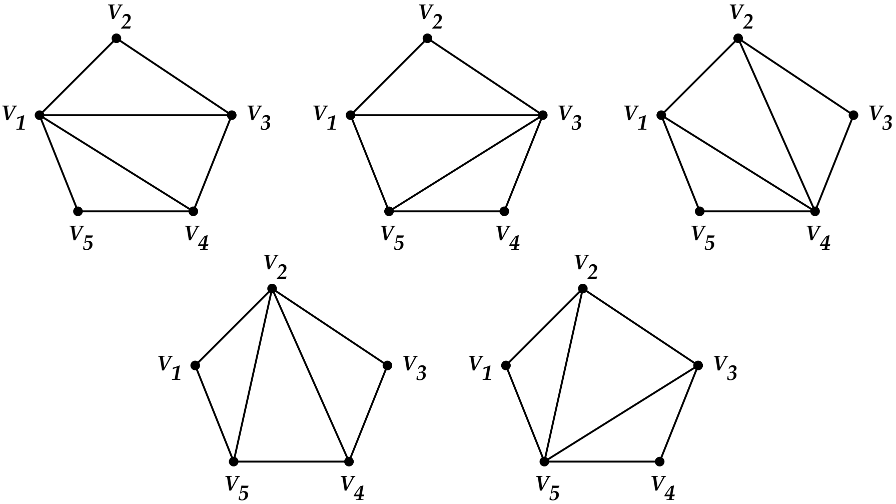


$n = 2$ ($T_2 = 2$)





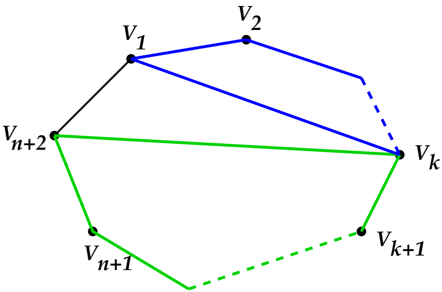
$n = 3$ ($T_3 = 5$)


v_1 v_2 v_3 v_4 v_5
v_1 v_2 v_3 v_4 v_5
v_1 v_2 v_3 v_4 v_5
v_1 v_2 v_3 v_4 v_5
v_1 v_2 v_3 v_4 v_5

Πρόταση 3

Ο αριθμός T_n των τριγωνοποίησεων ενός κυρτού πολυγώνου με $n+2$ κορυφές σε n τρίγωνα από μη τεμνόμενες διαγωνίους του είναι ίσος με C_n.

Απόδειξη. Έστω το πολύγωνο με κορυφές $V_1, V_2, \ldots, V_{n+2}$.



Για κάθε τριγωνοποίηση του πολυγώνου η πλευρά $V_1 V_{n+2}$ θα ανήκει σε μόνο ένα τρίγωνο της μορφής $V_1 V_{n+2} V_k$ όπου $k = 2, 3, \ldots, n + 1$.
Το τρίγωνο αυτό χωρίζει το αρχικό πολύγωνο σε δύο μικρότερα πολύγωνα με k και $n + 3 - k$ κορυφές αντίστοιχα.
Το πρώτο πολύγωνο τριγωνοποιείται με T_{k-2} τρόπους ενώ το δεύτερο με T_{n+1-k} τρόπους.

Έτσι σύμφωνα με τη πολλαπλασιαστική αρχή θα υπάρχουν $T_{k-2}T_{n+1-k}$ τριγωνοποιήσεις του αρχικού πολυγώνου στις οποίες εμφανίζεται το τρίγωνο $V_1 V_{n+1} V_k$ όπου $k = 2, 3, \ldots, n+1$. Κατόπιν τούτων ο αριθμός των τριγωνοποιήσεων του αρχικού πολυγώνου είναι

$$T_n = \sum_{k=2}^{n+1} T_{k-2} T_{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} T_k T_{n-1-k}$$

Επειδή η ακολουθία (T_n) ικανοποιεί την αναγωγική εξίσωση του Segner και $T_0 = T_1 = 1$ έπεται ότι

$$T_n = C_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Υπολογισμός γινομένου

Θα δειχθεί ότι ο αριθμός P_n, $n \in \mathbb{N}$, των τρόπων υπολογισμού του γινομένου

$$y_n = x_0 \; x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_{n-1} x_n$$

με τη βοήθεια παρενθέσεων που περιέχουν ζεύγη συνεχόμενων παραγόντων είναι ίσος με C_n.
Προφανώς, $P_0 = 1, P_1 = 1$.
Το γινόμενο

$$y_2 = x_0 \; x_1 \; x_2$$

υπολογίζεται με δύο διαφορετικούς τρόπους

$$(x_0 \; x_1) \; x_2 \;\; \text{και} \;\; x_0 \; (x_1 \; x_2)$$

Άρα $P_2 = 2$.

Το γινόμενο

$$y_3 = x_0\ x_1\ x_2\ x_3$$

υπολογίζεται με πέντε διαφορετικούς τρόπους

$$x_0(x_1(x_2\ x_3)), \quad x_0((x_1\ x_2)x_3),$$

$$(x_0\ x_1)(x_2\ x_3), \quad (x_0(x_1\ x_2))x_3,$$

$$((x_0\ x_1)x_2)x_3$$

Άρα $P_3 = 5$.

Για να αποδειχθεί ότι $P_n = C_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αρκεί να δειχθεί ότι η ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί την αναγωγική εξίσωση του Segner. Για το σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι ο τελευταίος πολλαπλασιασμός με τον οποίο τελειώνει ο υπολογισμός του γινομένου είναι

$$y_n = y_k y_{n-k-1}$$

όπου

$$y_k = x_0 \; x_1 \; \cdots \; x_k \text{ και } y_{n-k-1} = x_{k+1} \; x_{k+2} \; \cdots \; x_n$$

με $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
Ο αριθμός των τρόπων υπολογισμού των γινομένων y_k και y_{n-k-1} είναι P_k και P_{n-k-1} αντίστοιχα.
Τότε σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή ο αριθμός των τρόπων υπολογισμού των y_k και y_{n-k-1} είναι $P_k P_{n-k-1}$.
Αθροίζοντας για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ προκύπτει ότι

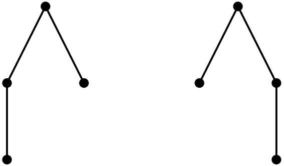
$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} P_k P_{n-k-1}.$$

οπότε η ακολουθία P_n ικανοποιεί την σχέση του Segner και επομένως $P_n = C_n$.

Διατεταγμένα δένδρα

Ένα δένδρο με ρίζα ονομάζεται **διατεταγμένο** όταν τα παιδιά κάθε κόμβου του έχουν καθορισμένη σειρά.
(Στην περίπτωση αυτή το δένδρο απεικονίζεται έτσι ώστε αν ένα παιδί προηγείται κάποιου άλλου να βρίσκεται στα αριστερά του.)

Παράδειγμα Τα παρακάτω διατεταγμένα δένδρα



δεν είναι ισόμορφα, δηλαδή είναι διαφορετικά.

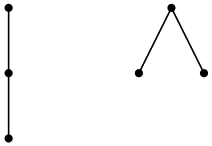
Έστω $\mathcal{T}_n$, όπου $n \in \mathbb{N}$, είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς.

Παραδείγματα

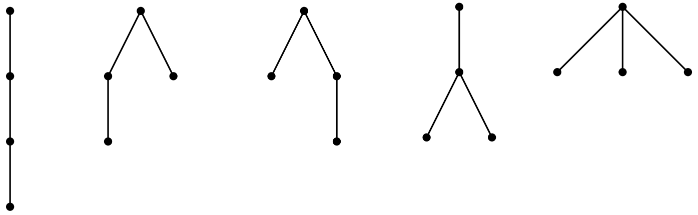
$\mathcal{T}_0$

$\mathcal{T}_1$

$\mathcal{T}_2$



$\mathcal{T}_3$



Προφανώς ισχύει ότι $|\mathcal{T}_0| = 1 = C_0$, $|\mathcal{T}_1| = 1 = C_1$, $|\mathcal{T}_2| = 2 = C_2$, $|\mathcal{T}_3| = 5 = C_3$. $|\mathcal{T}_4| = 14 = C_4$.

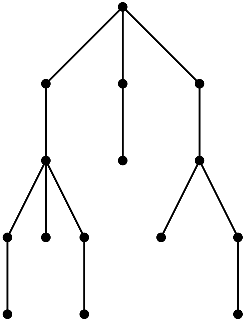
Πρόταση 4

Ο αριθμός των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς ισούται με τον n-οστό αριθμό Catalan, δηλαδή $|\mathcal{T}_n| = C_n$.

Απόδειξη. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ορίζουμε

$$\mathcal{T}_{n,k} = \{T \in \mathcal{T}_n : \text{ το πρώτο δένδρο-παιδί του T έχει } k \text{ δεσμούς}\}$$

Παράδειγμα

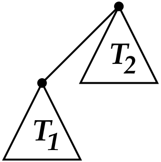


$T \in \mathcal{T}_{14,6}$

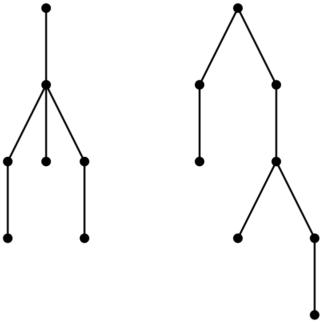
Προφανώς τα σύνολα $\mathcal{T}_{n,k}$, όπου $k = 0, 1, \ldots, n-1$, αποτελούν μια διαμέριση του συνόλου $\mathcal{T}_n$ οπότε ισχύει ότι

$$|\mathcal{T}_n| = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{T}_{n,k}| \tag{1}$$

Επιπλέον κάθε $T \in \mathcal{T}_{n,k}$ ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από τα δένδρα $T_1 \in \mathcal{T}_k$ και $\mathcal{T}_2 \in T_{n-k-1}$.



Παράδειγμα Για το δένδρο T του παραπάνω παραδείγματος έχουμε



$$T_1 \in \mathcal{T}_6 \qquad\qquad T_2 \in \mathcal{T}_7.$$

Άρα

$$|\mathcal{T}_{n,k}| = |\mathcal{T}_k||\mathcal{T}_{n-k-1}| \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$|\mathcal{T}_n| = \sum_{k=0}^{n-1} |\mathcal{T}_k||\mathcal{T}_{n-k-1}|$$

οπότε η ακολουθία $|\mathcal{T}_n|$ ικανοποιεί τη σχέση του Segner και επομένως $|\mathcal{T}_n| = C_n$.

Ασκήσεις προς επίλυση

- (*Κυρίαρχες ακολουθίες*) Να δειχθεί ότι ο αριθμός S_n των διατεταγμένων n-άδων από μη αρνητικούς φυσικούς a_1, a_2, …, a_n για τους οποίους
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$$
και
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq k, \text{ για κάθε } k \leq n,$$
ισούται με C_n.
- Να βρεθεί ο αριθμός των διατεταγμένων n-άδων ακεραίων a_1, a_2, …, a_n για τους οποίους ισχύει ότι
$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$$
και
$$a_1 \leq 1,\ a_2 \leq 2,\ \ldots,\ a_n \leq n.$$

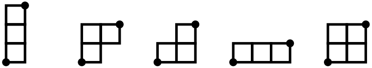
- (*Μη τεμνόμενες χορδές*) Να δειχθεί ότι ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους n μη τεμνόμενες χορδές ενώνουν $2n$ σημεία τα οποία βρίσκονται στην περιφέρεια ενός κύκλου ισούται με C_n.
- (*Μεταθέσεις που αποφεύγουν το* 123) Να δειχθεί ότι ο αριθμός των μεταθέσεων σ του $[n]$ για τις οποίες δεν υπάρχουν δείκτες i, j, k με $i < j < k$ και $\sigma(i) < \sigma(k) < \sigma(j)$ ισούται με C_n.

- Να βρεθεί ο αριθμός των παραλληλόγραμμων πολυόμινων με περίμετρο n.

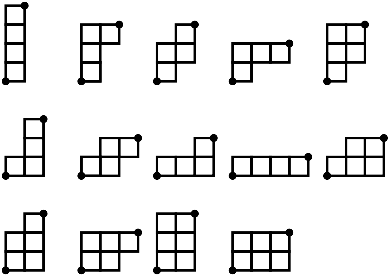
$n = 4$

$n = 6$

$n = 8$



$n = 10$



3η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΑΡΙΘΜΟΙ

- **Αριθμοί Catalan**
  - **Αριθμοί Narayana και Riordan**

Κάθε ένα από τα σύνολα συνδυαστικών αντικείμενων που απαριθμούνται από τον n-οστό αριθμό Catalan C_n, όπως για παράδειγμα τα δυαδικά δένδρα με n κορυφές, τα διατεταγμένα δένδρα με n δεσμούς, οι τριγωνοποιήσεις ενός $(n+2)$-πολυγώνου και οι λέξεις Dyck μήκους $2n$, μπορεί να διαμεριστεί σε υποσύνολα με βάση ένα δεύτερο χαρακτηριστικό τους.
Για παράδειγμα, το σύνολο $\mathcal{T}_n$ των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς μπορεί να διαμερισθεί σε υποσύνολα με βάση τον αριθμό k των φύλλων που έχει κάθε δένδρο, ή με βάση τον βαθμό k της ρίζας του δένδρου. Τα υποσύνολα που ορίζουν οι αντίστοιχες διαμερίσεις απαριθμούνται από διπλές ακολουθίες αριθμών $a_{n,k}$ οι οποίες εμφανίζονται σε πολλά προβλήματα απαρίθμησης, ιδιαίτερα σε προβλήματα όπου εμφανίζονται αντικείμενα που απαριθμούνται από τους αριθμούς Catalan.

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται δύο τέτοιες ακολουθίες: οι αριθμοί Narayana και οι αριθμοί Riordan. Με την βοήθεια αυτών θα μετρήσουμε τα διατεταγμένα δένδρα που έχουν n κορυφές και συγκεκριμένο αριθμό φύλλων ή/και συγκεκριμένο βαθμό ρίζας. Οι αποδείξεις των τύπων θα γίνουν στο κεφάλαιο των γεννητριών συναρτήσεων.

Αριθμοί Narayana

Οι αριθμοί Narayana $N(n, k)$, όπου $n, k \in \mathbb{N}^*$ με $k \leq n$, ορίζονται με τη βοήθεια των διωνυμικών συντελεστων:

$$N(n,k) = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n-1}{k-1}$$
$$= \binom{n-1}{k-1}\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k-1}\binom{n}{k}$$

Ο παρακάτω τριγωνικός πίνακας δίνει ορισμένες τιμές των αριθμών Narayana.

n/k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	6	6	1		
5	1	10	20	10	1	
6	1	15	50	50	15	1

Αριθμοί Riordan

Οι αριθμοί Riordan $R(n,k)$, όπου $n,k \in \mathbb{N}^*$ με $k \leq n$, ορίζονται με τη βοήθεια των διωνυμικών συντελεστών:

$$R(n,k) = \frac{k}{n}\binom{2n-k-1}{n-1} = \frac{k}{2n-k}\binom{2n-k}{n}$$
$$= \binom{2n-k-1}{n-1} - \binom{2n-k-1}{n}$$

Ο παρακάτω τριγωνικός πίνακας δίνει ορισμένες τιμές των αριθμών Riordan.

n/k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	2	2	1			
4	5	5	3	1		
5	14	14	9	4	1	
6	42	42	28	14	5	1

Πρόταση 5

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ *ισχύει ότι* $\sum_{k=1}^{n} N(n,k) = \sum_{k=1}^{n} R(n,k) = C_n$.

Μια συνδυαστική ερμηνεία των δύο αυτών ακολουθιών είναι η επόμενη:

Πρόταση 6

Για κάθε $n, k \in \mathbb{N}^*$ με $k \leq n$ ισχύουν

1. *Το πλήθος όλων των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς και k φύλλα είναι ίσο με $N(n, k)$.*
2. *Το πλήθος όλων των διατεταγμένων δένδρων με n δεσμούς και βαθμό ρίζας ίσο με k είναι ίσο με $R(n, k)$.*

Να υπολογιστεί το πλήθος όλων των διατεταγμένων δένδρων

α) με 4 δεσμούς

β) με 4 δεσμούς και 2 φύλλα

γ) με 4 δεσμούς και βαθμό ρίζας 2

Λύση

α) Ο ζητούμενος αριθμός είναι ίσος με

$$C_4 = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 14.$$

β) Ο ζητούμενος αριθμός είναι ίσος με

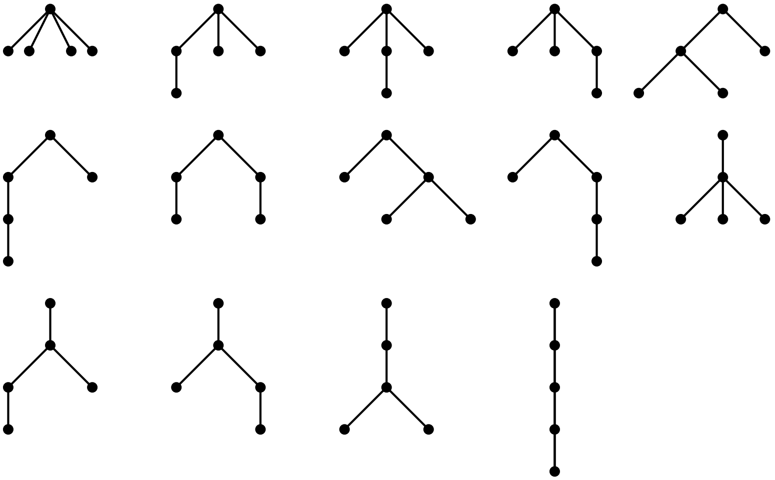
$$N(4,2) = \frac{1}{4}\binom{4}{2}\binom{4}{1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6.$$

γ) Ο ζητούμενος αριθμός είναι ίσος με

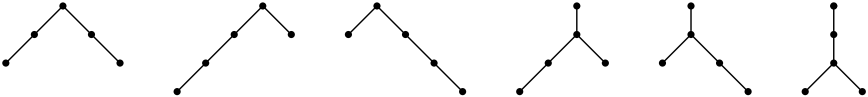
$$R(4,2) = \frac{2}{4}\binom{2 \cdot 4 - 2 - 1}{4 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \binom{5}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 5.$$

Τα διατεταγμένα δένδρα που απαριθμούνται στα α), β) και γ) είναι αντίστοιχα τα εξής:

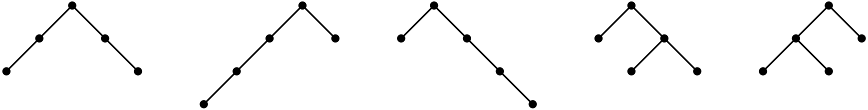
α)



β)

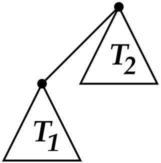


γ)



Να υπολογιστεί το πλήθος όλων των διατεταγμένων δένδρων με 7 δεσμούς που το πρώτο υποδένδρο της ρίζας έχει 3 φύλλα.

Λύση. Έστω T ένα διατεταγμένο δένδρο με $s(T) = 7$ και με το πρώτο υποδένδρο της ρίζας του να έχει 3 φύλλα. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση



προκύπτει ότι το T_2 είναι ένα οποιοδήποτε διατεταγμένο δένδρο ενώ το T_1 πρέπει να έχει 3 φύλλα. Επιπλέον ισχύουν

$$3 \leq s(T_1) \qquad \text{και} \qquad s(T_1) + s(T_2) = 6.$$

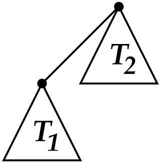
Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. $s(T_1) = 3$ και $s(T_2) = 3$.
   Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν C_3 στο πλήθος T_2 και $N(3,3)$ T_1, οπότε τελικά $C_3 \cdot N(3,3)$ το πλήθος T.
2. $s(T_1) = 4$ και $s(T_2) = 2$.
   Εδώ υπάρχουν C_2 στο πλήθος T_2 και $N(4,3)$ στο πλήθος T_1, οπότε τελικά $C_2 \cdot N(4,3)$ το πλήθος T.
3. $s(T_1) = 5$ και $s(T_2) = 1$.
   Εδώ υπάρχουν C_1 στο πλήθος T_2 και $N(5,3)$ στο πλήθος T_1, οπότε τελικά $C_1 \cdot N(5,3)$ το πλήθος T.
4. $s(T_1) = 6$ και $s(T_2) = 0$.
   Εδώ υπάρχουν C_0 στο πλήθος T_2 και $N(6,3)$ στο πλήθος T_1, οπότε τελικά $C_0 \cdot N(6,3)$ το πλήθος T.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με
$C_3 \cdot N(3,3) + C_2 \cdot N(4,3) + C_1 \cdot N(5,3) + C_0 \cdot N(6,3) =$
$5 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 20 + 1 \cdot 50 = 87.$

Να υπολογισθεί το πλήθος όλων των διατεταγμένων δένδρων με 12 δεσμούς που έχει βαθμό ρίζας 6 και το πρώτο υποδένδρο του έχει 4 φύλλα.

Λύση Έστω T ένα διατεταγμένο δένδρο με $s(T) = 12$ που έχει βαθμό ρίζας 6 και το πρώτο υποδένδρο έχει 4 φύλλα. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση



προκύπτει ότι το T_2 έχει βαθμο ρίζας 5 ενώ το T_1 έχει 4 φυλλα. Επιπλέον ισχύουν

$$4 \leq s(T_1), \quad 5 \leq s(T_2) \text{ και } s(T_1) + s(T_2) = 11$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. $s(T_1) = \mathbf{4}$, $s(T_2) = \mathbf{7}$
   Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν
   $N(4,4) = 1\ T_1$ και $R(7,5) = \frac{5}{7}\binom{2\cdot 7-5-1}{7-1} = \frac{5}{7}\binom{8}{6} = 20\ T_2$
   οπότε τελικά υπάρχουν 20 δένδρα T.
2. $s(T_1) = \mathbf{5}$, $s(T_2) = \mathbf{6}$
   Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν
   $N(5,4) = 10\ T_1$ και $R(6,5) = \frac{5}{6}\binom{2\cdot 6-5-1}{6-1} = \frac{5}{6}\binom{6}{5} = 5\ T_2$
   οπότε τελικά υπάρχουν 50 δένδρα T.
3. $s(T_1) = \mathbf{6}$, $s(T_2) = \mathbf{5}$
   Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν
   $N(6,4) = 50\ T_1$ και $R(5,5) = \frac{5}{5}\binom{2\cdot 5-5-1}{5-1} = 1\ T_2$
   οπότε τελικά υπάρχουν 50 δένδρα T.

Συνολικά υπάρχουν $20 + 50 + 50 = 120$ δένδρα T.

Με την βοήθεια των αριθμών Narayana και Riordan μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέσο αριθμό φύλλων και τον μέσο βαθμό ρίζας σε ένα διατεταγμένο δένδρο με n δεσμούς.

Πρόταση 7

Ο μέσος αριθμός φύλλων και ο μέσος βαθμός ρίζας σε ένα διατεταγμένο δένδρο με n δεσμούς ισούται με $\dfrac{n+1}{2}$ και $\dfrac{3n+2}{n+2}$ αντίστοιχα.

Απόδειξη. Ο μέσος αριθμός φύλλων ℓ_n σε ένα διατεταγμένο δένδρο με n δεσμούς ισούται με

$$\ell_n = \frac{\text{συνολικός αριθμός φύλλων σε όλα τα διατεταγμένα δένδρα με } n \text{ δεσμούς}}{\text{αριθμός διατεταγμένων δένδρων με } n \text{ δεσμούς}}$$

$$= \frac{1}{C_n}\sum_{k=1}^{n} kN(n,k) = \frac{1}{C_n}\sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n-1}{k-1}$$

$$= \frac{1}{C_n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\binom{n-1}{k-1} = \frac{1}{C_n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{n-1}{k}$$

$$= \frac{1}{C_n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{n-1}{n-1-k}$$

Από τον τύπο του Cauchy $\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$ προκύπτει ότι

$$\ell_n = \frac{1}{C_n}\binom{n-1+n}{n-1} = \frac{1}{C_n}\binom{2n-1}{n-1} = \frac{n!(n+1)!}{(2n)!}\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} = \frac{n+1}{2}$$

Ο μέσος βαθμός ρίζας r_n σε ένα διατεταγμένο δένδρο με n δεσμούς ισούται με

$$r_n = \frac{\text{άθροισμα βαθμών ρίζας για όλα τα διαταταγμένα δένδρα με } n \text{ δεσμούς}}{\text{αριθμός διατεταγμένων δένδρων με } n \text{ δεσμούς}}$$

$$= \frac{1}{C_n} \sum_{k=1}^{n} kR(n,k) \overset{1}{=} \frac{1}{C_n}\left(C_{n+1} - C_n\right) = \frac{C_{n+1}}{C_n} - 1$$

$$= \frac{2(2n+1)}{n+2} - 1 = \frac{3n+2}{n+2}$$

[1]Μετά από πράξεις.

4η ΔΙΑΛΕΞΗ
ΑΡΙΘΜΟΙ

- **Αριθμοί Bell**
- **Αριθμοί Stirling**
  - **Αριθμοί Stirling δευτέρου είδους**

Αριθμοί Bell

Ο αριθμός των διαμερίσεων ενός συνόλου E με n στοιχεία ονομάζεται **αριθμός Bell** και συμβολίζεται με B_n.

Συνήθως, επιλέγουμε για E με $|E| = n$, το σύνολο $[n]$.

Παραδείγματα

Οι διαμερίσεις του $[1]$ είναι η $\{1\}$, οπότε $B_1 = 1$.
Οι διαμερίσεις του $[2]$ είναι οι εξής: $\{1\}, \{2\}$ και $\{1, 2\}$, οπότε $B_2 = 2$.
Οι διαμερίσεις του $[3]$ είναι οι εξής:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\} \quad \{1, 2\}, \{3\} \quad \{1, 3\}, \{2\} \quad \{1\}, \{2, 3\} \quad \{1, 2, 3\},$$

οπότε $B_3 = 5$.
Επίσης θεωρούμε ότι το κενό σύνολο έχει μια (κενή) διαμέριση, οπότε $B_0 = 1$.

Προφανώς ισχύει ότι

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{S}(n,k), \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Επιπλέον,

Πρόταση 8

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η αναγωγική εξίσωση

$$B_{n+1} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_\nu \text{ όπου } B_0 = 1.$$

Απόδειξη. Θα δοθούν δύο αποδείξεις, η πρώτη είναι συνδυαστική και η δεύτερη είναι αλγεβρική και χρησιμοποιεί την αναγωγική σχέση των αριθμών Stirling δευτέρου είδους.

(1ος τρόπος: Συνδυαστική απόδειξη.) Η βασική ιδέα της απόδειξης είναι ότι οι διαμερίσεις του $[n+1]$ διαμερίζονται ως προς το μέγεθος του υποσυνόλου το οποίο περιέχει το στοιχείο $n+1$.
Έστω $\mathcal{A}_{n+1,k}$ το σύνολο των διαμερίσεων του $[n+1]$ στις οποίες το υποσύνολο που περιέχει το στοιχείο $n+1$ έχει μέγεθος k.
Τα σύνολα $\mathcal{A}_{n+1,1}$, $\mathcal{A}_{n+1,2}$, ..., $\mathcal{A}_{n+1,n+1}$ αποτελούν μια διαμέριση του συνόλου των διαμερίσεων του $[n+1]$.
Επομένως,

$$B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} |\mathcal{A}_{n+1,k}|.$$

Επιπλέον, ισχύει ότι ο αριθμός των διαμερίσεων του συνόλου $\mathcal{A}_{n+1,k}$ είναι ίσος με $\binom{n}{k-1} B_{n-k+1}$. Πράγματι, για κάθε διαμέριση του $\mathcal{A}_{n+1,k}$ υπάρχουν $\binom{n}{k-1}$ τρόποι για να επιλέξουμε τα $k-1$ στοιχεία του $[n]$ που βρίσκονται στο ίδιο υποσύνολο με το $n+1$ και για τα υπόλοιπα $n-k+1$ στοιχεία του $[n]$ υπάρχουν B_{n-k+1} τρόποι καθορισμού των υπολοίπων υποσύνολων της διαμέρισης. Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει ότι

$$|\mathcal{A}_{n+1,k}| = \binom{n}{k-1} B_{n-k+1}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι

$$B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} B_{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} \stackrel{2}{=} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{n-\nu} B_{\nu}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_{\nu}.$$

[2] Θέτουμε $\nu = n - k$.

(2ος τρόπος: Αλγεβρική απόδειξη.)

$$B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \overline{S}(n+1,k) = \sum_{k=0}^{n} \overline{S}(n+1,k+1) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\nu=k}^{n} \binom{n}{\nu} \overline{S}(\nu,k)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{n}{\nu} \overline{S}(\nu,k) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left(\sum_{k=0}^{\nu} \overline{S}(\nu,k) \right) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_\nu$$

Με τη βοήθεια της αναγωγικής σχέσης

$$B_{n+1} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B_\nu \text{ όπου } B_0 = 1.$$

μπορούμε να υπολογίσουμε μερικούς από τους πρώτους όρους της ακολουθίας B_n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975	678570	4213

Πρακτικά, ο υπολογισμός του *n*-οστού αριθμού Bell γίνεται επαναληπτικά αποθηκεύοντας κάθε φορά όλους τους προηγούμενους όρους της ακολουθίας, όπως στο επόμενο πρόγραμμα.

```
#used for computing bell(n)
def binomial(n, k):
    if not 0 <= k <= n:
        return 0
    b = 1
    for t in range(min(k, n-k)):
        b *= n
        b //= t+1
        n -= 1
    return b

#bellnums stores the previous values of bell(n)
#initially it contains the value bell(0) = 1
bellnums = [1]
```

```python
# bell(n) = sum_{k=1}^{n-1} binom{n-1}{k-1} bell(n-k), n > 0
#         = sum_{k=1}^{n-1} binom{n-1}{n-k-1} bell(k), n > 0
# bell(0) = 1
def bell(n):
    #In order to find bell(n) we need to first
    #compute bell(1), bell(2), ... bell(n-1).
    #To avoid repetitions in computations
    #we will use the stored values of bellnums
    for j in range(1,n+1):
        #compute bell(j) from bell(0)...bell(j-1)
        #that are already computed in bellnums
        result = 0
        for k in range(j):
            result += (binomial(j-1,j-k-1)*bellnums[k])
        #append bell(j) in bellnums
        bellnums.append(result)
    return bellnums[-1]

n = 30
print("The ",n,"-th Bell number:",bell(n))
print("The computed list of all Bell numbers used for",
      "evaluating the result:",bellnums)
```

Output:

```
The  30 -th Bell number: 846749014511809332450147
The computed list of all Bell numbers used for evaluating the
   result: [1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975,
   678570, 4213597, 27644437, 190899322, 1382958545, 10480142147,
   82864869804, 682076806159, 5832742205057, 51724158235372,
   474869816156751, 4506715738447323, 44152005855084346,
   445958869294805289, 4638590332229999353, 49631246523618756274,
   545717047936059989389, 6160539404599934652455,
   71339801938860275191172, 846749014511809332450147]
```

Πράγματι, υπάρχουν 15 τρόποι να διαμερίσουμε το σύνολο [4]:

{1},{2},{3},{**4**}	{1,2},{3},{**4**}	{1,3},{2},{**4**}	{1},{2,3},{**4**}
{1,2,3},{**4**}	{1},{2},{**3,4**}	{1,2},{**3,4**}	{1},{**2,4**},{3}
{1,3},{**2,4**}	{**1,4**},{2},{3}	{**1,4**},{2,3}	{1},{**2,3,4**}
{**1,3,4**},{2}	{**1,2,4**},{3}	{**1,2,3,4**}	

ή, με ισοδύναμη γραφή

1/2/3/4	12/3/4	13/2/4	1/23/4
123/4	1/2/34	12/34	1/24/3
13/24	14/2/3	14/23	1/234
134/2	124/3	1234	

(Σημείωση: Με τον συμβολισμό 1/234 αναπαριστούμε την διαμέριση του [4] στα υποσύνολα $\{1\}$ και $\{2,3,4\}$.)

Σύμφωνα με τον D. Knuth ένας από τους βολικότερους τρόπους αναπαράστασης μιας διαμέρισης του $[n]$ είναι από μια **ακολουθία με περιορισμούς αύξησης** (restricted growth string). Συγκεκριμένα, από μια πεπερασμένη ακολουθία $a_1 a_2 \cdots a_n$ για την οποία

$$a_1 = 0 \text{ και } a_{j+1} \leq 1 + \max\{a_1, a_2, \ldots, a_j\}, \text{ όπου } 1 \leq j < n$$

Στην αναπαράσταση αυτή τα υποσύνολα μιας διαμέρισης αριθμούνται σε αύξουσα σειρά με βάση το μικρότερο στοιχείο τους (αρχίζουμε την αρίθμηση των υποσυνόλων από το 0) και για το στοιχείο i του $[n]$ σημειώνουμε με a_i το υποσύνολο της διαμέρισης στο οποίο ανήκει το i. (Το στοιχείο 1 πάντα ανήκει στο πρώτο υποσύνολο).
Για παράδειγμα, η διαμέριση 1257 10/469/38 του [10] κωδικοποιείται από την ακολουθία

$$0012020120$$

Η συνθήκη $a_{j+1} \leq 1 + \max\{a_1, a_2, \ldots, a_j\}$ σημαίνει ότι το στοιχείο $j+1$ μπορεί να τοποθετηθεί είτε σε κάποιο από τα προηγούμενα υποσύνολα, είτε σε νέο υποσύνολο που θα έχει αρίθμηση αυξημένη κατά ένα σε σχέση με την αρίθμηση του τελευταίου υποσυνόλου που ανήκουν τα στοιχεία του $[i]$.

Με αυτή την κωδικοποίηση οι παραπάνω 15 διαφορετικές διαμερίσεις του [4] γράφονται αντίστοιχα ως εξής:

0123	0012	0102	0112
0001	0122	0011	0121
0101	0120	0110	0111
0100	0010	0000	

Αριθμοί Stirling δευτέρου είδους

Υπενθυμίζουμε ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού $p(x)$ βαθμού n γράφεται ως **γραμμικός συνδυασμός** των παραγοντικών πολυωνύμων $F_0(x), F_1(x), \ldots, F_n(x)$.
Οι συντελεστές του $p(x) = x^n$ στο ανάπτυγμα αυτό ονομάζονται **αριθμοί Stirling δευτέρου είδους** και συμβολίζονται με $\overline{S}(n, k)$. Δηλαδή, ισχύει ότι

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \overline{S}(n, k) F_k(x).$$

Προφανώς, ισχύει ότι

$$\overline{S}(n, k) = 0, \text{ όταν } k > n,$$
$$\overline{S}(n, 1) = \overline{S}(n, n) = 1 \text{ και } \overline{S}(n, 0) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Παραδείγματα

1. $x = F_1(x)$.
   Άρα, $\overline{S}(1,1) = 1$.
2. $x^2 = F_2(x) + F_1(x)$.
   Άρα, $\overline{S}(2,2) = 1$, $\overline{S}(2,1) = 1$.
3. $x^3 = F_3(x) + 3F_2(x) + F_1(x)$,
   Άρα, $\overline{S}(3,3) = 1$, $\overline{S}(3,2) = 3$, $\overline{S}(3,1) = 1$.
4. $x^4 = F_4(x) + 6F_3(x) + 7F_2(x) + F_1(x)$.
   Άρα, $\overline{S}(4,4) = 1$, $\overline{S}(4,3) = 6$, $\overline{S}(4,2) = 7$, $\overline{S}(4,1) = 1$.
5. $x^5 = F_5(x) + 10F_4(x) + 25F_3(x) + 15F_2(x) + F_1(x)$.
   Άρα, $\overline{S}(5,5) = 1$, $\overline{S}(5,4) = 10$, $\overline{S}(5,3) = 25$, $\overline{S}(5,2) = 15$, $\overline{S}(5,1) = 1$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Gregory

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k p(0)}{k!} F_k(x)$$

για το $p(x) = x^n$, προκύπτει ότι

$$\overline{S}(n,k) = \frac{(\Delta^k x^n)(0)}{k!}$$

για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

Παράδειγμα Ζητείται το $\overline{S}(6,4)$.

x	x^6	Δx^6	$\Delta^2 x^6$	$\Delta^3 x^6$	$\Delta^4 x^6$
4	4096				
3	729	3367			
2	64	665	2702		
1	1	63	602	2100	
0	0	1	62	540	1560

$$\overline{S}(6,4) = \frac{(\Delta^4 x^6)(0)}{4!} = \frac{1560}{24} = 65.$$

Αναγωγικές εξισώσεις για τους αριθμούς Stirling δευτέρου είδους

Πρόταση 9 (Τριγωνική αναγωγική εξίσωση)

Ισχύει ότι

$$\overline{S}(n,k) = \overline{S}(n-1,k-1) + k\overline{S}(n-1,k)$$

για κάθε $k \in [n]$ *και* $n \in \mathbb{N}^*$.

Παράδειγμα

$$\overline{S}(6,4) = \overline{S}(5,3) + 4\overline{S}(5,4) = 25 + 4 \cdot 10 = 65.$$

Απόδειξη. Ισχύουν ισοδύναμα οι σχέσεις:

$$x^n = x x^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{S}(n,k) F_k(x) = x \sum_{k=0}^{n-1} \overline{S}(n-1,k) F_k(x)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \overline{S}(n,k) F_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{S}(n-1,k) \left(F_{k+1}(x) + kF_k(x)\right)$$

(αφού $F_{k+1}(x) = x(x-1)\cdots(x-k+1)(x-k) = (x-k)F_k(x) = xF_k(x) - kF_k(x)$)

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{S}(n,k)F_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{S}(n-1,k)F_{k+1}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} k\overline{S}(n-1,k)F_k(x)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{S}(n,k)F_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \overline{S}(n-1,k-1)F_k(x) + \sum_{k=1}^{n} k\overline{S}(n-1,k)F_k(x)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{S}(n,k)F_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{S}(n-1,k-1) + k\overline{S}(n-1,k)\right) F_k(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Άρα,

$$\overline{S}(n,k) = \overline{S}(n-1,k-1) + k\overline{S}(n-1,k).$$

για κάθε $k \in [n]$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική αναγωγική σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε τις αρχικές τιμές της διπλής ακολουθίας των αριθμών Stirling δευτέρου είδους.

Αριθμοί $\overline{S}(n,k)$ **για** $1 \leq k \leq n \leq 7$.

n/k	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
7	1	63	301	350	140	21	1

Πρόταση 10 (Κατακόρυφη αναγωγική εξίσωση)

Ισχύει ότι

$$\overline{S}(n+1,k+1)=\sum_{\nu=k}^{n}\binom{n}{\nu}\overline{S}(\nu,k)$$

για κάθε $k=0,1,\ldots,n$ *και* $n\in\mathbb{N}$.

Παράδειγμα

$$\begin{aligned}\overline{S}(6,4)&=\sum_{\nu=3}^{5}\binom{5}{\nu}\overline{S}(\nu,3)\\&=\binom{5}{3}\overline{S}(3,3)+\binom{5}{4}\overline{S}(4,3)+\binom{5}{5}\overline{S}(5,3)\\&=10\cdot 1+5\cdot 6+1\cdot 25\\&=65.\end{aligned}$$

Απόδειξη. Επειδή $x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \overline{S}(n+1,k)F_k(x)$.
Θετοντας $x+1$ αντί x προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
(x+1)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \overline{S}(n+1,k)F_k(x+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \overline{S}(n+1,k)F_k(x+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \overline{S}(n+1,k+1)F_{k+1}(x+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \overline{S}(n+1,k+1)(x+1)F_k(x)
\end{aligned}
$$

(αφού
$F_{k+1}(x+1) = (x+1)x\cdots(x+1-(k+1)+1) = (x+1)x\cdots(x-k+1) = (x+1)F_k(x))$.
Άρα,

$$
(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \overline{S}(n+1,k+1)F_k(x). \tag{1}
$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Διωνύμου του Νεύτωνα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
(x+1)^n &= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} x^{\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left(\sum_{k=0}^{\nu} \overline{S}(\nu, k) F_k(x) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\nu=k}^{n} \binom{n}{\nu} \overline{S}(\nu, k) \right) F_k(x). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\overline{S}(n+1, k+1) = \sum_{\nu=k}^{n} \binom{n}{\nu} \overline{S}(\nu, k).$$

Πρόταση 11 (Οριζόντια αναγωγική εξίσωση)

Ισχύει ότι

$$\overline{S}(n,k) = \sum_{\nu=k}^{n} (-1)^{\nu-k} F_{\nu-k}(\nu) \overline{S}(n+1, \nu+1).$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned}
\overline{S}(6,4) &= \sum_{\nu=4}^{6} (-1)^{\nu-4} F_{\nu-4}(\nu) \overline{S}(7, \nu+1) \\
&= (-1)^0 F_0(\nu) \overline{S}(7,5) + (-1)^1 F_1(5) \overline{S}(7,6) + (-1)^2 F_2(6) \overline{S}(7,7) \\
&= 140 - 5 \cdot 21 + 6 \cdot 5 \cdot 1 \\
&= 65.
\end{aligned}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=k}^{n}(-1)^{\nu-k}F_{\nu-k}(\nu)\overline{S}(n+1,\nu+1)\\
&=\sum_{\nu=k}^{n}(-1)^{\nu-k}F_{\nu-k}(\nu)\left(\overline{S}(n,\nu)+(\nu+1)\overline{S}(n,\nu+1)\right)\\
&=\sum_{\nu=k}^{n}(-1)^{\nu-k}F_{\nu-k}(\nu)\overline{S}(n,\nu)+\sum_{\nu=k}^{n-1}(-1)^{\nu-k}F_{\nu+1-k}(\nu+1)\overline{S}(n,\nu+1)
\end{aligned}$$

(αφού,

$$\begin{aligned}
(\nu+1)F_{\nu-k}(\nu) &= (\nu+1)\nu(\nu-1)\cdots(\nu-(\nu-k)+1)\\
&= (\nu+1)\nu(\nu-1)\cdots(\nu+1-(\nu+1-k)+1)\\
&= F_{\nu+1-k}(\nu+1)\\
&= \sum_{\nu=k}^{n}(-1)^{\nu-k}F_{\nu-k}(\nu)\overline{S}(n,\nu)+\sum_{\nu=k+1}^{n}(-1)^{\nu-k-1}F_{\nu-k}(\nu)\overline{S}(n,\nu)\\
&= (-1)^{0}F_{0}(k)\overline{S}(n,k)=\overline{S}(n,k)).
\end{aligned}$$

Συνδυαστική ερμηνεία των αριθμών Stirling δευτέρου είδους

Διαμερίσεις συνόλου σε k υποσύνολα
Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $k = 0, 1, \ldots, n$ ορίζουμε $\mathcal{D}_{n,k}$ το σύνολο όλων των διαμερίσεων του συνόλου $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ σε k υποσύνολα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $E = [n]$.
Παράδειγμα Για $n = 4,\ k = 2$ και $E = [4]$.

$$\mathcal{D}_{4,2} = \{12/34, 13/24, 14/23, 1/234, 2/134, 3/124, 4/123\}.$$

(Σημείωση: Με τον συμβολισμό $1/234$ αναπαριστούμε την διαμέριση του $[4]$ στα υποσύνολα $\{1\}$ και $\{2, 3, 4\}$.)
Άρα,

$$|\mathcal{D}_{4,2}| = 7 = \overline{S}(4, 2).$$

Προφανώς ισχύει ότι

$$|\mathcal{D}_{n,n}| = |\mathcal{D}_{n,1}| = 1 \text{ και } |\mathcal{D}_{n,0}| = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Πρόταση 12

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$|\mathcal{D}_{n,k}| = \overline{S}(n, k).$$

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί ότι τα $|\mathcal{D}_{n,k}|$ ικανοποιούν την τριγωνική αναγωγική εξίσωση των αριθμών Stirling δευτέρου είδους δηλαδή ότι

$$|\mathcal{D}_{n,k}| = |\mathcal{D}_{n-1,k-1}| + k|\mathcal{D}_{n-1,k}|.$$

Η βασική παρατήρηση για την απόδειξη είναι ότι οι διαμερίσεις του $\mathcal{D}_{n,k}$ χωρίζονται

- σε αυτές που περιέχουν το μονοσύνολο $\{n\}$
- σε αυτές που το n ανήκει σε κάποιο υποσύνολο που περιέχει και άλλα στοιχεία.

Θεωρούμε τα σύνολα

$$\mathcal{A} = \{\pi \in \mathcal{D}_{n,k} : \{n\} \in \pi\},$$

$$\mathcal{B} = \{\pi \in \mathcal{D}_{n,k} : \{n\} \notin \pi\}.$$

Τότε τα $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ αποτελούν μια διαμέριση του $\mathcal{D}_{n,k}$ οπότε είναι

$$|\mathcal{D}_{n,k}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|. \tag{3}$$

Επιπλέον αν σε κάθε διαμέριση π' του $[n-1]$ με $k-1$ σύνολα προσθέσουμε το $\{n\}$ προκύπτει μια διαμέριση του $E=[n]$ με k σύνολα που περιέχει το $\{n\}$, δηλαδή ανήκει στο $\mathcal{A}$.
Έτσι, ισχύει ότι

$$\mathcal{A} = \{\pi' \cup \{n\} : \pi' \in \mathcal{D}_{n-1,k-1}\}.$$

Άρα,

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{D}_{n-1,k-1}|. \tag{4}$$

Αν τώρα π' είναι μια διαμέριση του $[n-1]$ με k υποσύνολα μπορούμε να δημιουργήσουμε μια διαμέριση π του $E = [n]$ με k υποσύνολα προσθέτοντας τον αριθμό n σε **κάποιο** από τα k υποσύνολά του. Επειδή υπάρχουν k δυνατές επιλογές, κάθε διαμέριση $\pi' \in \mathcal{D}_{n-1,k}$ γεννάει k το πλήθος διαφορετικές διαμερίσεις $\pi \in \mathcal{D}_{n,k}$ που δεν περιέχουν το $\{n\}$, οπότε ανήκουν στο $\mathcal{B}$. Έτσι, τελικά θα είναι

$$|\mathcal{B}| = k|\mathcal{D}_{n-1,k}|. \tag{5}$$

Από τις (3), (4) και (5) προκύπτει ότι

$$|\mathcal{D}_{n,k}| = |\mathcal{D}_{n-1,k-1}| + k|\mathcal{D}_{n-1,k}|.$$

Παράδειγμα $E = [5]$, $k = 3$.

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{5,3} = \{&123/4/5,\ 124/3/5,\ 134/2/5,\ 234/1/5,\ 12/34/5,\\ &13/24/5,\ 14/23/5,\ 125/3/4,\ 12/35/4,\ 12/3/45,\\ &135/2/4,\ 13/25/4,\ 13/2/45,\ 145/2/3,\ 14/25/3,\\ &14/2/35,\ 235/1/4,\ 23/15/4,\ 23/1/45,\ 245/1/3,\\ &24/15/3,\ 24/1/35,\ 345/1/2,\ 34/15/2,\ 34/1/25\}\end{aligned}$$

$\mathcal{A}$: οι πρώτες 7.
$\mathcal{B}$ οι υπόλοιπες.
$|\mathcal{A}| = |\mathcal{D}_{4,2}|$, $|\mathcal{B}| = 3|\mathcal{D}_{4,3}|$.

Άσκηση 1 (Τύπος αριθμών Stirling δευτέρου είδους)

Να δειχθεί ο τύπος

$$\overline{S}(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}\nu^n$$

για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$ *και* $n \in \mathbb{N}$.

Λύση. Από τον ορισμό των αριθμών Stirling δευτέρου είδους έχουμε ότι

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \overline{S}(n,k) F_k(x).$$

Από τον τύπο του Gregory

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\Delta^k p)(0)}{k!} F_k(x)$$

για $p(x) = x^n$ έχουμε ότι

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\Delta^k x^n)(0)}{k!} F_k(x)$$

οπότε

$$\overline{S}(n,k) = \frac{(\Delta^k x^n)(0)}{k!}. \tag{6}$$

Χρησιμοποιώντας τον γνωστό τύπο

$$\Delta^k y(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} y(x+k-\nu)^n$$

για $y(x) = x^n$ έχουμε ότι

$$(\Delta^k x^n)(0) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} (0+k-\nu)^n$$

οπότε από τον τύπο (6) έχουμε ότι

$$\overline{S}(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{k}{\nu} (k-\nu)^n = \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-v} \binom{k}{k-\nu} \nu^n$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \nu^n$$

Άσκηση 2 (Κωδικοποιήσεις διαμερίσεων)

1. *Να βρεθεί η διαμέριση του* $[10]$ *που κωδικοποιείται από την ακολουθία με περιορισμούς αύξησης* 0 0 1 0 2 1 0 3 4 4.
2. *Να κωδικοποιηθεί η διαμέριση* $\{5,7\}$, $\{2,4,6,8\}$, $\{1,9,10\}$, $\{3\}$ *του* $[10]$ *από μια ακολουθία με περιορισμούς αύξησης.*

Λύση.

1.

a_i	0	0	1	0	2	1	0	3	4	4
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Επειδή το μέγιστο στοιχείο της ακολουθίας είναι το 4 έπεται ότι η διαμέριση αποτελείται από 5 υποσύνολα.
Το 1ο υποσύνολο αποτελείται από τα στοιχεία 1, 2, 4, 7.
Το 2ο υποσύνολο αποτελείται από τα στοιχεία 3, 6.
Το 3ο υποσύνολο αποτελείται από τα στοιχεία 5.
Το 4ο υποσύνολο αποτελείται από τα στοιχεία 8.
Το 5ο υποσύνολο αποτελείται από τα στοιχεία 9, 10.
Επομένως, η ζητούμενη διαμέριση του [10] είναι η $\{1, 2, 4, 7\}$, $\{3, 6\}$, $\{5\}$, $\{8\}$, $\{9, 10\}$, ή με εναλλακτική γραφή: 1 2 4 7/3 6/5/8/9 10.

2. Αρχικά διατάσσουμε τα υποσύνολα της διαμέρισης με βάση το ελάχιστο στοιχείο τους και τα αριθμούμε με βάση την διάταξη που τοποθετήθηκαν ξεκινώντας από το 0.

0	1	2	3
$\{1, 9, 10\}$	$\{2, 4, 6, 8\}$	$\{3\}$	$\{5, 7\}$

Για κάθε $i \in [n]$ το a_i ισούται με την αρίθμηση του υποσυνόλου στο οποίο ανήκει στο στοιχείο i. Επομένως, προκύπτει η παρακάτω ακολουθία με περιορισμούς αύξησης.

a_i	0	1	2	1	3	1	3	1	0	0
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- (*Συνδυαστική ερμηνεία κατακόρυφης αναγωγικής σχέσεις αριθμών Stirling δευτέρου είδους*) Να δοθεί μια συνδυαστική απόδειξη της (επόμενης ισοδύναμης) κατακόρυφης αναγωγικής σχέσης των αριθμών Stirling δευτέρου είδους

$$\overline{S}(n+1,k+1) = \sum_{\nu=0}^{n-k} \binom{n}{\nu} \overline{S}(n-\nu,k)$$

για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$ και $n \in \mathbb{N}$. (Υπόδειξη: Διαμερίστε το υποσύνολο που περιέχει το $n+1$ με βάση το πλήθος ν των υπολοίπων στοιχείων που περιέχονται σ᾽ αυτό.)

- (*Ειδικές διαμερίσεις του* $[n]$) Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 2$ ισχύει ότι

1. $\overline{S}(n, n-1) = \binom{n}{2}$.
2. $\overline{S}(n, n-2) = \binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$.
3. $\overline{S}(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.
4. $\overline{S}(n, 3) = \dfrac{1}{2}\left(3^{n-1} - 2^{n} + 1\right)$.

- *(Φράγματα για τους αριθμούς Stirling δευτέρου είδους)*
  1. Να δειχθεί ότι $\overline{S}(n,k) \geq k\overline{S}(n-1,k)$, για κάθε $k \in [n]$ και $n \in \mathbb{N}^*$.
  2. Να δειχθεί ότι $k^{n-k} \leq \overline{S}(n,k) \leq \binom{n-1}{k-1} k^{n-k}$, για κάθε $k \in [n]$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

  (Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η αναγωγική σχέση $\overline{S}(n,k) = \overline{S}(n-1,k-1) + k\overline{S}(n-1,k)$.)

- (*Αριθμός επί απεικονίσεων*)
  1. Να δειχθεί ότι ο αριθμός των επί απεικόνισεων από το $[n]$ στο $[k]$ ισούται με $k!\overline{S}(n,k)$.
  2. Να βρεθεί ο αριθμός των απεικονίσεων $f : A \to B$ με $|A| = n$, $|B| = k$ και $f(A) = m$, όπου $m \leq k$.
- (*Αναθέσεις διαφορετικών εργασιών σε διαφορετικούς ανθρώπους*) Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων να αναθέσουμε 20 διαφορετικές εργασίες σε 15 διαφορετικούς ανθρώπους έτσι ώστε κάθε άνθρωπος να αναλάβει τουλάχιστον μια εργασία.

- (*Αθροίσματα δυνάμεων*) Να δειχθεί ότι για κάθε $n, k \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι
$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j+1} j! \overline{S}(k, j).$$
- (*Διαμερίσεις χωρίς διαδοχικούς αριθμούς*) Να δειχθεί ότι ο αριθμός των διαμερίσεων του $[n+1]$ σε $k+1$ υποσύνολα καθένα από τα οποία δεν περιέχει διαδοχικούς αριθμούς ισούται με $\overline{S}(n, k)$.