ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Τμήμα Πληροφορικής

Ανάλυση Ι

2016-2017

1ο Φροντιστήριο (Ασκήσεις)

Όνομα / Αρ.Μητρώου	***Κωνσταντακάτος Γρηγόρης Π12068***

Ασκήσεις

▸ Άσκηση 1

Να βρεθούν τα ευρύτερα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, στα οποία ορίζονται οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \sqrt{\ln \frac{5x - x^2}{4}}$

Πρέπει: $\ln \frac{5x-x^2}{4} \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{5x-x^2}{4} \geq 1 \Longleftrightarrow -x^2+5x-4 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2-5x+4 \leq 0 \Longleftrightarrow$
$(x-1)(x-4) \leq 0$

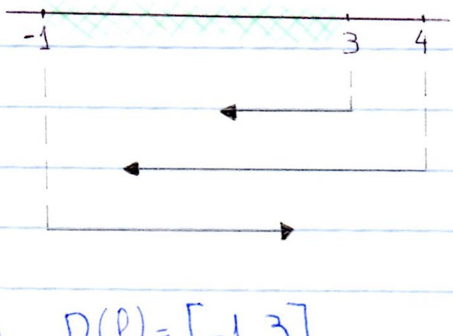
Άρα $1 \leq x \leq 4$, οπότε $D(f) = [1,4]$

β) $f(x) = \sqrt{3-x} + \arcsin\left(\frac{3-2x}{5}\right)$

Υπενθύμιση: $\arcsin x : [-1,1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Πρέπει: $\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ \left|\frac{3-2x}{5}\right| \leq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ -1 \leq \frac{3-2x}{5} \leq 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ -5 \leq 3-2x \leq 5 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\begin{cases} x \leq 3 \\ -8 \leq -2x \leq 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 4 \geq x \geq -1 \end{cases}$



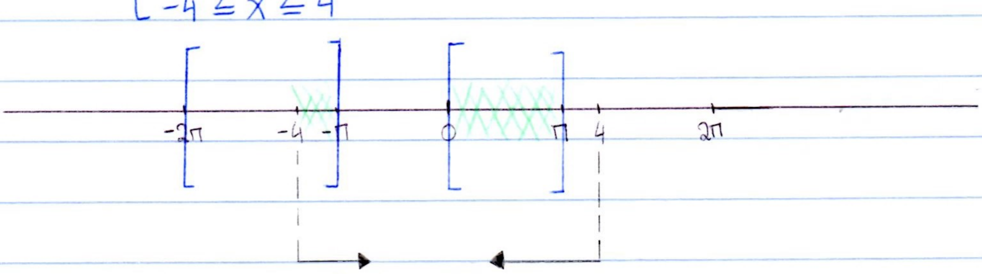
Άρα $D(f) = [-1, 3]$

γ) $f(x)=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$

Πρέπει: $\begin{cases}\sin x \geq 0\\ 16-x^2 \geq 0\end{cases}$

Υπενθύμιση: $\sin x \geq 0 \Longleftrightarrow x \in [2k\pi, 2k\pi+\pi],\ k \in \mathbb{Z}$

Άρα $\begin{cases} x \in [2k\pi, 2k\pi+\pi],\ k \in \mathbb{Z}\\ -4 \leq x \leq 4\end{cases}$



Άρα $D(f)=[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$

▸ Άσκηση 2

Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$\boxed{\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y}$ (1)

α) $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$

Θέτουμε στην (1), $y=\frac{\pi}{2}$

Άρα έχουμε $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{2}=0+\sin x\cdot 1=\sin x$

β) $\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

Θέτουμε στην (1), $y=-x$

Άρα έχουμε $\cos 2x=\cos x\cdot\cos(-x)+\sin x\sin(-x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

γ) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) \overset{*}{=} \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x \overset{(6)}{=}$$
$$= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin x = \cos^3 x - \sin^2 x \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cos x$$
$$= \cos^3 x - 3\sin^2 x \cdot \cos x = \cos^3 x - 3(1-\cos^2 x)\cdot \cos x = \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x =$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί ο τύπος των αντίστροφων των παρακάτω συναρτήσεων

α) $f(x) = x^2+1 \,/\, [0,+\infty)$

Θέτουμε $y = x^2+1$

Θα λύσουμε ως προς x.

Ισοδύναμα, ισχύει ότι $x^2 = y-1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$

Επειδή $x \geq 0$, επιλέγουμε ως τύπο της αντίστροφης την θετική ρίζα

δηλαδή: $x = +\sqrt{y-1}$

Άρα, $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} \,/\, [1,+\infty)$

β) $f(x) = \dfrac{ax-b}{cx-a} \,/\, \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{a}{c}\right\}$

Θέτουμε $y = \dfrac{ax-b}{cx-a}$

Φέρνουμε αριστερά το ay και βγάζουμε κοινό παράγοντα το x.

Ισοδύναμα, ισχύει ότι: $y(cx-a) = ax-b \Leftrightarrow x(cy-a) = ay-b$

Άρα, $f^{-1}(x) = \dfrac{ax-b}{cx-a}$

Δηλαδή, η f είναι ίση με την αντίστροφή της.
(involution ≡ αυτοαντίστροφη)

γ) $f(x) = \sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$

Έστω $y = \sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$

Υπενθύμιση: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

Ισοδύναμα: $y^3=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)+3\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)}\cdot y=$

$$=2x+3\sqrt[3]{\cancel{x^2}-(1+\cancel{x^2})}\cdot y=2x-3y$$

Άρα, $x=\dfrac{y^3+3y}{2}$, επομένως $f^{-1}(x)=\dfrac{x^3+3x}{2}$

δ) $f(x)=2\sin 3x \,/\, \left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$

$\arcsin\frac{y}{2}=\arcsin(\sin 3x)$

Θέτουμε $y=2\sin 3x$.

Ισοδύναμα $\dfrac{y}{2}=\sin 3x \Leftrightarrow \arcsin\left(\dfrac{y}{2}\right)=3x$, $\dfrac{y}{2}\in[-1,1]$

$\boxed{-\frac{\pi}{2}\le 3x\le\frac{\pi}{2}}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}\arcsin\left(\dfrac{y}{2}\right)$

Άρα, $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $\left|\dfrac{x}{2}\right|\le 1\Rightarrow |x|\le 2$

ε) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x \,/\, \mathbb{R}$

Θέτουμε $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\Leftrightarrow 2y=e^x-e^{-x}\Leftrightarrow 2ye^x=e^{2x}-1\Leftrightarrow e^{2x}-2ye^x-1=0$

$\Leftrightarrow e^x=\dfrac{2y\pm\sqrt{(2y)^2+4}}{2}=\dfrac{\cancel{2}\left(y\pm\sqrt{y^2+1}\right)}{\cancel{2}}=y\pm\sqrt{y^2+1}$

Αφού $e^x>0$, πρέπει $y\pm\sqrt{y^2+1}>0$

• Ας δοκιμάσουμε αν $y-\sqrt{y^2+1}>0\Leftrightarrow$
$y>\sqrt{y^2+1}\Leftrightarrow$
$y^2>y^2+1$, άτοπο

• Άρα, επιλέγουμε ως $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$

Άρα, $x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$

Άρα, $f^{-1}(x)=\operatorname{arcsinh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

▸ Άσκηση 4

Να εξετασθεί αν η συνάρτηση $f(x)=\sin^2 x$ είναι περιοδική ή όχι.

$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ και

$\sin^2(x+2\pi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2(x+2\pi)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \sin^2 x$

Άρα, ναι είναι περιοδική.

▸ Άσκηση 5 (Βιβλίο, Λυμένη Άσκηση 59, Κεφάλαιο 1)

Έστω $f/\mathbb{R}$, όχι σταθερή, η οποία ικανοποιεί την σχέση:

$f(x)+f(t) = 2f\left(\frac{x+t}{2}\right) f\left(1+\frac{x-t}{2}\right)$, $\forall x,t \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $f(1)=1$.

Για $x=t=1$, έχουμε: $f(1)+f(1) = 2f(1)\cdot f(1+0) \Leftrightarrow 2f(1) = 2f^2(1) \Leftrightarrow$

$f^2(1) - f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1)(f(1)-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1)=1 \\ \text{ή} \\ f(1)=0 \end{cases}$

Θα δείξουμε ότι $f(1)\neq 0$.

Έστω $f(1)=0$.

Θέτουμε $x=t$, άρα έχουμε: $f(x)+f(x) = 2f\left(\frac{x+x}{2}\right) f\left(1+\frac{x-x}{2}\right) \Leftrightarrow$

$2f(x) = 2f(x)\cdot f(1) \Leftrightarrow 2f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$,

δηλαδή f σταθερή, άρα άτοπο

Άρα $f(1)\neq 0$, επομένως $f(1)=1$