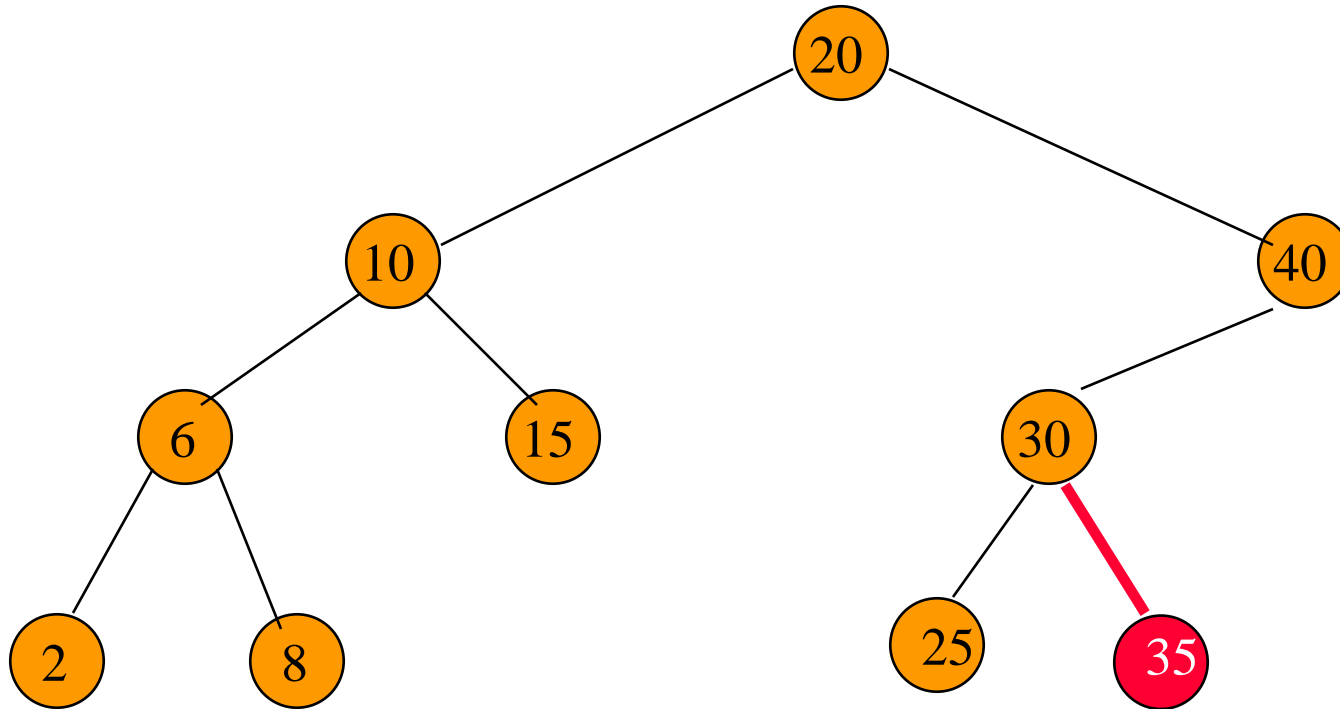


AVL δέντρα

Οι διαφάνειες που ακολουθούν είναι προσαρμογή των
διαφανειών από τον ιστότοπο

<http://www.cise.ufl.edu/~sahni/cop3530/> (σελίδα του καθ.
Sartaj Sahni για το μάθημα των Δομών Δεδομένων)

Η λειτουργία της εισαγωγής στοιχείου



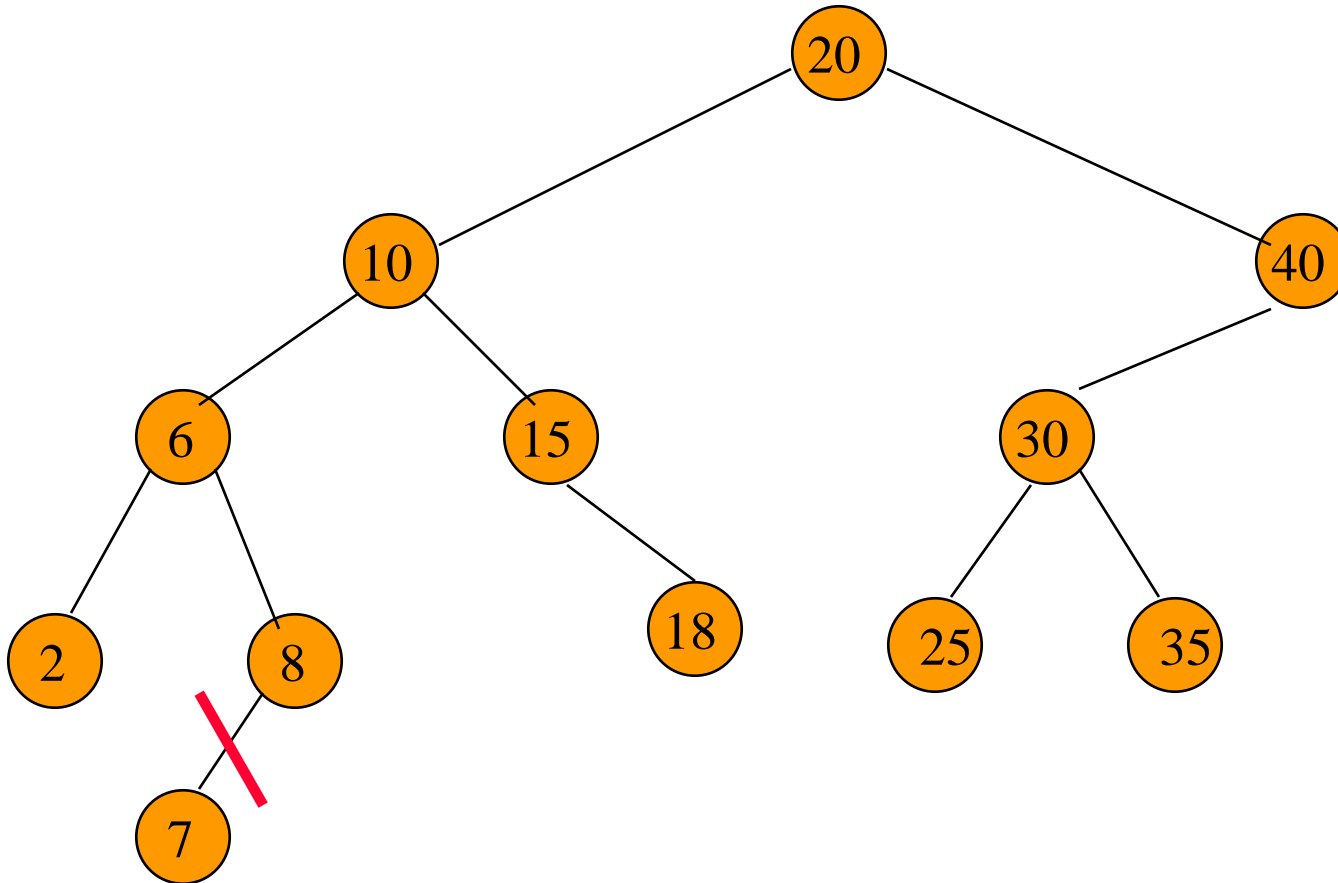
Εισαγωγή του στοιχείου 35.

Η λειτουργία της Διαγραφής στοιχείου

Τρεις περιπτώσεις:

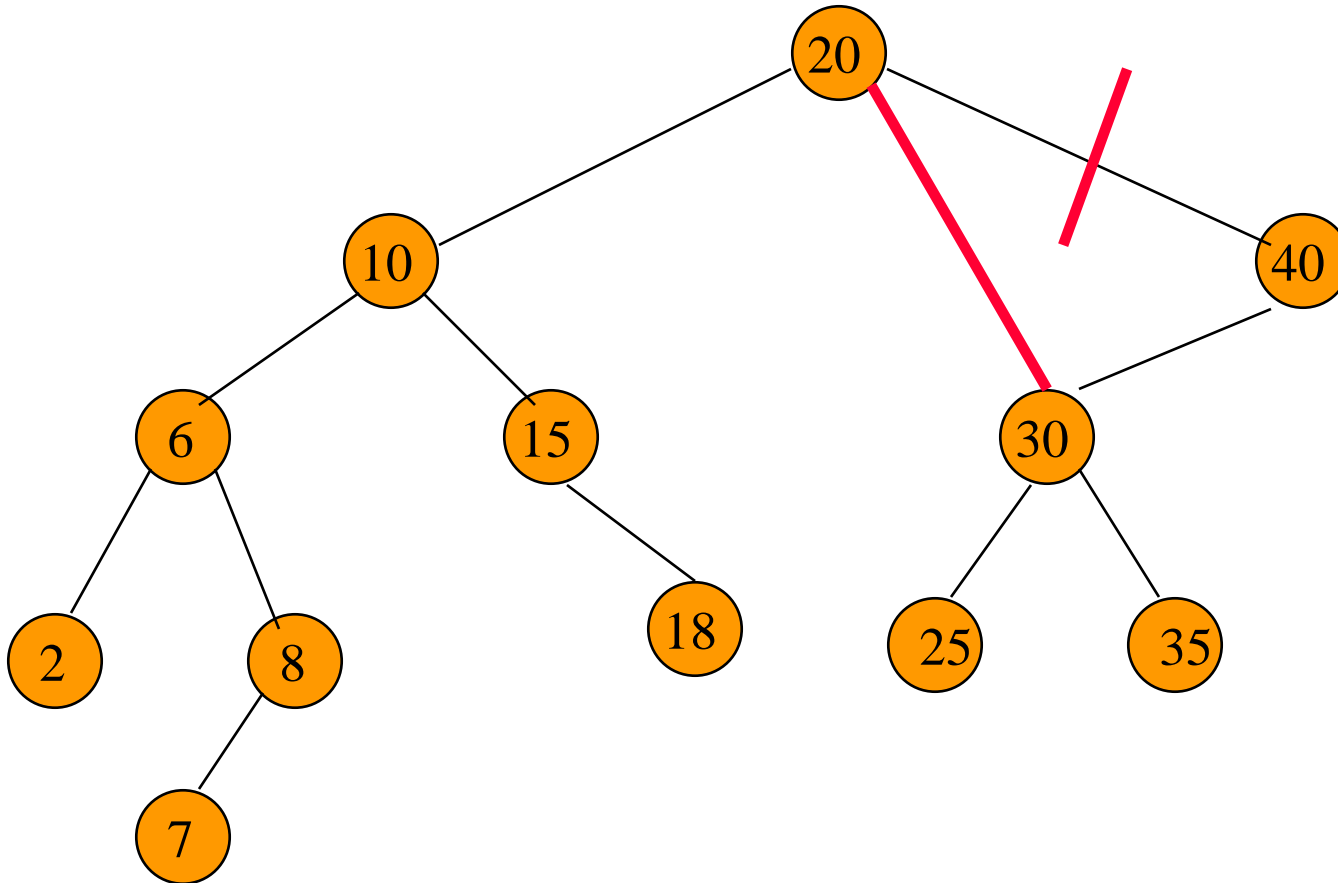
- Το στοιχείο είναι φύλλο.
- Το στοιχείο είναι κόμβος βαθμού 1.
- Το στοιχείο είναι κόμβος βαθμού 2.

Αφαίρεση φύλλου



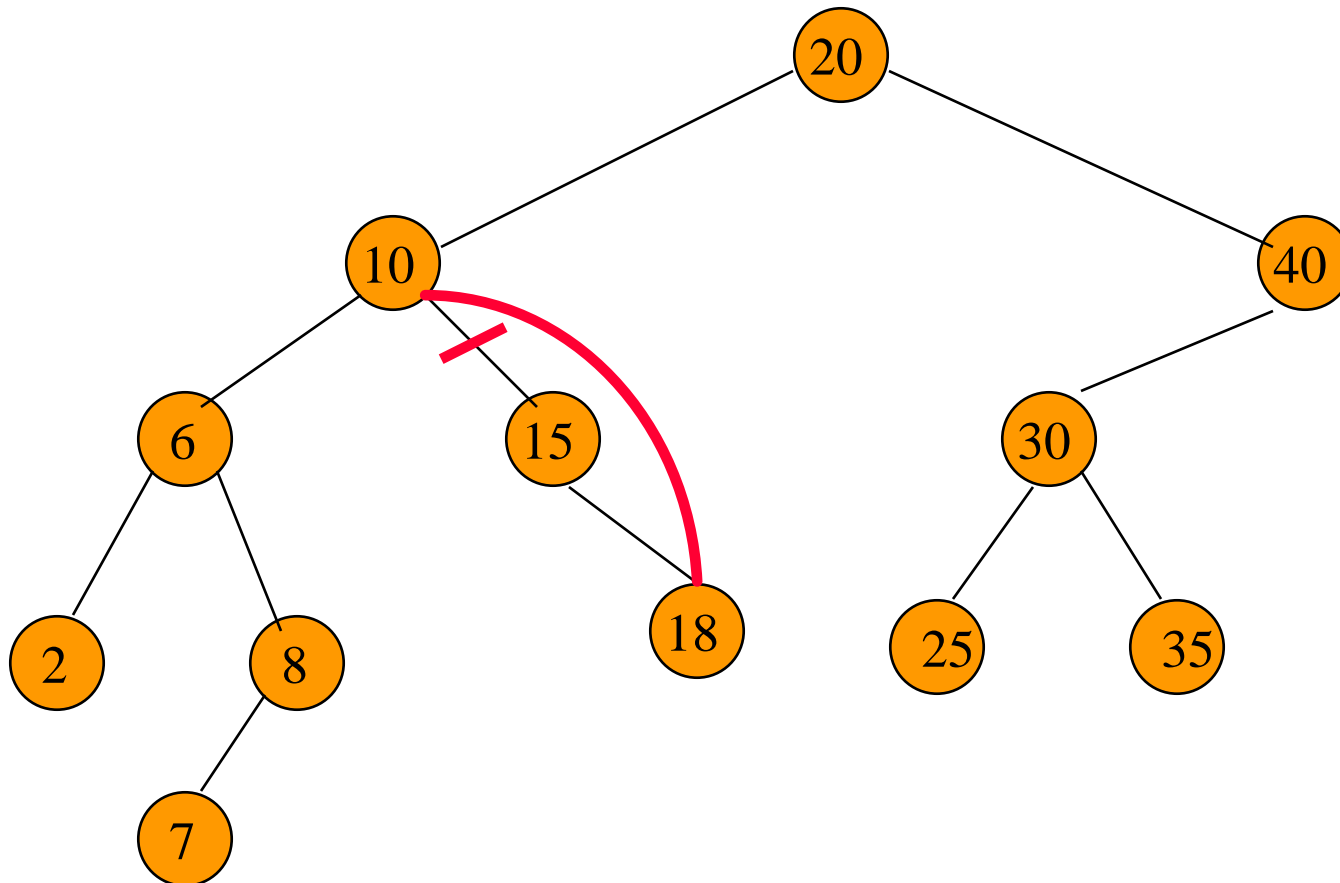
Αφαίρεση ενός φύλλου (στοιχείο **7**)

Αφαίρεση από κόμβο βαθμού 1



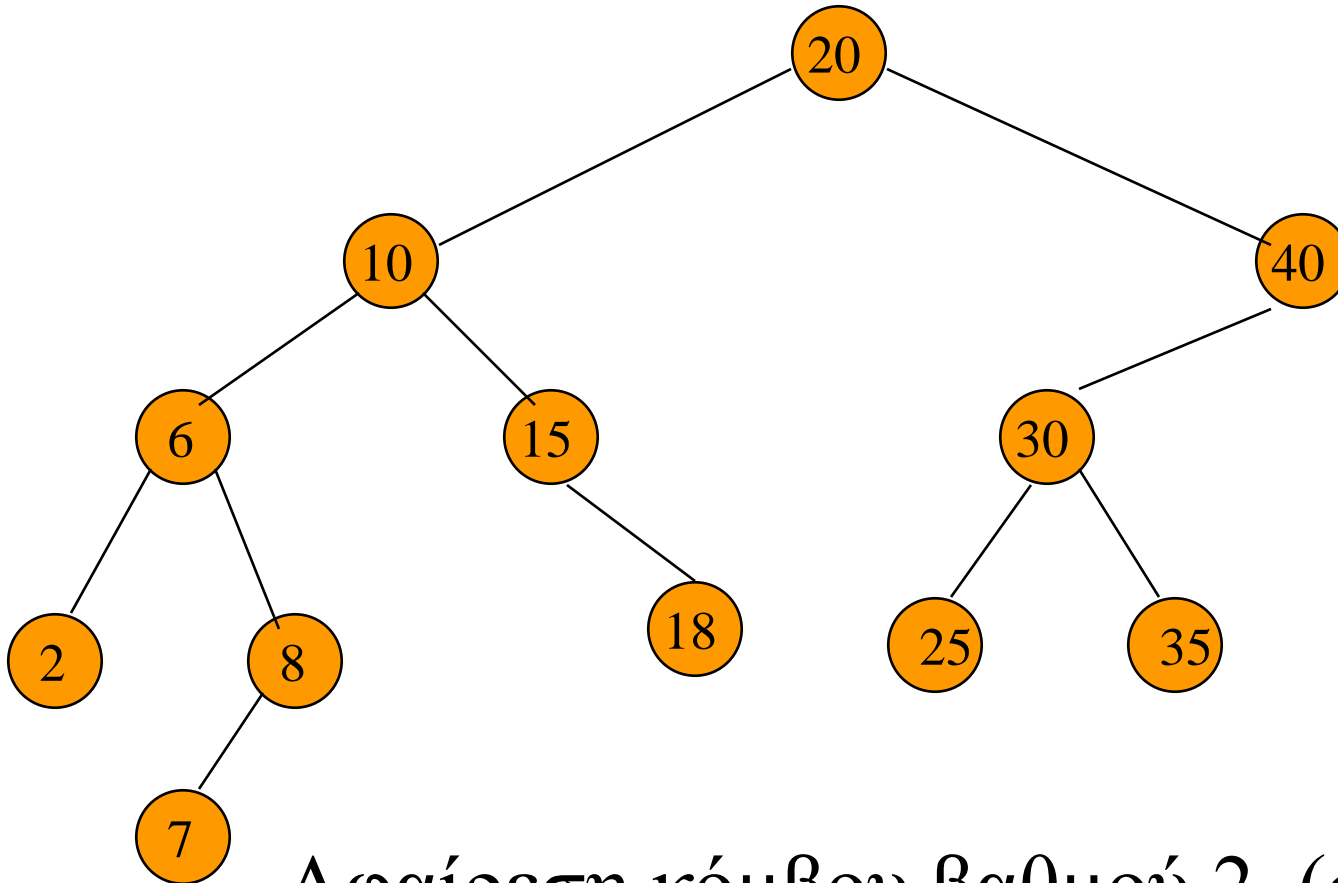
Αφαίρεση ενός κόμβου βαθμού 1. (στοιχείο 40)

Αφαίρεση από κόμβο βαθμού 1 (Συν.)



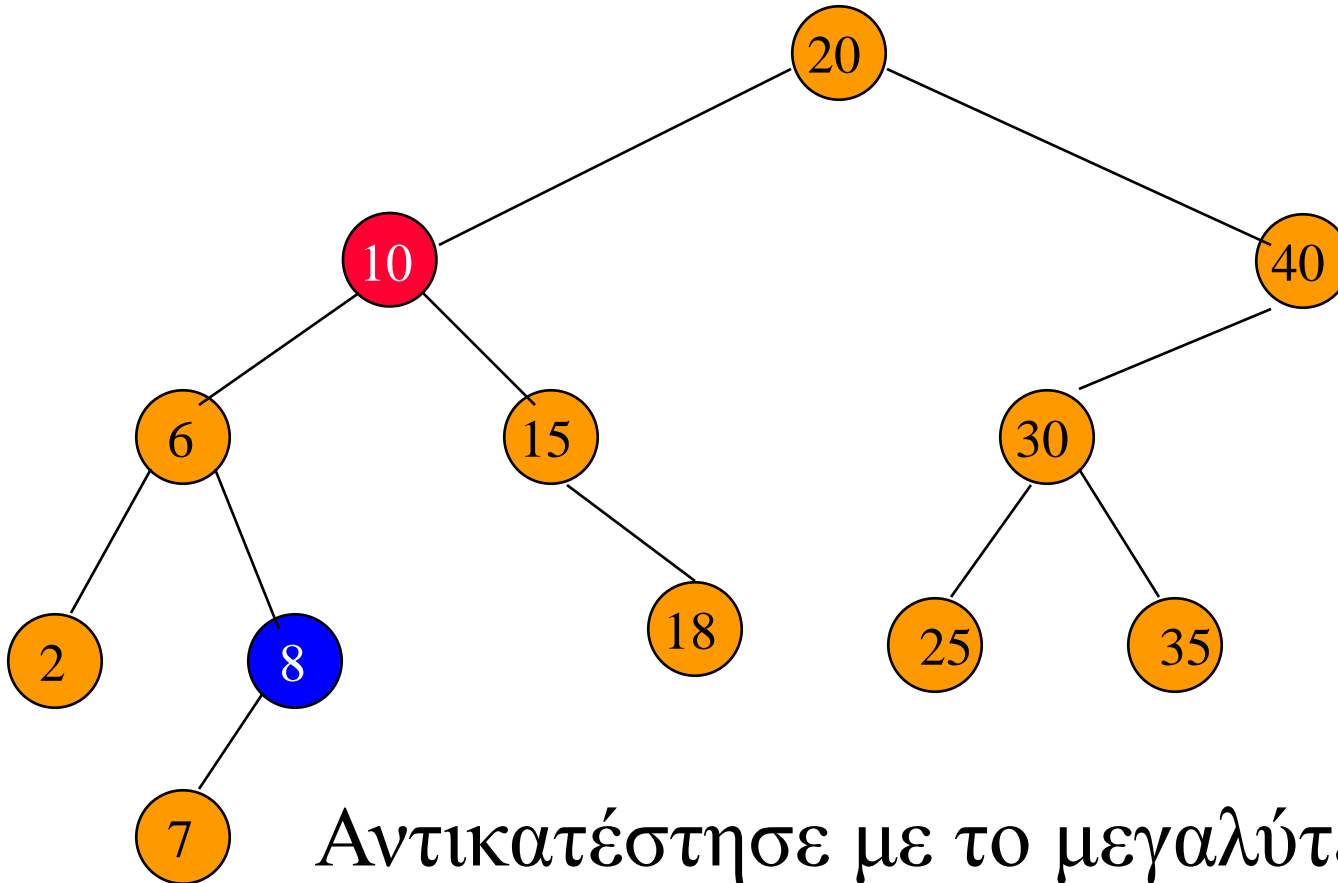
Αφαίρεση κόμβου βαθμού 1 (στοιχείο= 15)

Αφαίρεση κόμβου βαθμού 2



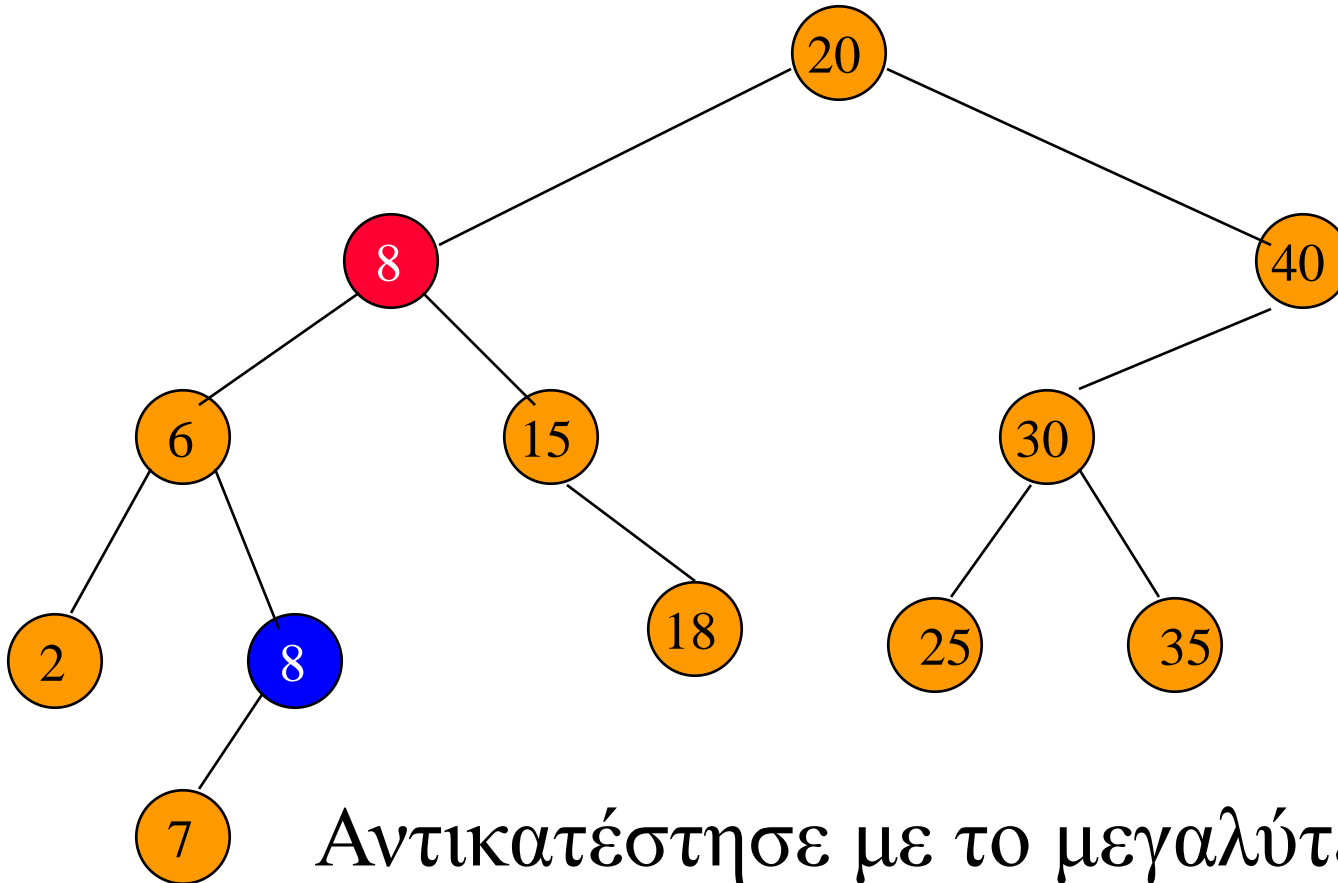
Αφαίρεση κόμβου βαθμού 2 (στοιχείο = 10)

Αφαίρεση κόμβου βαθμού 2



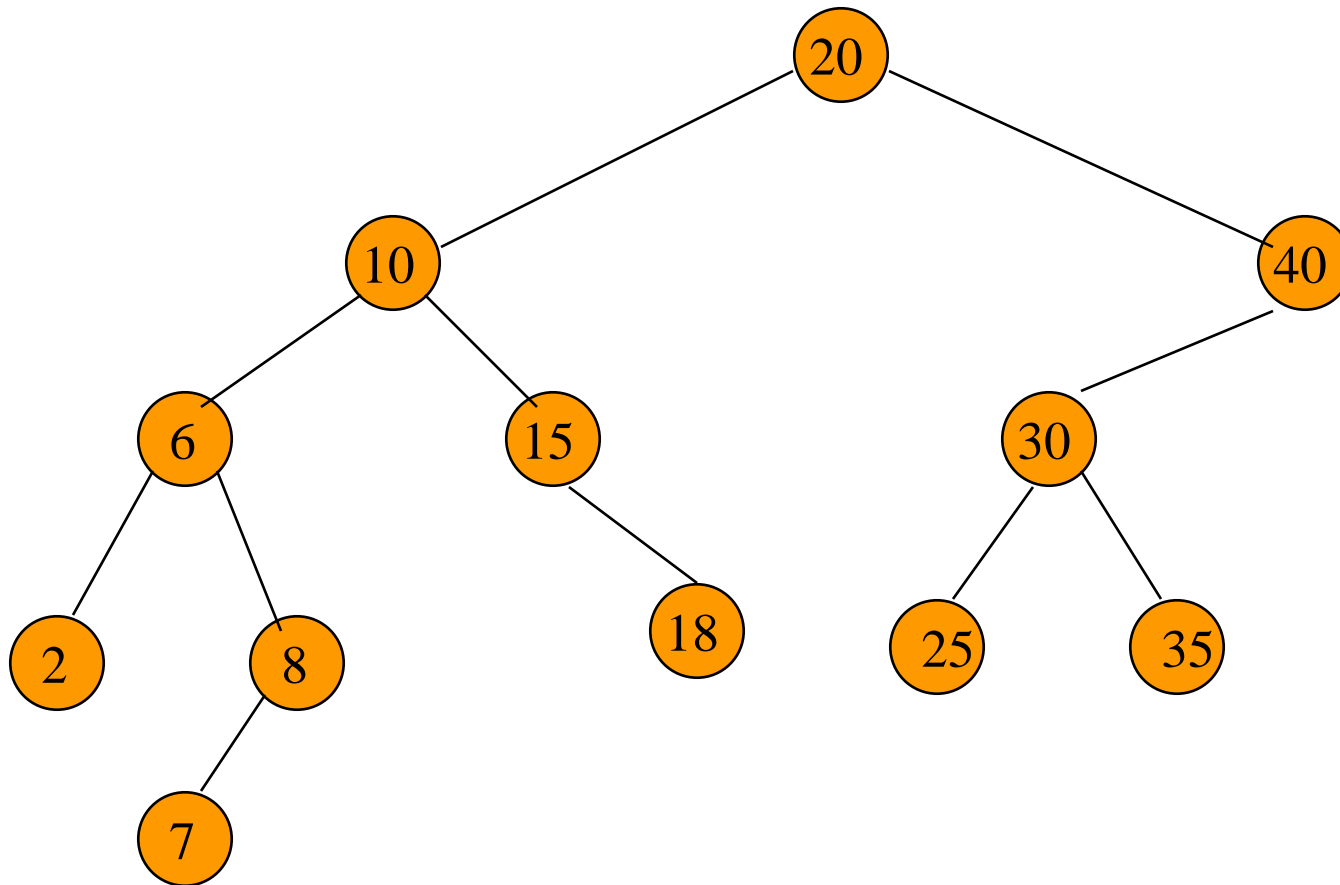
Αντικατέστησε με το μεγαλύτερο στοιχείο του αριστερού υποδένδρου (ή το μικρότερο του δεξιού υποδένδρου)

Αφαίρεση κόμβου βαθμού 2



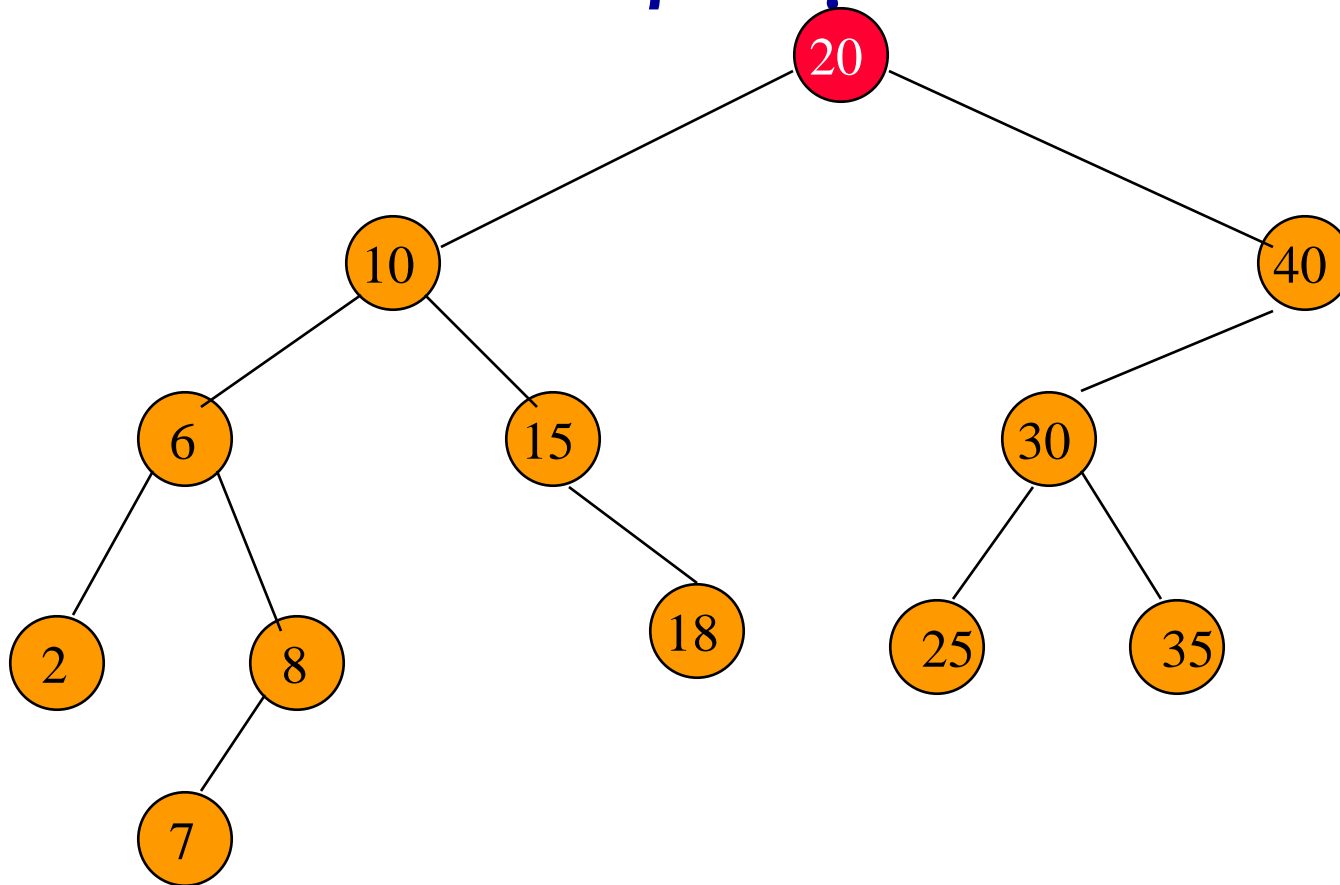
Αντικατέστησε με το μεγαλύτερο στοιχείο του αριστερού υποδένδρου (ή το μικρότερο του δεξιού υποδένδρου)

Άλλο παράδειγμα αφαίρεσης κόμβου βαθμού 2



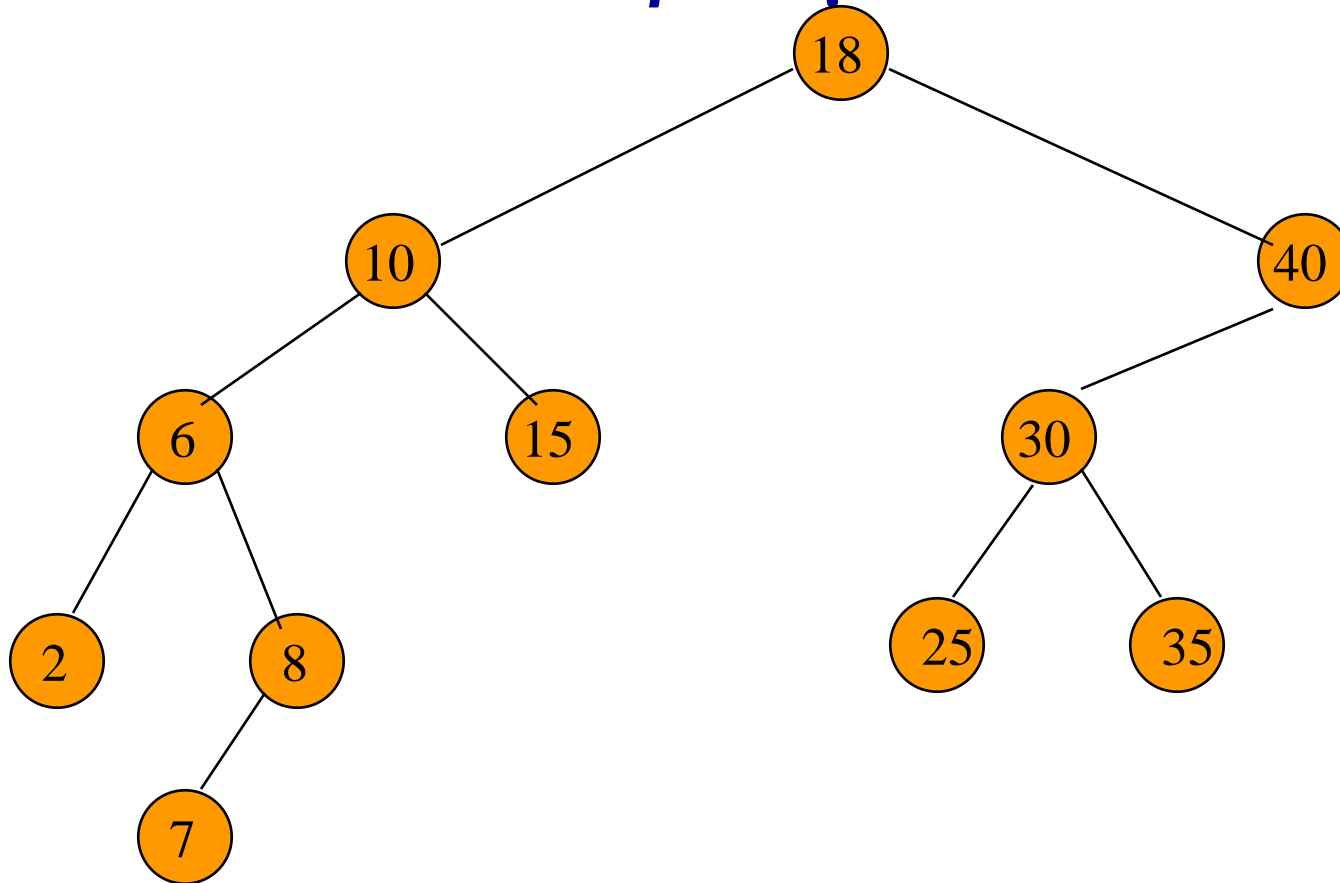
Αφαίρεση 20

Άλλο παράδειγμα αφαίρεσης κόμβου βαθμού 2



Αφαίρεση του μεγαλύτερου από το
αριστερό υποδένδρο.

Άλλο παράδειγμα αφαίρεσης κόμβου βαθμού 2

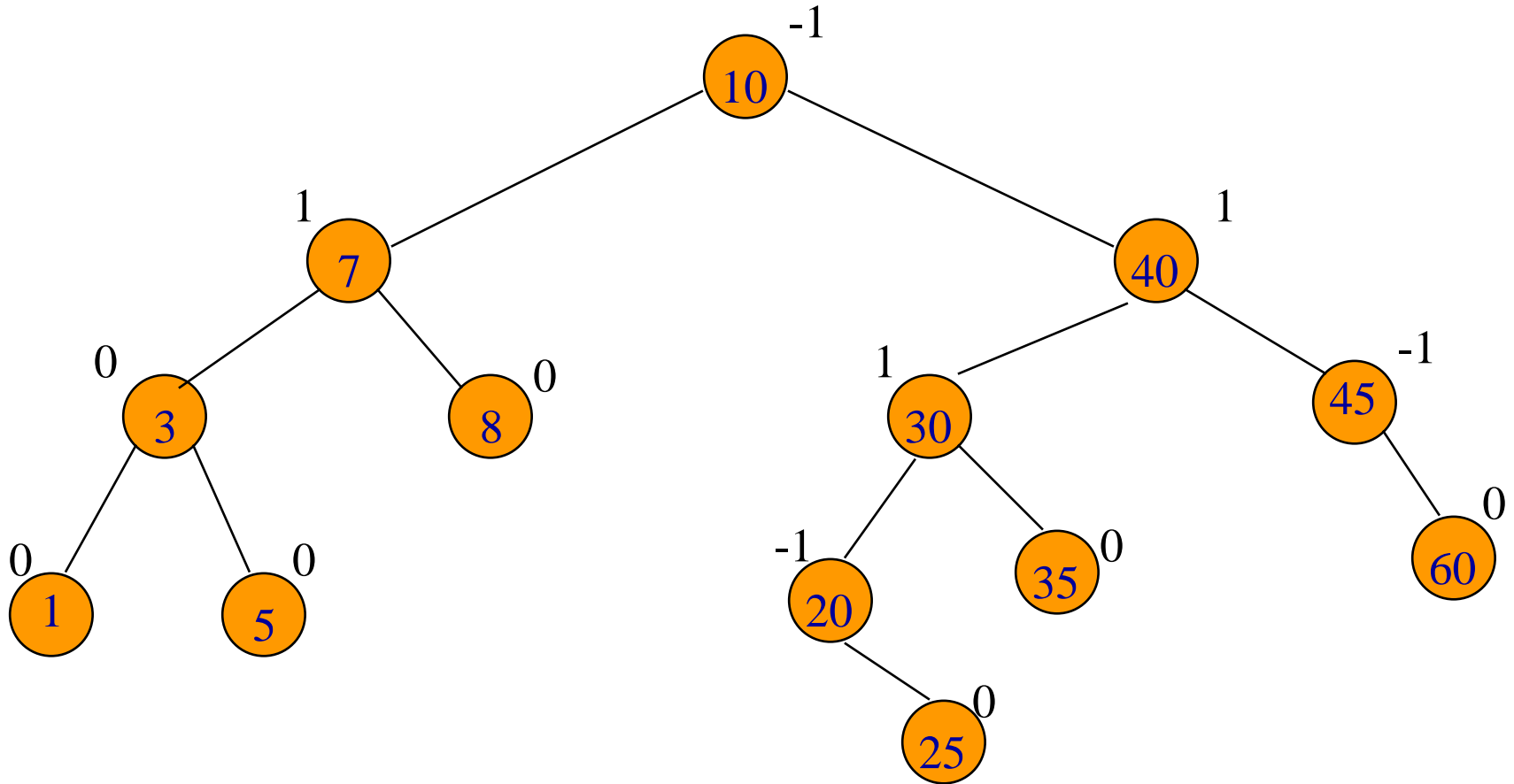


Πολυπλοκότητα: $O(\text{Υψος})$.

Δένδρο AVL

- Δυαδικό δένδρο
- Για κάθε κόμβο x ,
 - Δείκτης Ισορροπίας (ΔI) του $x =$ ύψος του αριστερού υποδένδρου του x
– ύψος του δεξιού υποδένδρου του x
- Ο ΔI του x είναι -1 , 0 , or 1

Δείκτες ισορροπίας



Ένα δένδρο AVL

Ύψος ενός Δένδρου AVL

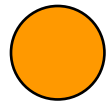
Το ύψος ενός δένδρου AVL το οποίο έχει n κόμβους είναι το πολύ $1.44 \log_2 (n+2)$.

Το ύψος κάθε δυαδικού δένδρου με n κόμβους είναι τουλάχιστον $\log_2 (n+1)$.

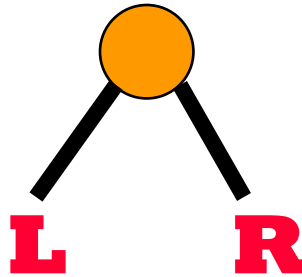
$$\log_2 (n+1) \leq \text{ύψος} \leq 1.44 \log_2 (n+2)$$

Απόδειξη του πάνω ορίου στο ύψος

- Έστω N_h = το ελάχιστο πλήθος των κόμβων σε ένα δένδρο AVL του οποίου το ύψος είναι h .
- $N_0 = 0$.
- $N_1 = 1$.



$$N_h, h > 1$$

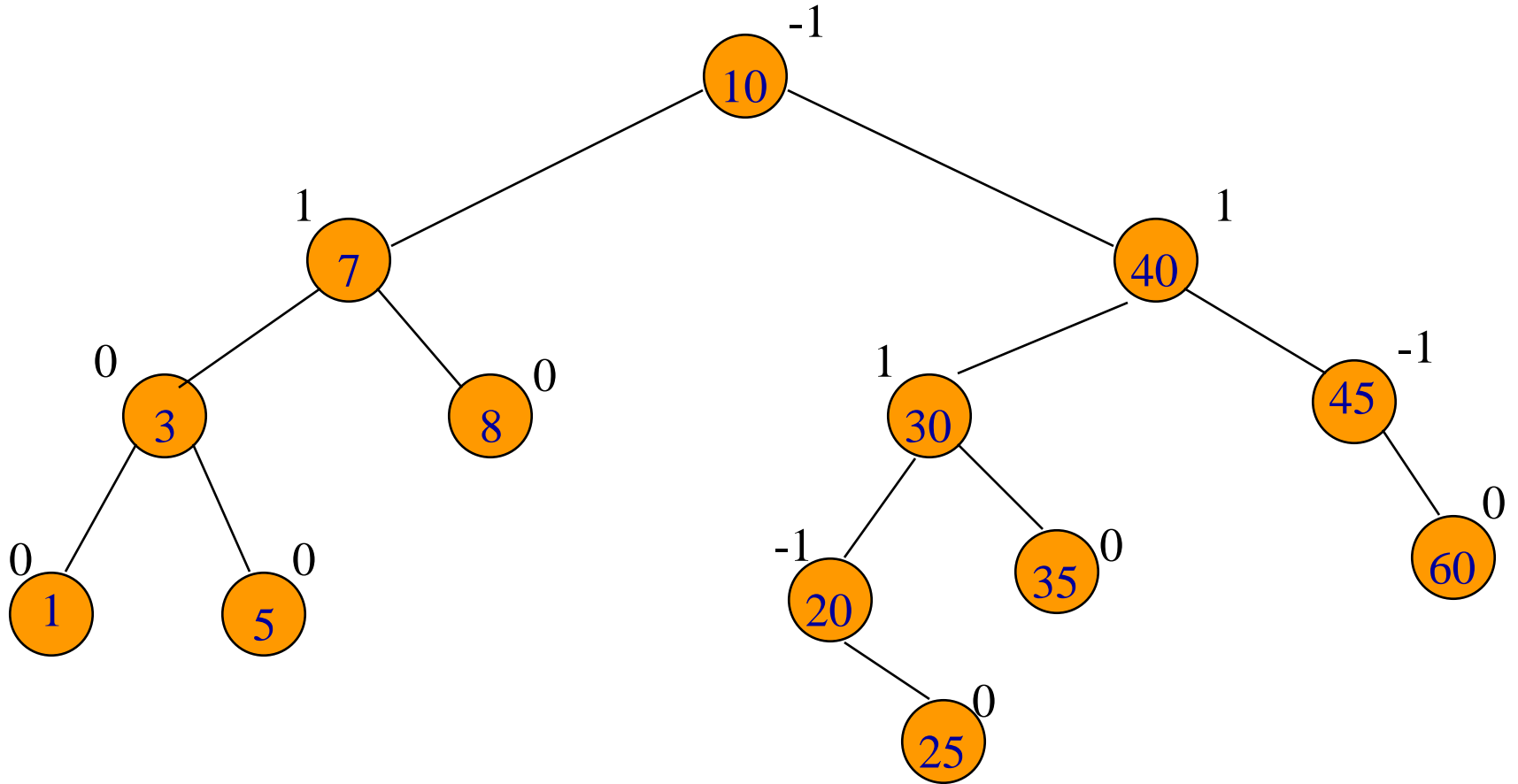


- Τα **L** και **R** είναι δένδρα AVL.
- Το ύψος του ενός είναι **$h-1$** .
- Το ύψος του άλλου είναι **$h-2$** .
- Το υποδένδρο του οποίου το ύψος είναι **$h-1$** έχει **N_{h-1}** κόμβους.
- Το υποδένδρο του οποίου έχει ύψος **$h-2$** έχει **N_{h-2}** κόμβους.
- Έτσι, **$N_h = N_{h-1} + N_{h-2} + 1$** .

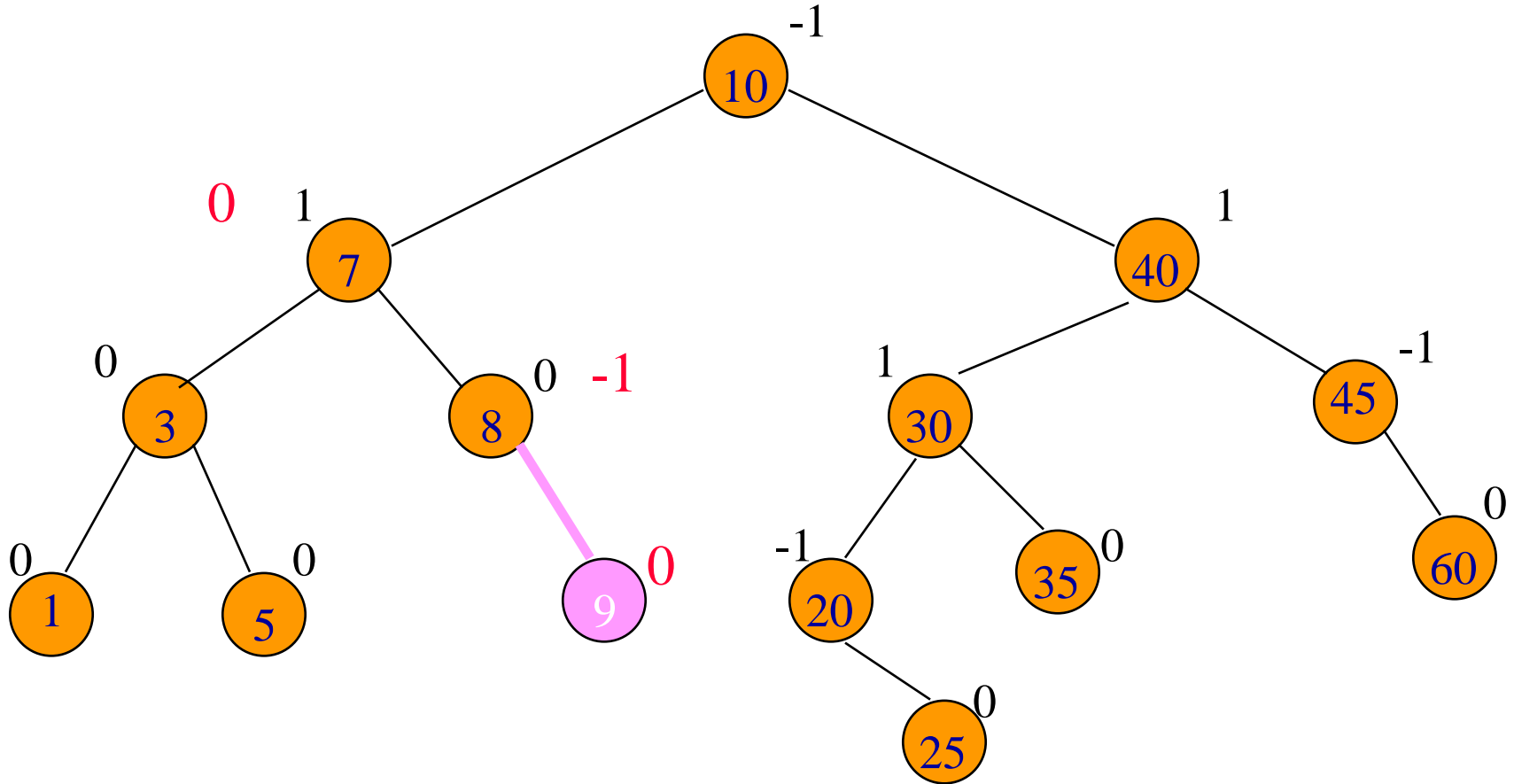
Αριθμοί Fibonacci

- $F_0 = 0, F_1 = 1.$
- $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}, i > 1.$
- $N_0 = 0, N_1 = 1.$
- $N_h = N_{h-1} + N_{h-2} + 1, h > 1.$
- $N_h = F_{h+2} - 1.$
- $F_i \sim \phi^i / \text{sqrt}(5).$
- $\phi = (1 + \text{sqrt}(5))/2.$

Example AVL Tree

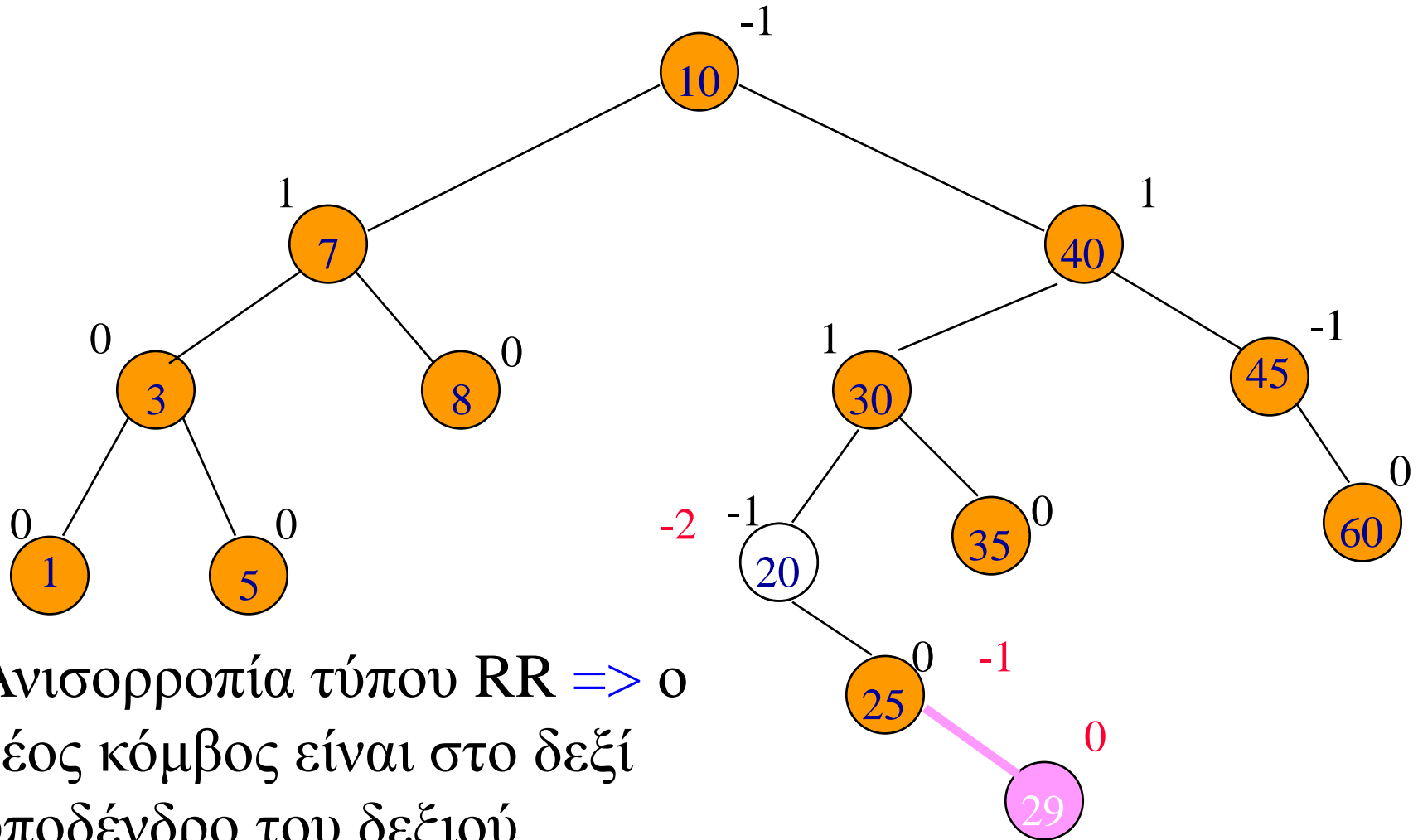


Εισαγωγή του 9



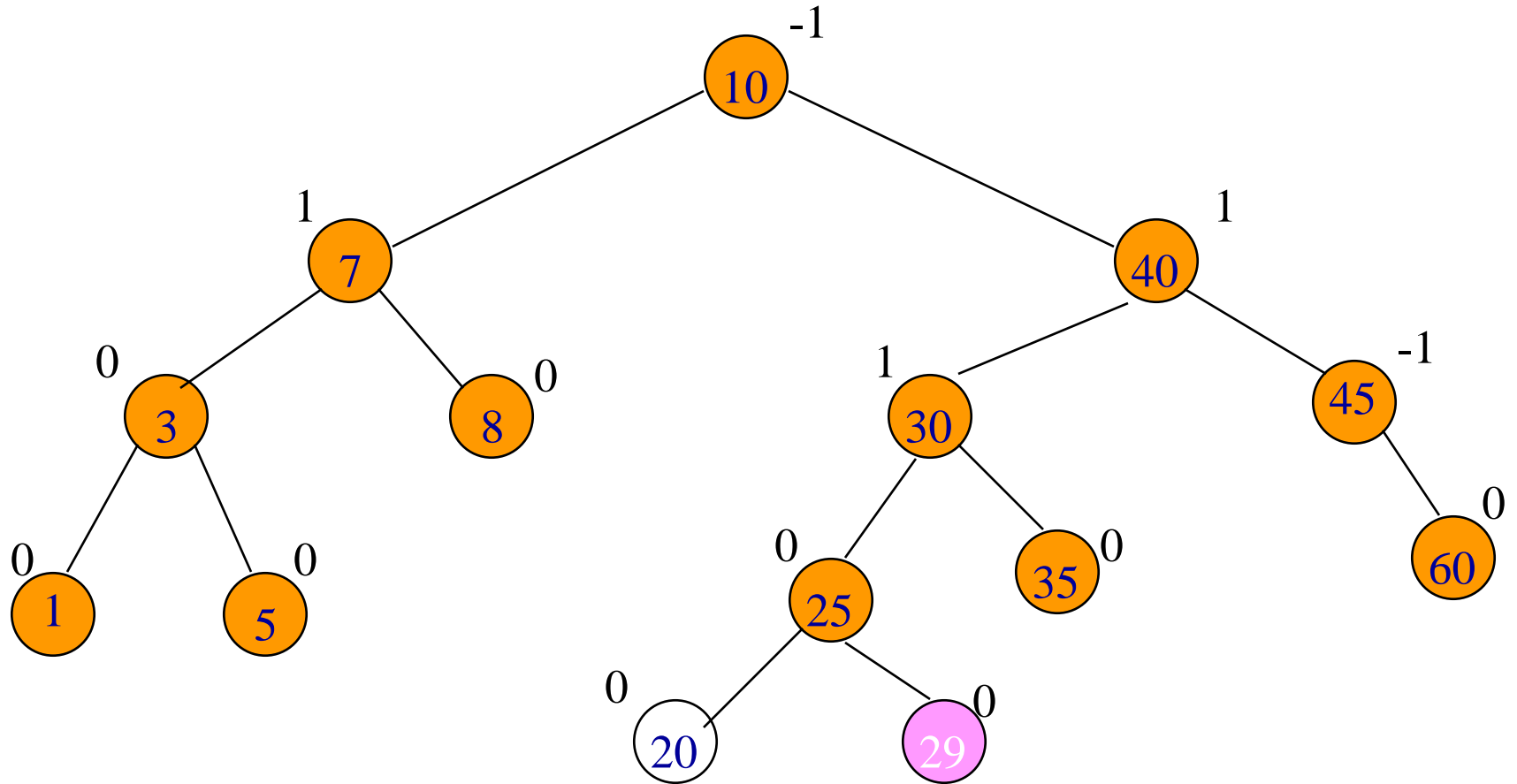
Όταν ο ΔΙ αλλάζει από 0 σε +1 ή -1 το ύψος του υποδένδρου αυξάνει και πρέπει πιθανόν να πάμε προς τη ρίζα προσαρμόζοντας τους ΔΙ

Εισαγωγή του 29



Ανισορροπία τύπου RR \Rightarrow 0
νέος κόμβος είναι στο δεξί
υποδένδρο του δεξιού
υποδένδρου του άσπρου κόμβου
(κόμβος με $\Delta I = -2$)

Εισαγωγή του 29



Περιστροφή RR.

Εισαγωγή στοιχείου

- Μετά από μία εισαγωγή, επισκέψου ξανά το μονοπάτι προς τη ρίζα και προσάρμοσε τους ΔΙ όπου χρειάζονται.
- Σταμάτα όταν φθάσεις σε ένα κόμβο του οποίου ο ΔΙ είναι 2 ή -2 ή όταν φθάσεις στη ρίζα.
- Το νέο δένδρο δεν είναι ένα δένδρο AVL μόνο αν φθάσεις σε ένα κόμβο του οποίου ο ΔΙ είναι είτε 2 ή -2 .
- Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι το δένδρο δεν είναι ζυγισμένο.

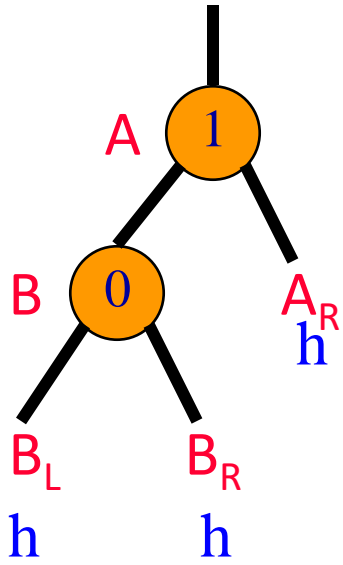
Κόμβος A

- Έστω **A** είναι ο κοντινότερος πρόγονος του κόμβου που μόλις εισήχθη του οποίου ο ΔΙ έγινε **+2** ή **-2** μετά την εισαγωγή.
- Ο ΔΙ όλων των κόμβων μεταξύ του νέου κόμβου και του **A** είναι **0** πριν την εισαγωγή.

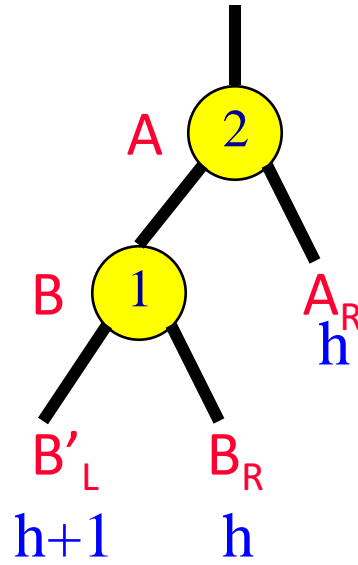
Τύποι ανισορροπίας

- RR ... ο νέος κόμβος είναι στο δεξιό υποδένδρο του δεξιού υποδένδρου του **A**.
- LL ... αριστερό υποδένδρο του αριστερού υποδένδρου του **A**.
- RL... αριστερό υποδένδρο του δεξιού υποδένδρου του **A**.
- LR... δεξί υποδένδρο του αριστερού υποδένδρου του **A**.

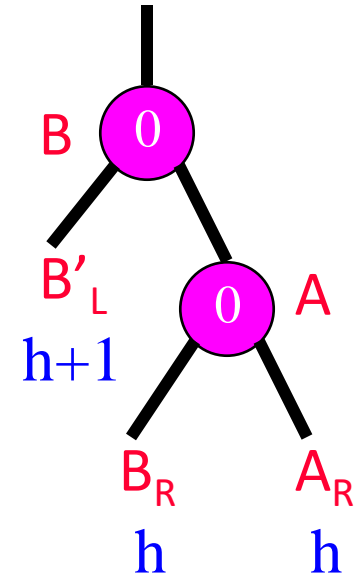
Περιστροφή LL



Πριν την εισαγωγή



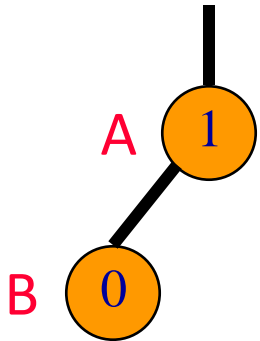
Μετά την εισαγωγή



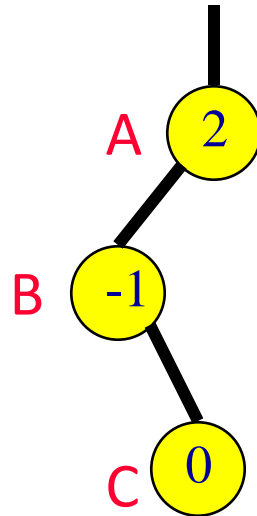
Μετά την
περιστροφή

- Το ύψος του υποδένδρου δεν άλλαξε
- Άλλες ενέργειες δεν χρειάζονται

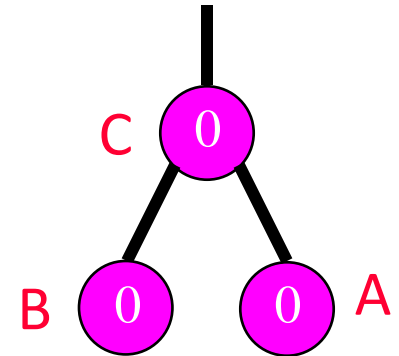
Περιστροφή LR (Περίπτωση 1)



Πριν την εισαγωγή



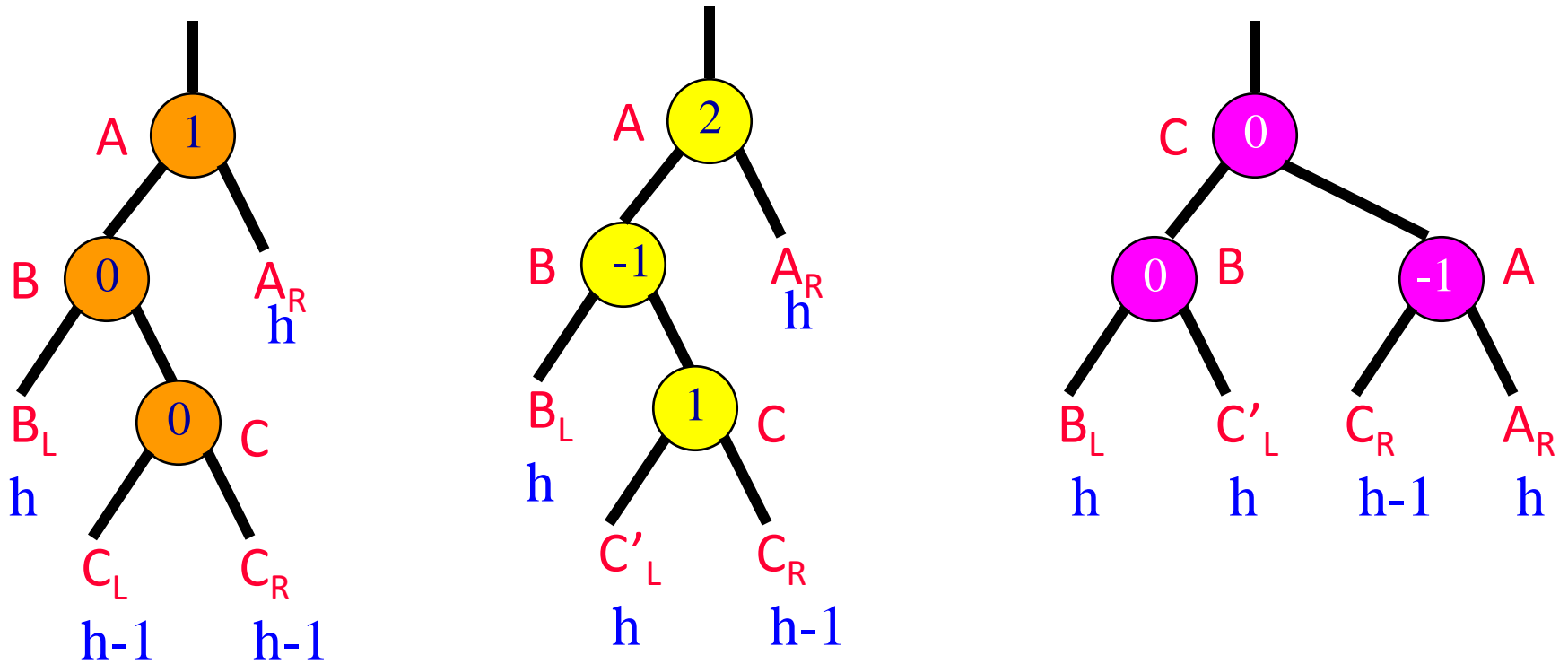
Μετά την εισαγωγή



Μετά την περιστροφή

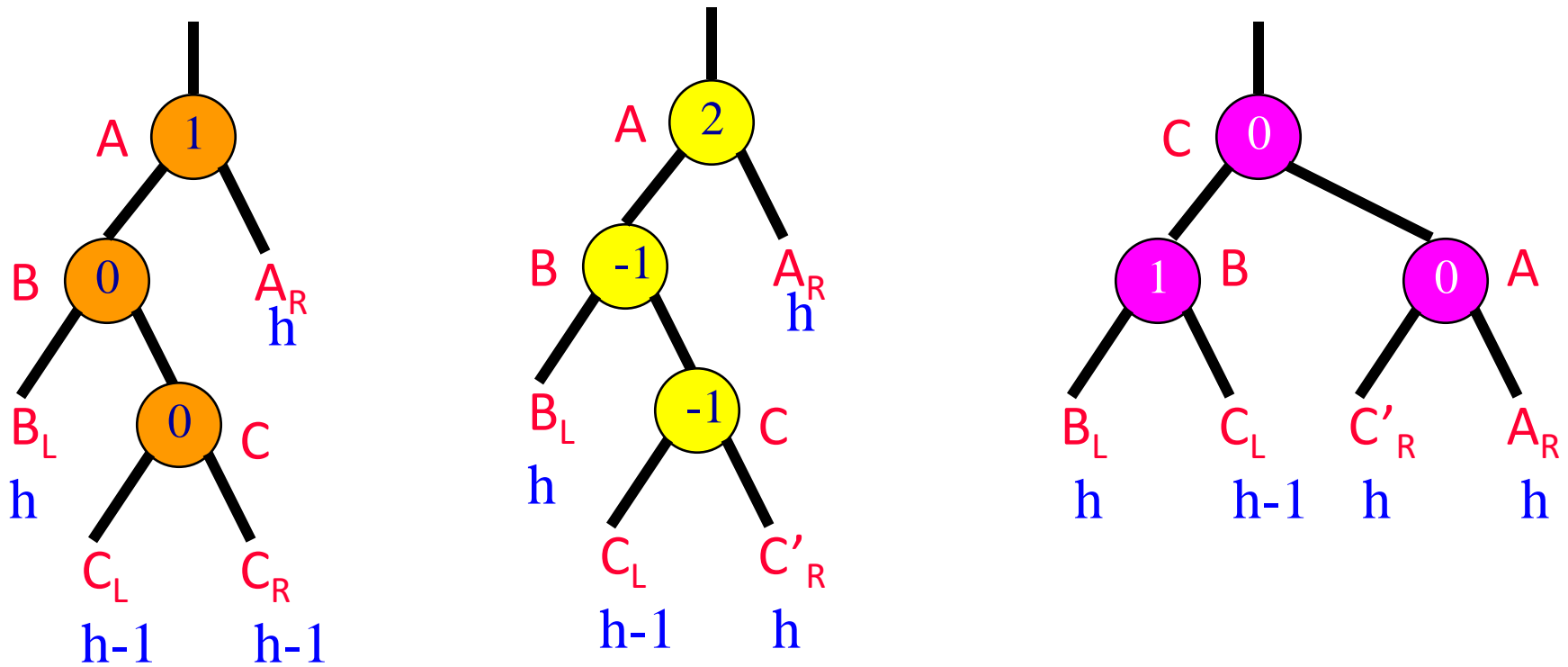
- Το ύψος του υποδένδρου δεν αλλάζει.
- Δεν απαιτούνται άλλες προσαρμογές

Περιστροφή LR (Περίπτωση 2)



- Το ύψος του υποδένδρου παραμένει αμετάβλητο.

Περιστροφή LR (Περίπτωση 3)

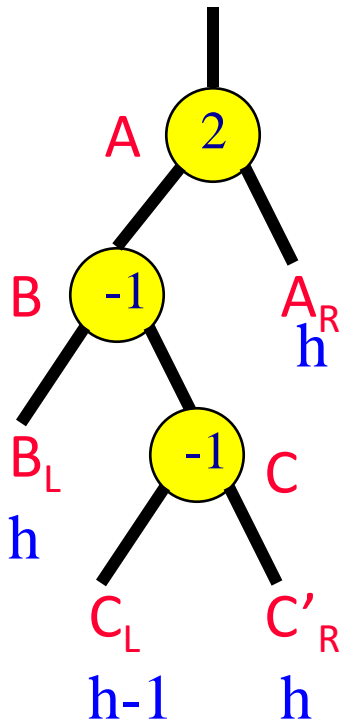


- Το ύψος του υποδένδρου παραμένει αμετάβλητο.
- Δεν χρειάζονται άλλες ενέργειες.

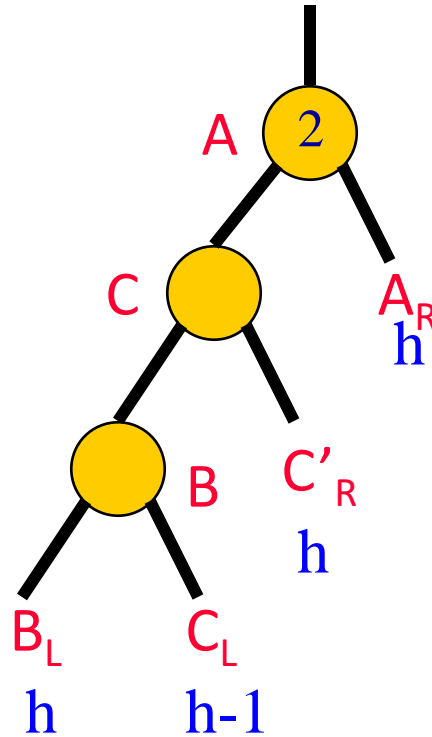
Μονές και Διπλές Περιστροφές

- Μονή
 - LL και RR
- Διπλή
 - LR και RL
 - LR είναι RR ακολουθούμενη από LL
 - RL είναι LL ακολουθούμενη από RR

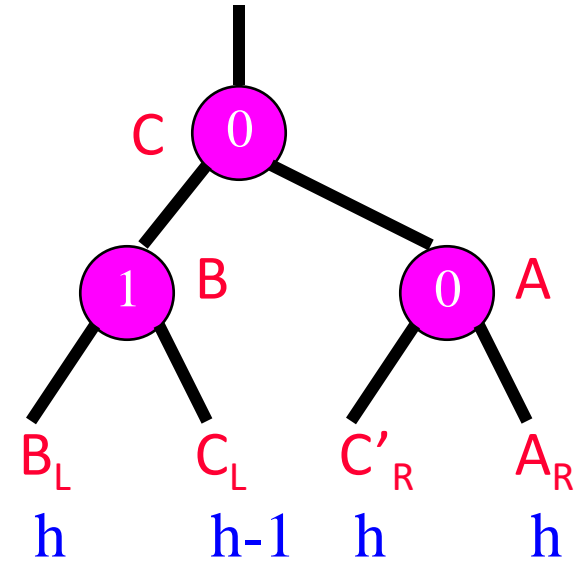
LR είναι RR + LL



Μετά την εισαγωγή

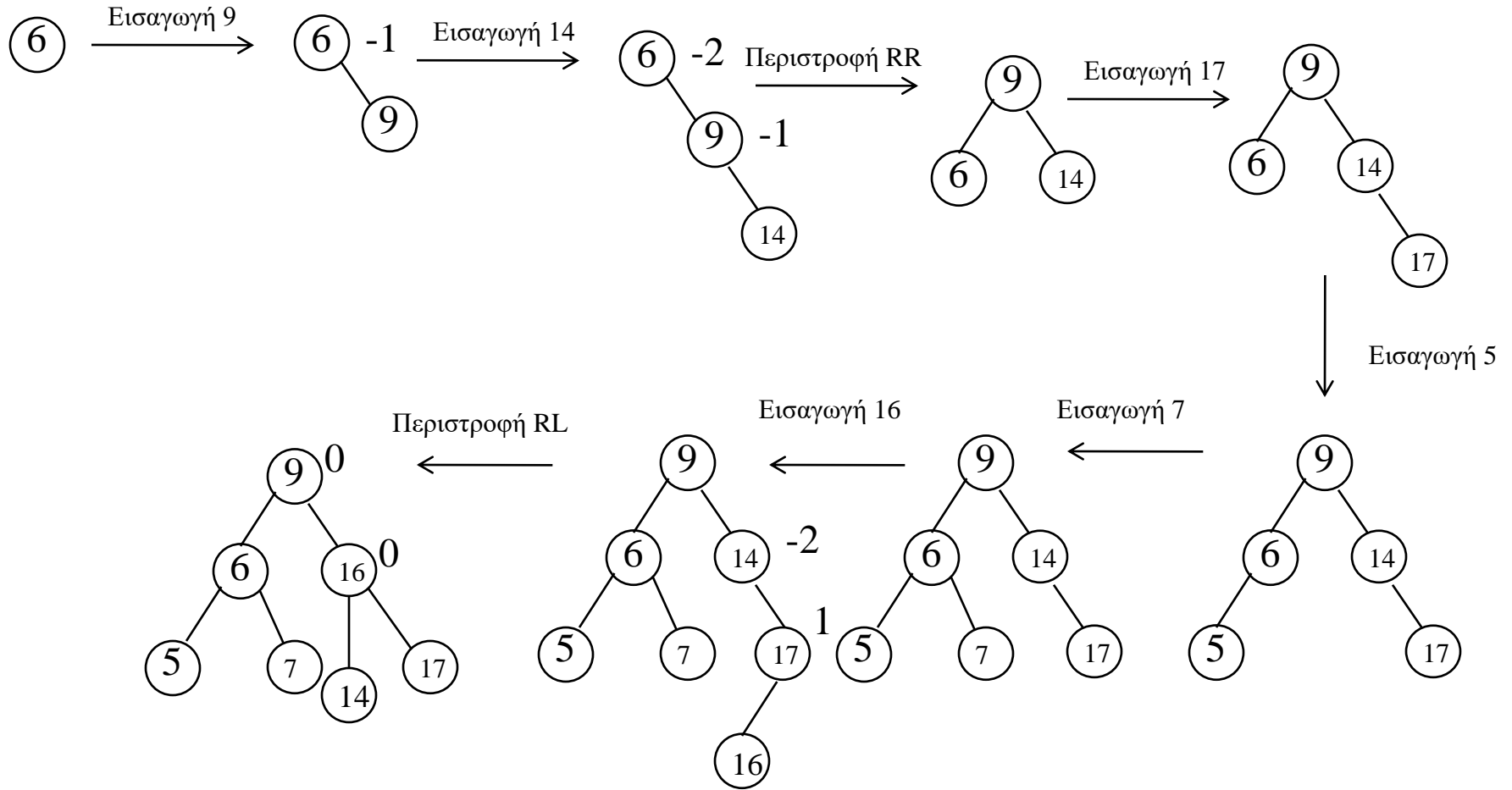


Μετά την περιστροφή
RR

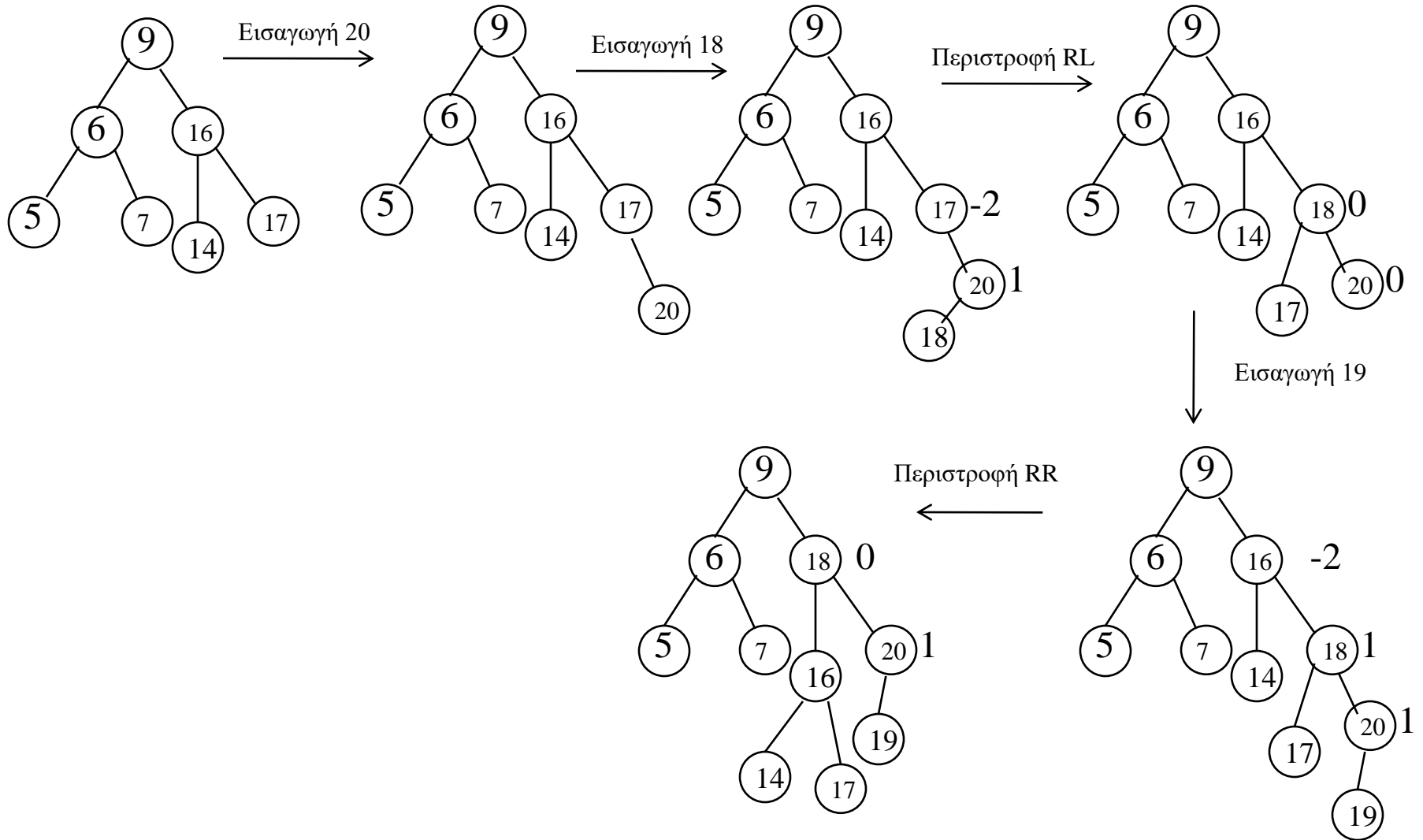


Μετά την περιστροφή
LL

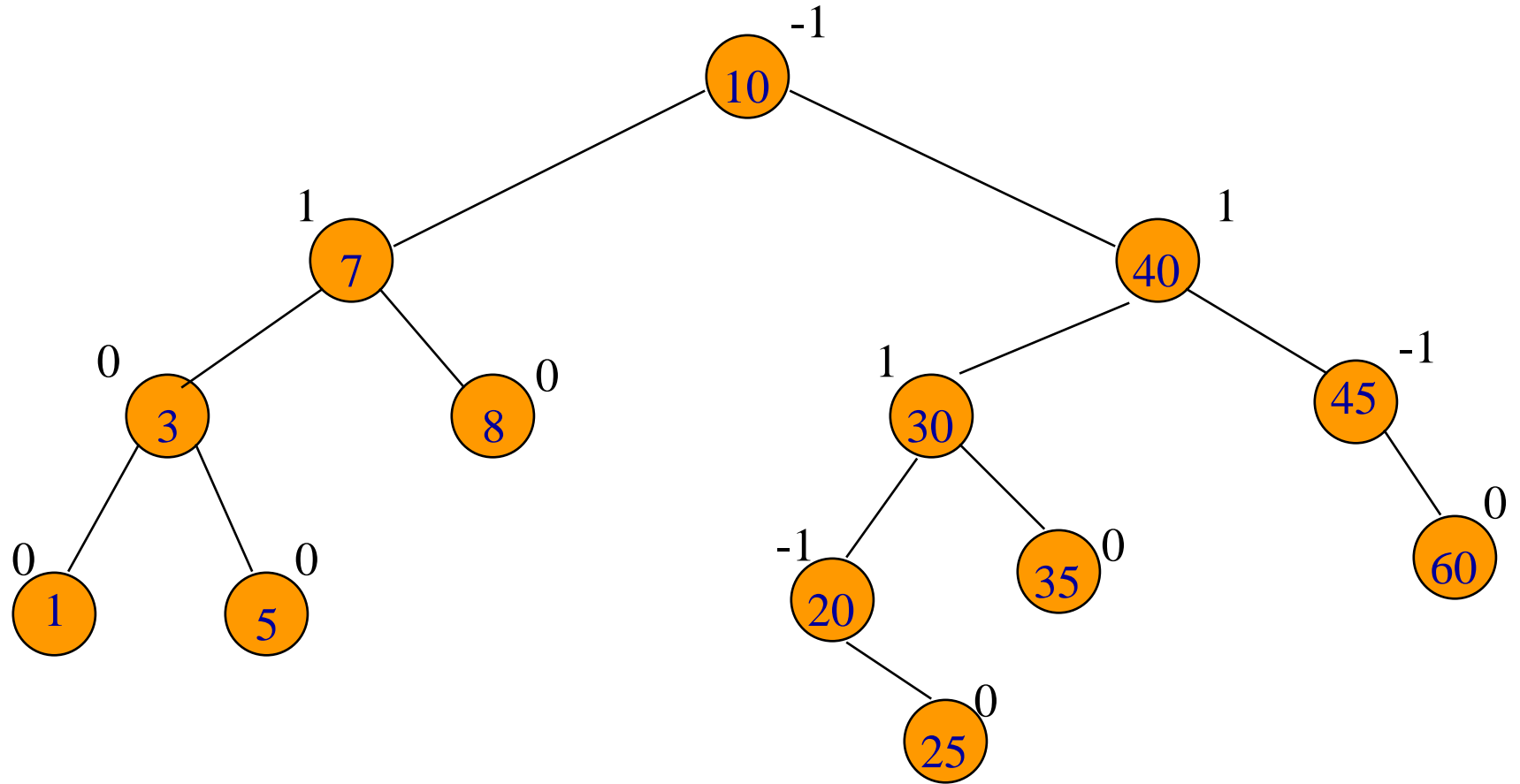
Παράδειγμα εισαγωγών



Παράδειγμα εισαγωγών

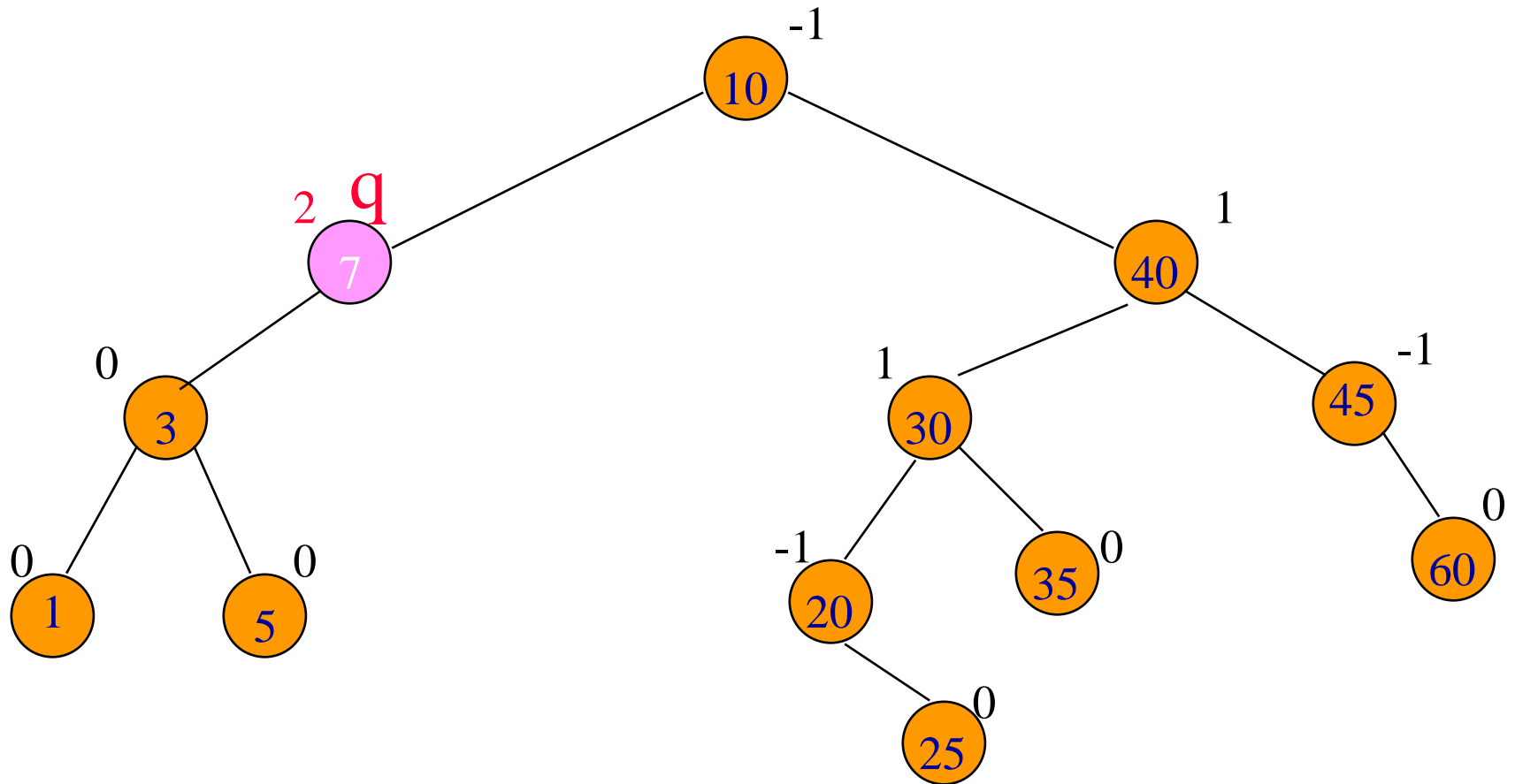


Αφαίρεση ενός στοιχείου



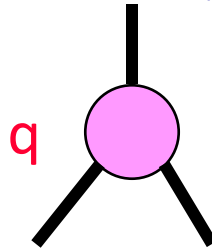
Αφαίρεση του 8

Αφαίρεση ενός στοιχείου



- Έστω q είναι ο πατέρας του διαγραμμένου κόμβου
- Επίσκεψη του μονοπατιού από το q προς τη ρίζα.

Νέος ΔI για το q

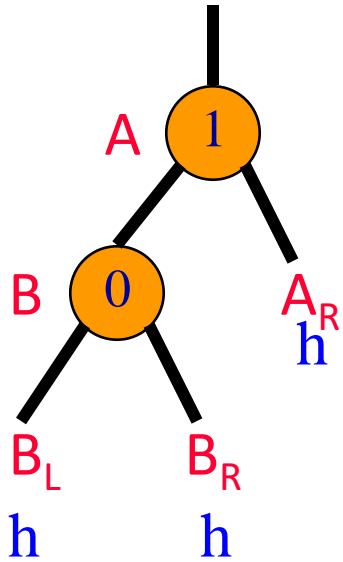


- Διαγραφή από το αριστερό υποδένδρο του $q \Rightarrow \Delta I--$.
- Διαγραφή από το δεξιό υποδένδρο του $q \Rightarrow \Delta I++$.
- Νέος $\Delta I = 1$ or $-1 \Rightarrow$ καμία αλλαγή στο ύψος του υποδένδρου με ρίζα το q .
- Νέος $\Delta I = 0 \Rightarrow$ το ύψος του δένδρου με ρίζα το q έχει μειωθεί κατά 1.
- Νέος $\Delta I = 2$ or $-2 \Rightarrow$ το δένδρο δεν είναι ισορροπημένο στο q .

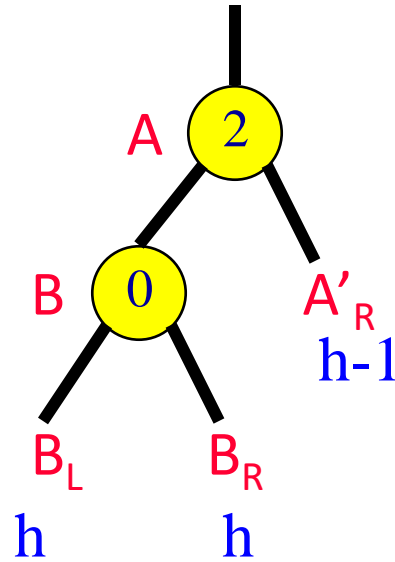
Κατηγοριοποίηση ανισορροπίας

- Έστω **A** ο κοντινότερος πρόγονος του διαγραμμένου κόμβου του οποίου ο ΔI έχει γίνει **2** ή **-2** μετά τη διαγραφή.
- Διαγραφή από το αριστερό υποδένδρο του **A** \Rightarrow τύπος **L**.
- Διαγραφή από το δεξιό υποδένδρο του **A** \Rightarrow τύπος **R**.
- Τύπος **R** \Rightarrow νέος $\Delta I(A) = 2$.
- Έτσι, παλιός $\Delta I(A) = 1$.
- Έτσι, **A** έχει ένα αριστερό παιδί **B**.
 - $\Delta I(B) = 0 \Rightarrow R0$.
 - $\Delta I(B) = 1 \Rightarrow R1$.
 - $\Delta I(B) = -1 \Rightarrow R-1$.

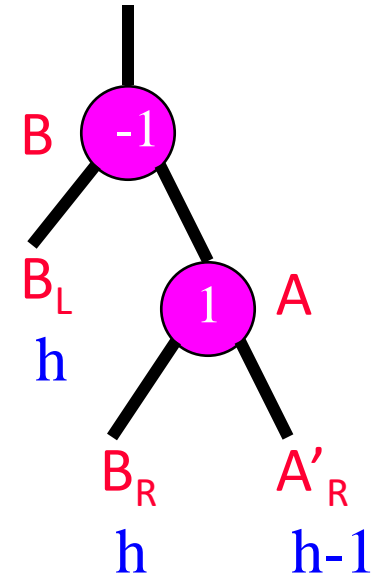
Περιστροφή R0



Πριν τη διαγραφή



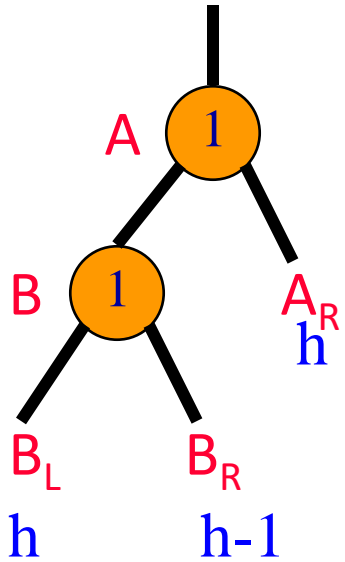
Μετά τη διαγραφή



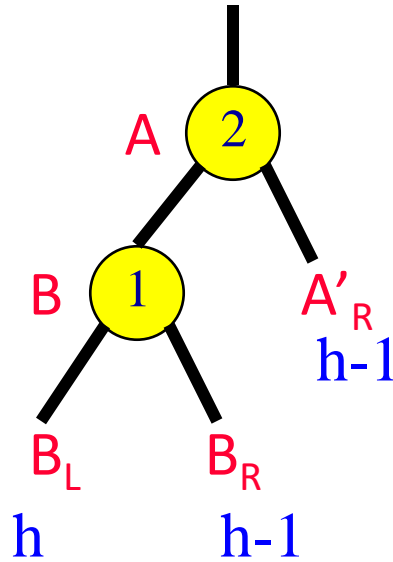
Μετά τη περιστροφή

- Το ύψος του υποδένδρου δε μεταβάλλεται
- Καμία άλλη ενέργεια δεν απαιτείται
- Όμοια με τη περιστροφή **LL**

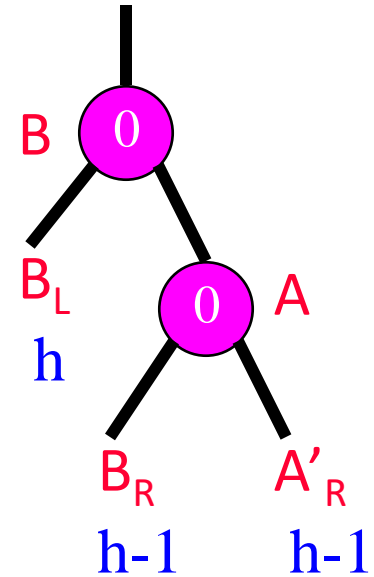
Περιστροφή R1



Πριν τη διαγραφή



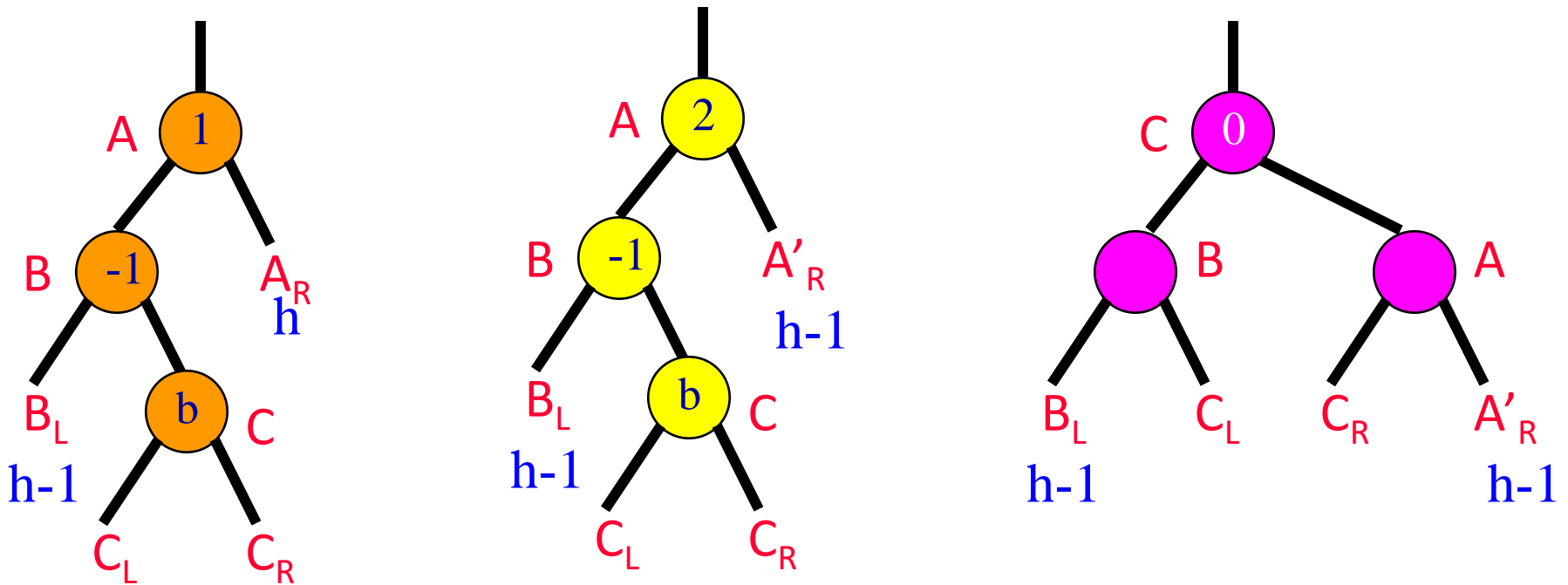
Μετά τη διαγραφή



Μετά τη περιστροφή

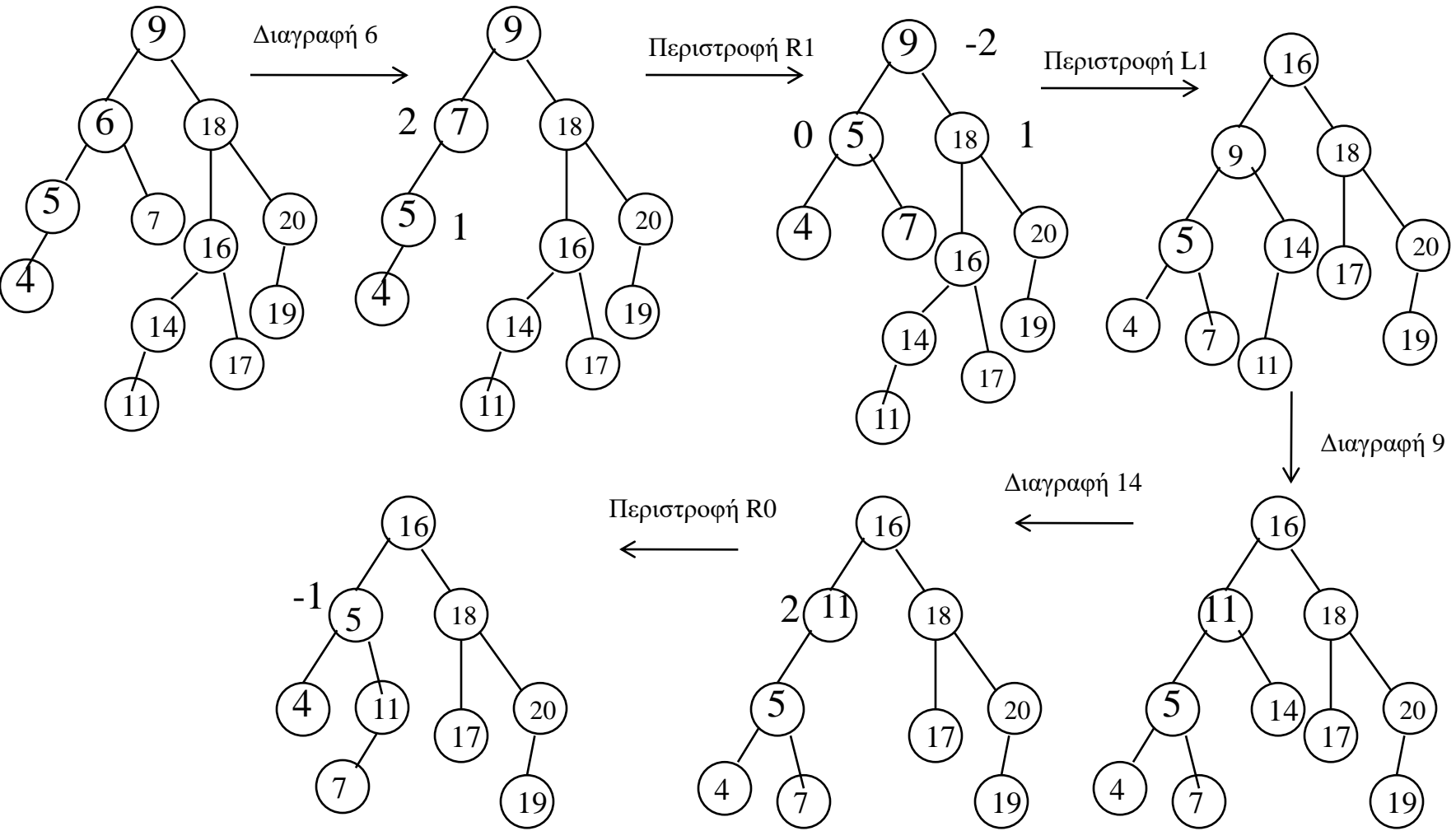
- Το ύψος του υποδένδρου μειώνεται κατά **1**.
- Πρέπει να συνεχίσουμε προς τη ρίζα.

Περιστροφή R-1



- Οι νέοι ΔI των **A** και **B** εξαρτώνται από το **b**.
 - $b=0 \rightarrow \Delta I(A)=\Delta I(B)$ μετά τη περιστροφή
 - $b=1 \rightarrow \Delta I(A)=-1$ και $\Delta I(B)=0$ μετά τη περιστροφή
 - $b=-1 \rightarrow \Delta I(A)=0$ και $\Delta I(B)=1$ μετά τη περιστροφή
- Το ύψος του υποδένδρου μειώνεται κατά **1**.
- Πρέπει να συνεχίσουμε προς τη ρίζα.

Παράδειγμα διαγραφών



Πλήθος περιστροφών

- Το πολύ **1** για εισαγωγή.
- **$O(\log n)$** για διαγραφή.

Συχνότητα Περιστροφών

- Εισαγωγή τυχαίων αριθμών
 - Δε χρειάζονται περιστροφές ... 53.4% (approx).
 - LL/RR ... 23.3% (approx).
 - LR/RL ... 23.2% (approx).