ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Σύγκριση με την βοήθεια ορίων

ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Πολλά προβλήματα που εμφανίζονται στις θετικές επιστήμες **δεν έχουν ακριβείς λύσεις**. Σε τέτοιες περιπτώσεις αναζητάται μια όσο δυνατόν καλύτερη **προσέγγιση της λύσης** τους.

Τέτοια προβλήματα εμφανίζονται στα **Διακριτά Μαθηματικά** όπου υπάρχουν **πεπερασμένα αθροίσματα** $\Big($όπως για παράδειγμα το άθροισμα

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{k}\Bigg)$$

για τα οποία δεν υπάρχει κάποιος απλούστερος τύπος, **αναδρομικές ακολουθίες** $\Big($όπως για παράδειγμα οποιαδήποτε ακολουθία $(f(n))$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$f(n) = 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n^2\Bigg)$$

για τις οποίες δεν μπορεί να βρεθεί ο τύπος τους, και άλλα. **Σκοπός** μας τότε είναι **να βρεθεί μια γνωστή ακολουθία** $(g(n))$ η οποία είναι κατά μια έννοια **ισοδύναμη με την ακολουθία** $(f(n))$ **ή** τουλάχιστον να **φράσσει την** $f(n)$.

Η **ανάγκη εκτίμησης** του μεγέθους μιας ακολουθίας $(f(n))$ μέσω μιας άλλης ακολουθίας $(g(n))$ **εμφανίζεται** και στην **Ανάλυση των Αλγορίθμων**. Οι συναρτήσεις που συναντάμε στην ανάλυση αλγορίθμων είναι θετικές και συνήθως αύξουσες. Η **μεταβλητή** τους είναι ένας φυσικός αριθμός και αντιπροσωπεύει το **μέγεθος των δεδομένων εισόδου στον αλγόριθμο**.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε σχεδιάσει δύο αλγορίθμους F, G τους οποίους θέλουμε να συγκρίνουμε ως προς την ταχύτητά τους. Αν $f(n)$, $g(n)$ είναι οι χρόνοι εκτέλεσης των αλγορίθμων F, G αντίστοιχα και έχουμε υπολογίσει τον τύπο της $g(n)$, μπορούμε να εκτιμήσουμε την τιμή της $f(n)$ δια συγκρίσεως με την $g(n)$.

Αν η σύγκριση αυτή βασίζεται σε ορισμένες τιμές της μεταβλητής n, δεν προκύπτει συνολική εικόνα για την "ποιότητα" του αλγορίθμου. Για παράδειγμα, αν

$$f(n) = 100n$$

και

$$g(n) = n^2,$$

παρατηρούμε ότι

$$f(n) > g(n) \text{ όταν } n < 100,$$

δηλαδή για μικρές τιμές του n (μικρό μέγεθος εισόδου) ο αλγόριθμος G τερματίζει πιο γρήγορα από τον αλγόριθμο F, ενώ τελικά (για $n > 100$) συμβαίνει το αντίθετο.

Υπάρχουν **δύο τρόποι σύγκρισης των ακολουθιών** $f(n)$ και $g(n)$. Ο **πρώτος** βασίζεται στην έννοια του **ορίου**, ενώ ο **δεύτερος** σε **φράγματα**.

Σύγκριση ακολουθιών με τη βοήθεια ορίων

Ασυμπτωτική ισοδυναμία

Δύο ακολουθίες $(f(n))$, $(g(n))$ ονομάζονται **ασυμπτωτικά ισοδύναμες** (συμβολισμός $f(n) \sim g(n)$) αν και μόνο αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η τιμή $g(n)$ αποτελεί μια **ασυμπτωτική εκτίμηση** της τιμής $f(n)$ και αντίστροφα.

Παραδείγματα

i) $3n^2 + 6n + 5 \sim 3n^2$,

αφού $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+6n+5}{3n^2} = 1.$

ii) $\displaystyle\ln(1+\alpha^n) \sim \frac{\ln\alpha}{\ln\beta}\ln(1+\beta^n)$, για $\alpha,\beta > 1$,

αφού

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\alpha^n)}{\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}\ln(1+\beta^n)} &= \frac{\ln\beta}{\ln\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\alpha^n(\alpha^{-n}+1)}{\ln\beta^n(\beta^{-n}+1)} \\
&= \frac{\ln\beta}{\ln\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\alpha + \ln(1+\alpha^{-n})}{n\ln\beta + \ln(1+\beta^{-n})} \\
&= \frac{\ln\beta}{\ln\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\alpha + \frac{1}{n}\ln(1+\alpha^{-n})}{\ln\beta + \frac{1}{n}\ln(1+\beta^{-n})} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

iii) $(n+r)^{n+r} \sim e^r n^{n+r}$, για $r \in \mathbb{R}$,

αφού

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n+r)^{n+r}}{e^r n^{n+r}} &= \frac{1}{e^r} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{r}{n}\right)^r \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{r}{n}\right)^n \\
&= \frac{1}{e^r} \cdot 1 \cdot e^r \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Άσκηση 1. *Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $f(n) \sim an^b$, όταν $f(n) = \sqrt{4n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}$.*

Λύση. Είναι,

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \sqrt{n} \sqrt{4 + \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n}} \\
&= \sqrt{n} \sqrt{4 + \sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n^2}}} \\
&= n^{1/2} \left(4 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^{3/2}}\right)^{1/2}\right)^{1/2},
\end{aligned}
$$

οπότε

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} \left(4 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^{3/2}}\right)^{1/2}\right)^{1/2} = 2.
$$

Άρα, $f(n) \sim 2n^{1/2}$ και συνεπώς $a = 2$ και $b = \frac{1}{2}$. □

Ιδιότητες

Αν $f(n) \sim F(n)$ και $g(n) \sim G(n)$, τότε ισχύει ότι

1) $f(n)g(n) \sim F(n)G(n)$.
2) $\dfrac{f(n)}{g(n)} \sim \dfrac{F(n)}{G(n)}$.
3) $|f(n)| + |g(n)| \sim |F(n)| + |G(n)|$.

Οι αποδείξεις των δύο πρώτων ιδιοτήτων είναι προφανείς.

Παρατήρηση: Η ιδιότητα 3) δεν ισχύει εν γένει χωρίς τις απόλυτες τιμές. Για παράδειγμα αν

$$f(n) = n + 2, \quad F(n) = n + 1, \quad g(n) = G(n) = -n,$$

τότε

$$f(n) \sim F(n) \text{ και } g(n) \sim G(n)$$

ενώ

$$(f(n) + g(n)) \nsim (F(n) + G(n))$$

αφού

$$\frac{f(n) + g(n)}{F(n) + G(n)} = 2,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη της ιδιότητας 3)
Αρκεί να περιορισθούμε σε ακολουθίες με θετικούς όρους. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(n)+g(n)}{F(n)+G(n)}-1\right| = \left|\frac{f(n)+g(n)-F(n)-G(n)}{F(n)+G(n)}\right| \\
&= \left|\frac{f(n)-F(n)}{F(n)}\cdot\frac{F(n)}{F(n)+G(n)} + \frac{g(n)-G(n)}{G(n)}\cdot\frac{G(n)}{F(n)+G(n)}\right| \\
&\leq \left|\frac{f(n)-F(n)}{F(n)}\right| \cdot \left|\frac{F(n)}{F(n)+G(n)}\right| \\
&\qquad + \left|\frac{g(n)-G(n)}{G(n)}\right| \cdot \left|\frac{G(n)}{F(n)+G(n)}\right| \\
&\leq \left|\frac{f(n)-F(n)}{F(n)}\right| + \left|\frac{g(n)-G(n)}{G(n)}\right| \\
&= \left|\frac{f(n)}{F(n)}-1\right| + \left|\frac{g(n)}{G(n)}-1\right|,
\end{aligned}
$$

οπότε επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(n)}{F(n)}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{g(n)}{G(n)}-1\right) = 0,$$

προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(n)+g(n)}{F(n)+G(n)}-1\right) = 0,$$

και συνεπώς

$$f(n)+g(n) \sim F(n)+G(n).$$

Τύπος του Stirling (με ισοδυναμία)

Πρόταση 1 (Τύπος του Stirling (με ισοδυναμία)).

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Παρατηρήσεις

1. Η έκφραση $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ θεωρείται απλούστερη από την έκφραση $n!$ διότι αν περιορισθούμε στις 4 βασικές πράξεις και στην πράξη της ύψωσης σε δύναμη τότε η πρώτη απαιτεί 6 πράξεις ενώ η δεύτερη $n-1$ πολλαπλασιασμούς.
2. Ο τύπος του Stirling γενικεύεται και για πραγματική μεταβλητή.

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Εφαρμογές

i) $\binom{2n-r}{n-s} \sim \frac{4^n}{2^r\sqrt{\pi n}}$, όπου $r, s \in \mathbb{Z}$.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling, τις ιδιότητες της ασυμπτωτικής ισοδυναμίας και το τρίτο παράδειγμα που έπεται του ορισμού της, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\binom{2n-r}{n-s} &= \frac{(2n-r)!}{(n-s)!(n-r+s)!}\\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi(2n-r)}\left(\frac{2n-r}{e}\right)^{2n-r}}{\sqrt{2\pi(n-s)}\left(\frac{n-s}{e}\right)^{n-s}\sqrt{2\pi(n-r+s)}\left(\frac{n-r+s}{e}\right)^{n-r+s}}\\ &= \sqrt{\frac{2n-r}{2\pi(n-s)(n-r+s)}}\cdot\frac{(2n-r)^{2n-r}}{(n-s)^{n-s}(n-r+s)^{n-r+s}}\\ &\overset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot\frac{e^{-r}(2n)^{2n-r}}{e^{-s}n^{n-s}e^{-r+s}n^{n-r+s}}\\ &= \frac{4^n}{2^r\sqrt{\pi n}}.\end{aligned}$$

ii) $C_n \sim \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}}$, (όπου C_n είναι ο n-οστός αριθμός Catalan).

Από το i), για $r = s = 0$ προκύπτει ότι

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}},$$

οπότε,

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{n\sqrt{\pi n}}.$$

[1] $(n+r)^{n+r} = e^r n^{n+r}$.

Άσκηση 2. *Να αποδειχθεί ότι* $\binom{n+k}{n} \sim \frac{n^k}{k!}$, *για κάθε* $n, k \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση:

Γενικά, ισχύει ότι $\binom{n+a}{n} \sim \frac{n^a}{\Gamma(a+1)}$, όπου a δεν είναι αρνητικός ακέραιος και $n \in \mathbb{N}$.

Το Λήμμα του Stolz

Ένα χρήσιμο εργαλείο για την ασυμπτωτική εκτίμηση των αθροισμάτων, γνωστό από την Μαθηματική Ανάλυση, είναι το Λήμμα του Stolz.

Πρόταση 2 (Λήμμα του Stolz). *Αν (a_n), (A_n) είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών, όπου η (A_n) είναι γνησίως αύξουσα, θετική και όχι άνω φραγμένη, και*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = \ell,$$

με $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = \ell.$$

Άσκηση 3. *Να δειχθεί ότι $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.*

Λύση. Έστω $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ και $A_n = \ln n$. Η ακολουθία (A_n) είναι γνησίως αύξουσα, θετική και όχι άνω φραγμένη.

Θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1.$$

Ισχύει ότι

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n} = -\frac{\frac{n}{n+1}-1}{\ln\frac{n+1}{n}} = \frac{\frac{n}{n+1}-1}{\ln\frac{n}{n+1}}.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{A_{n+1}-A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n+1}-1}{\ln\frac{n}{n+1}} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1.$$

Άρα, σύμφωνα με το Λήμμα Stolz θα είναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = 1,$$

επομένως

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n. \qquad \square$$

Άσκηση 4. *Να δειχθεί ότι* $\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_k \sim \dfrac{1}{3} C_n$.

Λύση. Αν τεθεί $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_k$ και $A_n = a_{n+1} - a_n = C_n$

Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα Stolz για τις ακολουθίες (a_n) και (A_n).

Είναι

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} &= \frac{C_n}{C_{n+1} - C_n} \\ &= \frac{1}{\frac{C_{n+1}}{C_n} - 1} \end{aligned}$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \frac{C_{n+1}}{C_n} &= \frac{\frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}}{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+2} \end{aligned}$$

έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = 4$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{C_{n+1}}{C_n} - 1} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}.$$

Άρα, σύμφωνα με το Λήμμα Stolz θα είναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \frac{1}{3},$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} C_k}{C_n} \sim \frac{1}{3}.$$

δηλαδή

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_k \sim \frac{1}{3} C_n$$

□

Άσκηση 5. *Να βρεθεί μια ασυμπτωτική εκτίμηση του πηλίκου* $\frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{2k+1}{k}}{C_n}$.

Λύση. Αν τεθεί $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k+1}{k}$, αρχικά υπολογίζουμε μια ασυμπτωτική εκτίμηση της διαφοράς $a_{n+1} - a_n$.

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη εφαρμογή προκύπτει ότι

$$a_{n+1} - a_n = \binom{2n+3}{n+1} \sim 8\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \sim 8nC_n,$$

οπότε,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{nC_n} = 8.$$

Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα Stolz για τις ακολουθίες (a_n) και (A_n) με $A_n = nC_n$.

Είναι

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} &= \frac{a_{n+1} - a_n}{nC_n} \cdot \frac{nC_n}{A_{n+1} - A_n} \\
&= \frac{a_{n+1} - a_n}{nC_n} \cdot \frac{nC_n}{(n+1)C_{n+1} - nC_n} \\
&= \frac{a_{n+1} - a_n}{nC_n} \cdot \frac{1}{\frac{n+1}{n}\frac{C_{n+1}}{C_n} - 1}.
\end{aligned}$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C_{n+1}}{C_n} = 4$ έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{nC_n} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n+1}{n}\frac{C_{n+1}}{C_n} - 1} \\
&= 8 \cdot \frac{1}{4 - 1} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Άρα, σύμφωνα με το Λήμμα Stolz θα είναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \frac{8}{3},$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2k+1}{k}}{C_n} = \frac{a_n}{\frac{1}{n}A_n} \sim \frac{8}{3}n. \qquad \square$$

Άσκηση 6. *Να βρεθούν οι ασυμπτωτικές εκτιμήσεις των πηλίκων:*

i) $\dfrac{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{2k+3}{k}}{C_n}$.

ii) $\dfrac{\sum_{k=0}^{n} 4^{n-k} \binom{2k+1}{k+1}}{C_n}$.

Λύση της ii). Θέτουμε

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} 4^{n-k} \binom{2k+1}{k+1}$$

και

$$a_n = \frac{b_n}{4^n} = \sum_{k=0}^{n} 4^{-k} \binom{2k+1}{k+1}$$

και ζητείται μια ασυμπτωτική εκτίμηση του πηλίκου $\dfrac{b_n}{C_n}$.

Είναι

$$a_{n+1} - a_n = 4^{-(n+1)} \binom{2n+3}{n+2} \sim 4^{-(n+1)} 2^3 \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{2}{\sqrt{\pi n}}$$

Εφαρμόζουμε το Λήμμα του Stolz για τις ακολουθίες (a_n) και

(A_n) με $A_n = \sqrt{n}$ οπότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(a_{n+1} - a_n)(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(a_{n+1} - a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1 \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

Άρα, $a_n \sim \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}$.

Κατόπιν τούτων

$$\frac{b_n}{C_n} = \frac{4^n a_n}{C_n} \sim \frac{4^n \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}}{\dfrac{4^n}{n \sqrt{\pi n}}} = 4n^2$$

$\square$

Μια ιεραρχία

Οι ακολουθίες που συναντάμε στις εφαρμογές έχουν διαφορετικούς ασυμπτωτικούς ρυθμούς αύξησης, δηλαδή η μια πλησιάζει στο άπειρο ταχύτερα από την άλλη. Για παράδειγμα, η ακολουθία $g(n) = n^2$ πλησιάζει ταχύτερα στο άπειρο από την ακολουθία $f(n) = n$. Έτσι, ορίζεται μια σχέση "ιεραρχίας" ως εξής:

$$f(n) \prec g(n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Προφανώς η σχέση αυτή είναι μεταβατική.

Παραδείγματα

i) $n^a \prec n^b \Leftrightarrow a < b$

ii) $\ln(\ln n) \prec \ln n \prec n^\epsilon$, για $\epsilon > 0$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(\ln x))'}{(\ln x)'} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\ln x}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0,
\end{aligned}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\epsilon}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\epsilon}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^{\epsilon})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\epsilon x^{\epsilon-1}} = \frac{1}{\epsilon}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\epsilon}} = 0.$$

iii) $n^{\ln n} < a^n$, για κάθε $a > 1$.

Πράγματι

$$\frac{n^{\ln n}}{a^n} = \frac{\left(e^{\ln n}\right)^{\ln n}}{e^{\ln a^n}} = e^{(\ln n)^2 - n\ln a} = e^{n\left(\frac{(\ln n)^2}{n} - \ln a\right)}.$$

Εφαρμόζοντας δύο φορές τον κανόνα του L' Hospital έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2}{n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0,$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\ln n}}{a^n} = \lim_{n\to\infty} e^{n\left(\frac{(\ln n)^2}{n} - \ln a\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{-n\ln a} = 0,$$

αφού $\ln a > 0$.

Συνήθως για τη σχέση ιεραρχίας χρησιμοποιείται ο συμβολισμός **o** (διαβάζεται "όμικρον").

Ο συμβολισμός o

Για κάθε ακολουθία $g(n)$ τίθεται

$$o(g(n)) = \{f(n) : f(n) \prec g(n)\}.$$

Προφανώς, $o(1)$ είναι το σύνολο όλων των μηδενικών ακολουθιών.

Παρακάτω θα γράφουμε ότι

$$f(n) = o(g(n))$$

εννοώντας ότι

$$f(n) \in o(g(n))$$

ή, ισοδύναμα, ότι

$$f(n) \prec g(n).$$

Άρα,

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Ο συμβολισμός αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει την ασυμπτωτική ισοδυναμία, δηλαδή ισχύει ότι

$$f(n) \sim g(n) \Leftrightarrow f(n) = g(n) + o(g(n)),$$

αφού

$$f(n) = g(n) + (f(n) - g(n))$$

και άρα

$$\begin{aligned} f(n) \sim g(n) &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n) - g(n)}{g(n)} = 0 \\ &\Leftrightarrow f(n) - g(n) = o(g(n)). \end{aligned}$$

Άσκηση 7. *Να αποδειχθεί ότι*

i) $a^n = o(n!)$, *όπου* $a \in \mathbb{R}$.

ii) $\log n = o\left(n^{\epsilon}\right)$, *όπου* $\epsilon > 0$.

Παρατήρηση: Οι ορισμοί της ασυμπτωτικής ισοδυναμίας και της ιεραρχίας που δόθηκαν για ακολουθίες (άρα, ισοδύναμα, και για συναρτήσεις που η μεταβλητή τους τείνει στο $+\infty$, ή στο $-\infty$) μπορεί να επεκταθεί και για συναρτήσεις που η μεταβλητή τους τείνει σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Συγκεκριμένα,

$$f(x) \sim g(x), \ \ (x \to x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

και

$$f(x) = o(g(x)), \ \ (x \to x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Παραδείγματα

i) $e^x - 1 \sim \frac{1}{2} \sin 2x, \ \ (x \to 0).$

Πράγματι,

$$\lim_{x \to 0} \frac{2(e^x - 1)}{\sin 2x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\sin 2x)'} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2 \cos 2x} = 1.$$

ii) $(2-x)^{\frac{1}{1-x}} \sim e^2 x^{\frac{1}{1-x}}, \ (x \to 1^-)$.

Πράγματι, αν τεθεί $t = \frac{1}{1-x}$ προκύπτει ότι $x = \dfrac{t-1}{t}$ και $2 - x = 1 + \dfrac{1}{t}$, επομένως

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{e^2}\left(\frac{2-x}{x}\right)^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}}\right)^t$$

$$= \frac{1}{e^2}\frac{\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}{\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^t}$$

$$= \frac{1}{e^2}\frac{e}{e^{-1}} = 1.$$