

ΚΕΦ. 7: ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ
Σημειώσεις Φροντιστηρίου

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να υπολογισθούν με τη βοήθεια του πορίσματος 2.4 τα όρια των ακολουθιών (α_n) , (β_n) και (γ_n) , όταν:

$$(i) \quad \alpha_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}, \quad (ii) \quad \beta_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{2n^2},$$

$$(iii) \quad \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n^2}}.$$

ΛΥΣΗ

Θα εφαρμοσθεί ο τύπος

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta - \alpha}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} i\right).$$

Σε κάθε μια από τις δοσμένες ακολουθίες πρέπει να προσδιορισθεί η κατάλληλη συνάρτηση $f / [\alpha, \beta]$ για την εφαρμογή του τύπου.

$$(i) \alpha_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}},$$

οπότε στην περίπτωση αυτή ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x} / [0,1]$ και είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^n f\left(0 + \frac{1-0}{n} i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n.$$

Άρα,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

$$(ii) \beta_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{2n^2} = \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2+i^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2},$$

οπότε ορίζεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} / [0,1]$$

και είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^n f\left(0 + \frac{1-0}{n}i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n.$$

Άρα,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = [\arctg x]_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$(iii) \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+(i/n)^2}}$$

οπότε ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} / [0,1]$ και είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^n f\left(0 + \frac{1-0}{n} i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+(i/n)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, τίθεται $x = \sinh t$, οπότε θα είναι

$$dx = \cosh t dt, \sqrt{1+x^2} = \cosh t \text{ και } t = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \text{ διότι}$$

$$x = \sinh t \Leftrightarrow x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Leftrightarrow e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2xy - 1 = 0, \quad y > 0$$

$$\Leftrightarrow y = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow t = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$\text{Επομένως, προκύπτει ότι } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh t}{\cosh t} dt = [t]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} = \ln(1+\sqrt{2}).$$

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \ln(1+\sqrt{2})$.

ΑΣΚΗΣΗ 19(β)

Να ευρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης G με $G(x) = \int_0^{\cos(3x^2+2x+5)} \frac{1}{\sqrt{2-t^2}} dt / \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x) = \cos(3x^2 + 2x + 5) / \mathbb{R}$ και

$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2-t^2}} dt / (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} / (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

είναι συνεχής, έπεται ότι η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ για κάθε

$x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Εξάλλου, επειδή $R(g) \subset (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ορίζεται η σύνθεση των συναρτήσεων g, F και είναι $G = F \circ g$. Τότε, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} G'(x) &= (F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = \frac{-\sin(3x^2 + 2x + 5)(3x^2 + 2x + 5)'}{\sqrt{2 - \cos^2(3x^2 + 2x + 5)}} \\ &= -\frac{6x + 2}{\sqrt{1 + \sin^2(3x^2 + 2x + 5)}} \sin(3x^2 + 2x + 5). \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 21(α)

Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x \frac{t^3}{t^4 + 2} dt$,

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $F(x) = \int_0^x \frac{t^3}{t^4 + 2} dt / \mathbb{R}$ τότε επειδή η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2} / \mathbb{R}$ είναι

συνεχής, έπεται ότι η συνάρτηση F / \mathbb{R} είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2}$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Κατόπιν τούτων, είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x \frac{t^3}{t^4 + 2} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{(x^4)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{x^4 + 2}}{4x^3} = \frac{1}{8}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 26

α) Αν για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f / [0, \alpha]$, όπου $\alpha > 0$, ισχύει η σχέση $f(\alpha - x) = f(x)$, για κάθε $x \in [0, \alpha]$, να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{\alpha} xf(x) dx = \frac{1}{2} \alpha \int_0^{\alpha} f(x) dx.$$

β) Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $I = \int_0^{\alpha} xf(x) dx$, οπότε, για $y = \alpha - x$, προκύπτει ότι

$$I = -\int_{\alpha}^0 (\alpha - y) f(\alpha - y) dy = \alpha \int_0^{\alpha} f(y) dy - \int_0^{\alpha} yf(y) dy = \alpha \int_0^{\alpha} f(x) dx - I.$$

Άρα,

$$2I = \alpha \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

οπότε

$$I = \frac{1}{2} \alpha \int_0^{\alpha} f(x) dx.$$

β) Αν εφαρμοσθεί το α) για τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} / [0, \pi]$$

προκύπτει ότι

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (1)$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος θέτουμε $z = \cos x$, οπότε $dz = -\sin x dx$ και άρα,

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\int_1^{-1} \frac{dz}{1 + z^2} = \int_{-1}^1 \frac{dz}{1 + z^2} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 31

Να υπολογισθούν οι τιμές των ορισμένων ολοκληρωμάτων:

$$\alpha) \int_0^1 x \arctg x dx, \quad \beta) \int_1^e x^2 (\ln x)^2 dx.$$

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \arctg x dx &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)' \arctg x dx = \left[\frac{x^2}{2} \arctg x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} (\arctg x)' dx \\ &= \frac{1}{2} \arctg 1 - 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} [x]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} [\arctg x]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{4} (\pi - 2). \end{aligned}$$

β) Είναι

$$\begin{aligned}\int_1^e x^2 (\ln x)^2 dx &= \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' (\ln x)^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} (\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} ((\ln x)^2)' dx \\ &= \frac{e^3}{3} (\ln e)^2 - \frac{1}{3} (\ln 1)^2 - \frac{2}{3} \int_1^e x^3 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^e + \frac{2}{3} \int_1^e \frac{x^3}{3} (\ln x)' dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \frac{e^3}{3} \ln e + \frac{2}{3} \frac{1}{3} \ln 1 + \frac{2}{9} \int_1^e x^3 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{9} e^3 + \frac{2}{9} \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{9} + \frac{2}{27} (e^3 - 1) \\ &= \frac{1}{27} (5e^3 - 2).\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 32

Να υπολογισθεί το όριο της ακολουθίας (α_n) με $\alpha_n = \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x} dx$.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$\alpha_n = \int_0^1 \frac{(x^n)'}{1+x} dx = \left[\frac{x^n}{1+x} \right]_0^1 - \int_0^1 x^n \left(\frac{1}{1+x} \right)' dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx. \quad (1)$$

Επειδή $0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$, για κάθε $x \in [0,1]$, προκύπτει ότι

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\frac{1}{2} \leq \alpha_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και επομένως είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ (ΦΕΒ 2019). Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $z \in (-2, 2)$, για το

οποίο ισχύει η σχέση
$$\frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(4x^2 - 2)}{1 + x^2} dx = \sin z.$$

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με το Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, αν $f, g / [a, b]$ συνεχείς και η g δεν αλλάζει πρόσημο, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$, τέτοιο ώστε
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Οι $f, g / [0, 1]$, με $f(x) = \sin(4x^2 - 2)$ και $g(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος, οπότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, ώστε

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(4x^2 - 2)}{1 + x^2} dx = \frac{4}{\pi} \int_0^1 f(x)g(x)dx = \frac{4}{\pi} f(\xi) \int_0^1 g(x)dx = \frac{4}{\pi} f(\xi) \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx \\ &= \frac{4}{\pi} f(\xi) [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{4}{\pi} f(\xi) \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = f(\xi) = \sin(4\xi^2 - 2) \end{aligned}$$

Τελικά, θέτοντας $z = 4\xi^2 - 2$, προκύπτει το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ (ΦΕΒ 2018). Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του ολοκληρώματος,

να αποδειχθεί η ανισότητα $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3} \leq \frac{1}{4} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3} / [1, +\infty)$, η οποία είναι φθίνουσα και μη αρνητική, οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος, ισχύει η σχέση

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

όπου

$$S_n = \int_1^n f(x) dx = \int_1^n \frac{dx}{x^2 + 3} \stackrel{x=y\sqrt{3}}{=} \int_{1/\sqrt{3}}^{n/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3} dy}{3y^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} [\operatorname{arctg} y]_{1/\sqrt{3}}^{n/\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{Επειδή } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \text{ και } f(1) = \frac{1}{4},$$

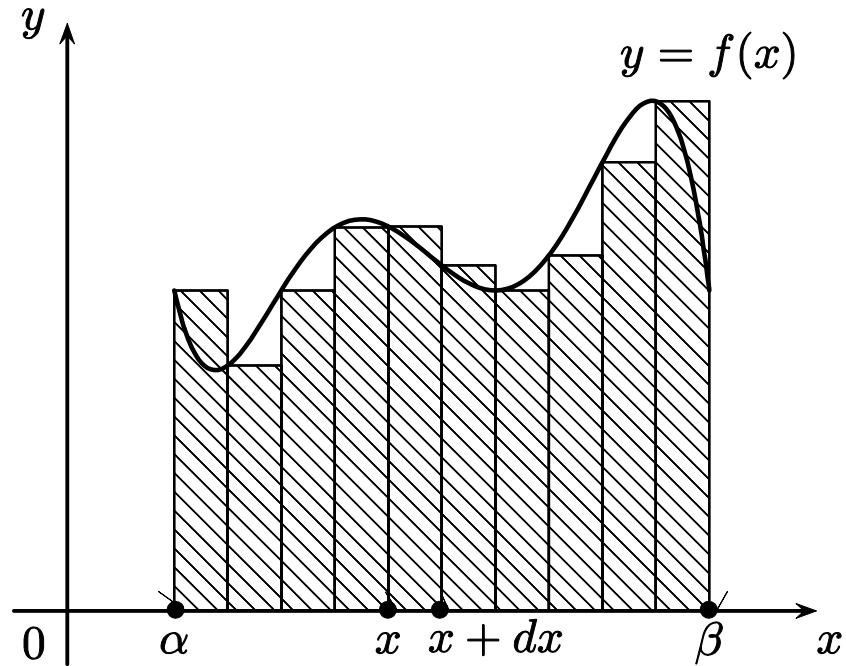
προκύπτει τελικά η ζητούμενη ανισότητα.

ΕΜΒΑΔΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

Έστω συνεχής συνάρτηση $f / [\alpha, \beta]$ και R το χωρίο του επιπέδου που ορίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν η συνάρτηση f είναι μη αρνητική στο $[\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδό E του χωρίου R μπορεί να θεωρηθεί ως το «άπειρο» άθροισμα των εμβαδών στοιχειωδών ορθογωνίων με βάση dx και ύψος $f(x)$ όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



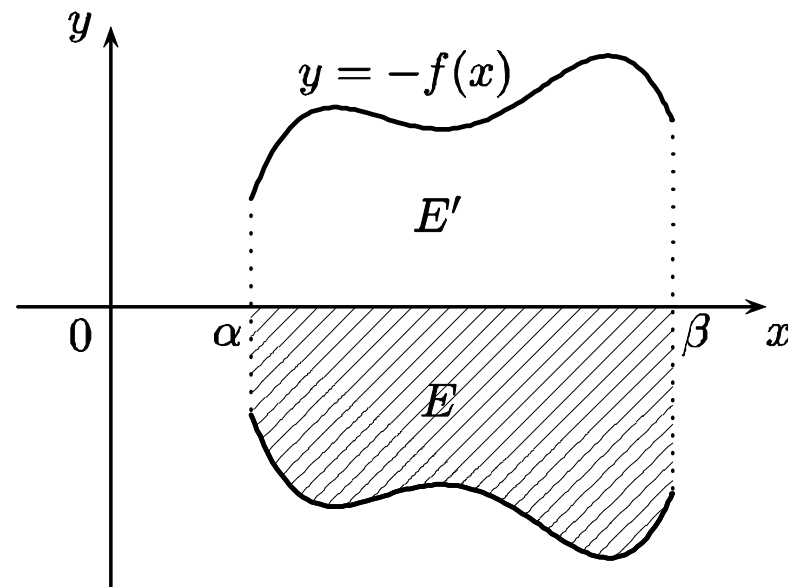
Με άλλα λόγια, το εμβαδό E θα είναι το όριο μιας ακολουθίας από ενδιάμεσα αθροίσματα, δηλαδή $E = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \delta_n, \gamma_n)$ όπου (δ_n) είναι μια ακολουθία διαμερίσεων του $[\alpha, \beta]$ με $\lambda(\delta_n) \rightarrow 0$ και γ_n μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων της δ_n .

Τότε όμως, από τη πρόταση 2.3 θα είναι

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

2. Αν η συνάρτηση f είναι μη θετική στο $[\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδό E του χωρίου R θα ισούται με το αντίστοιχο εμβαδό E' της μη αρνητικής συνάρτησης $-f$, (όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα), οπότε

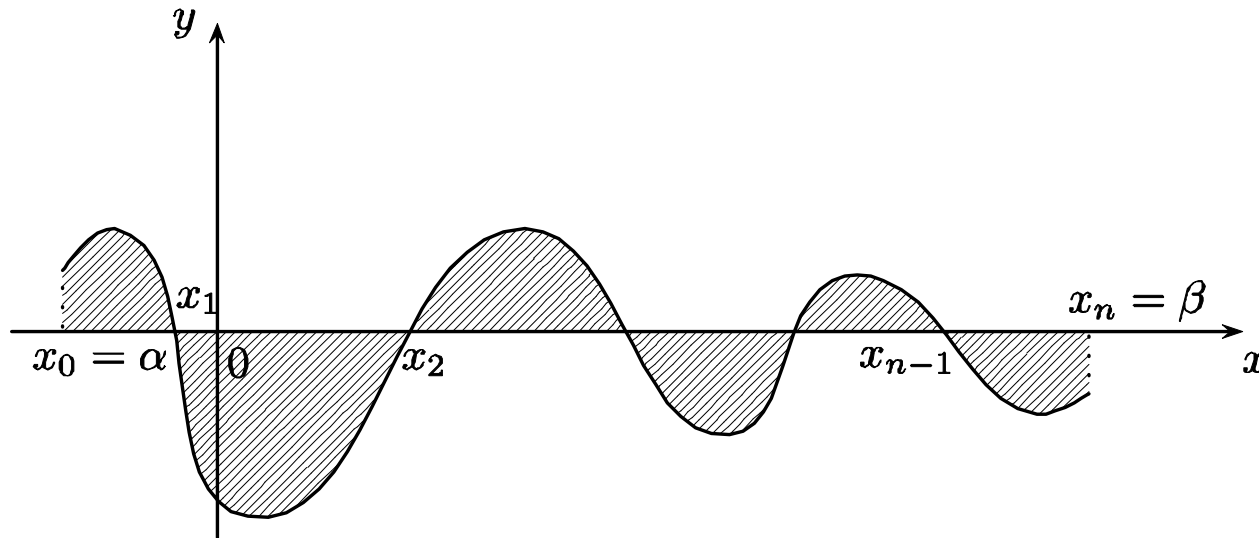
$$E = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$



3. Αν η συνάρτηση f δεν έχει σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$, τότε εφαρμόζοντας τα προηγούμενα στα υποδιαστήματα του $[\alpha, \beta]$ που η f διατηρεί σταθερό πρόσημο, προκύπτει ότι

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$$

όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα.

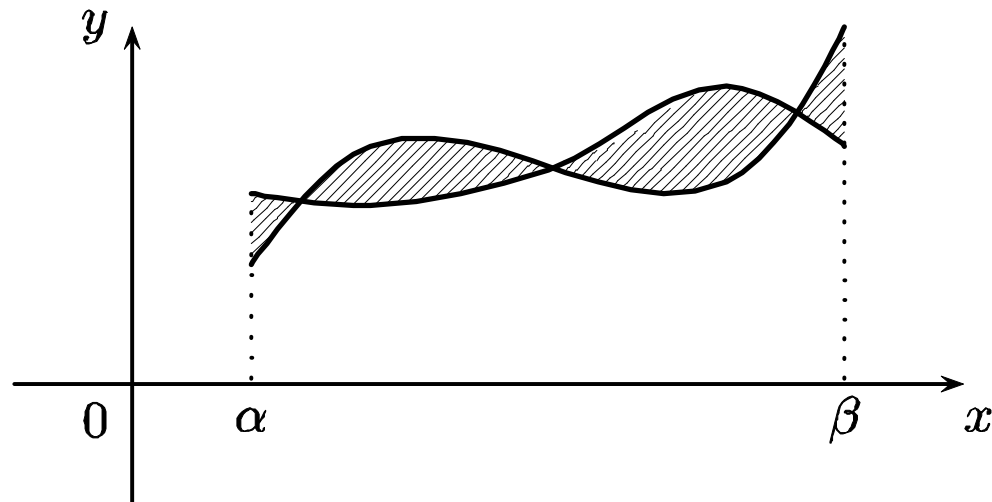


Εμβαδό μεταξύ των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων

Αν $f, g / [\alpha, \beta]$ είναι δυο συνεχείς συναρτήσεις, τότε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές τους παραστάσεις και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ δίδεται από τον τύπο

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



ΑΣΚΗΣΗ 47

Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περιέχεται μεταξύ:

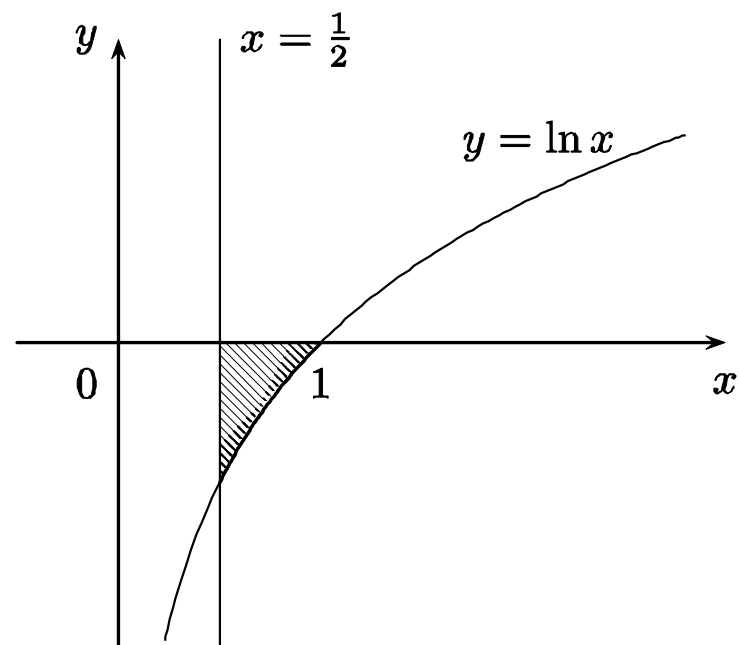
α) Της λογαριθμικής συνάρτησης και των ευθειών $x = \frac{1}{2}$ και $y = 0$.

β) Της άνω ημιπεριφέρειας με εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$ και της παραβολής $y = \frac{1}{3}x^2$.

γ) Της ημιτονοειδούς καμπύλης, της συνημιτονοειδούς καμπύλης και των ευθειών $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{2}$.

ΛΥΣΗ

α)

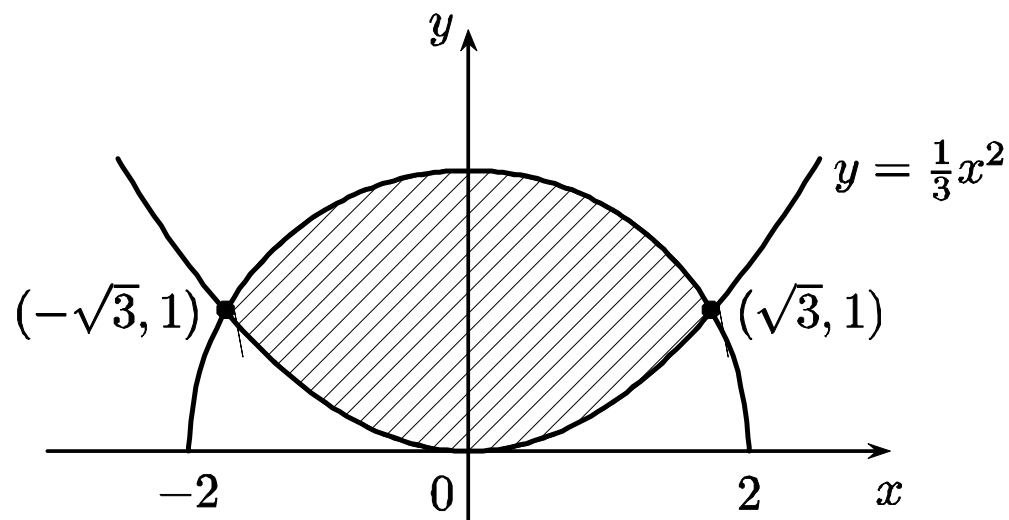


Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = -\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x dx = -\int_{\frac{1}{2}}^1 x' \ln x dx = -[x \ln x]_{\frac{1}{2}}^1 + \int_{\frac{1}{2}}^1 x(\ln x)' dx$$

$$= -\ln 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 1 dx = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \frac{e}{2} = \ln \sqrt{\frac{e}{2}}.$$

β)



Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = \frac{x^2}{3} \end{cases}$$

προκύπτει ότι οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία $(-\sqrt{3}, 1)$ και $(\sqrt{3}, 1)$. Έτσι, το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{3} \right) dx$$

ή, ισοδύναμα,

$$E = 2 \left(\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{3} dx \right) \quad (1)$$

Για τον υπολογισμό του πρώτου ολοκληρώματος, θέτουμε

$$x = 2 \sin t,$$

οπότε είναι $\sqrt{4-x^2} = 2 \cos t$, $dx = 2 \cos t dt$ και

$$2 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos t) 2 \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} [1 + \cos 2t] dt = 4 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

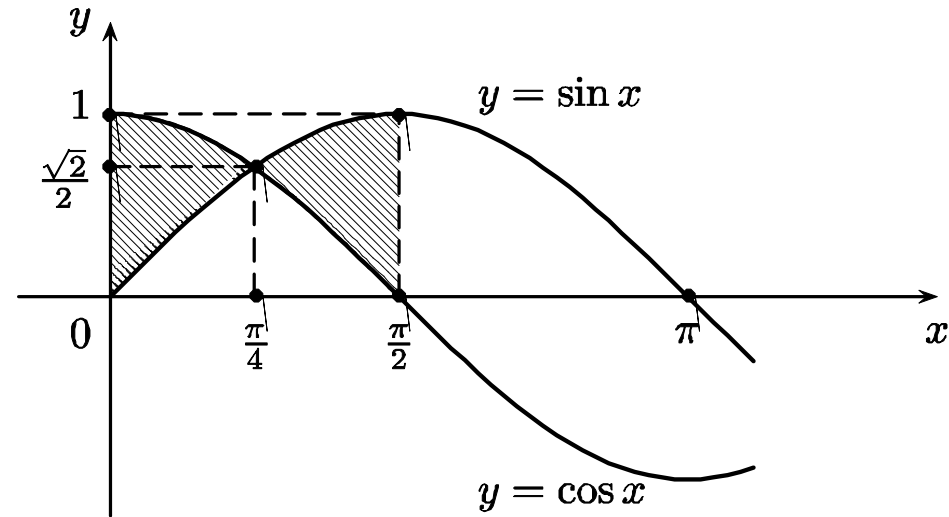
οπότε τελικά,

$$2 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx = 4 \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$E = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} - 2 \left[\frac{x^3}{9} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

γ)



Στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ οι συναρτήσεις $y = \cos x$ και $y = \sin x$ τέμνονται μόνο στο σημείο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0 + 1) - (1 - 0) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Εμβαδό χωρίου που ορίζεται από συναρτήσεις σε παραμετρική μορφή

Αν μια συνάρτηση (ή γενικότερα καμπύλη) δίδεται σε παραμετρική μορφή, δηλαδή

$$x = x(t), y = y(t) \text{ όπου } t \in [c, d]$$

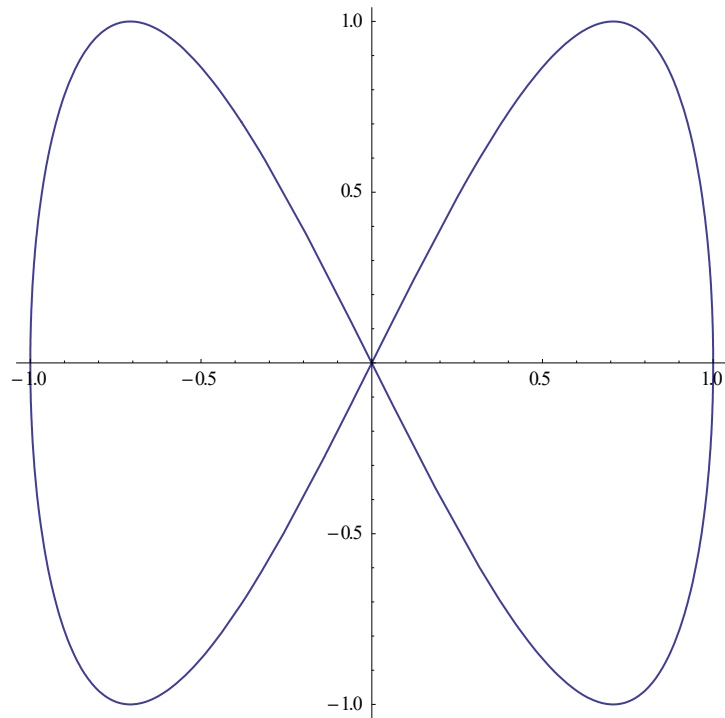
τότε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ δίδεται από τον τύπο

$$E = \int_c^d y(t) x'(t) dt$$

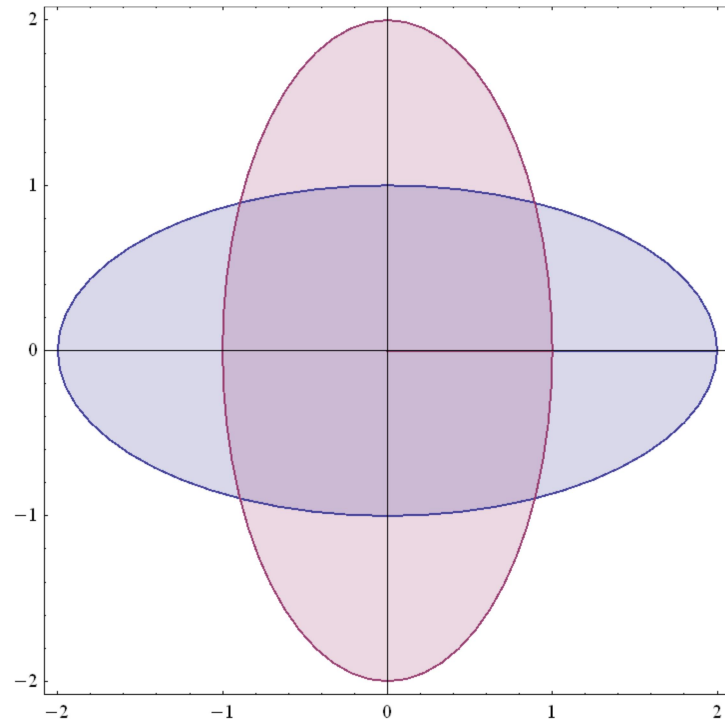
υπό την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις $x'(t), y(t)$ είναι συνεχείς, μη αρνητικές και ισχύει ότι $x(c) = \alpha$ και $x(d) = \beta$.

Ο προηγούμενος τύπος προκύπτει άμεσα, δεδομένου ότι

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} y dx \text{ και } dx = x'(t) dt.$$



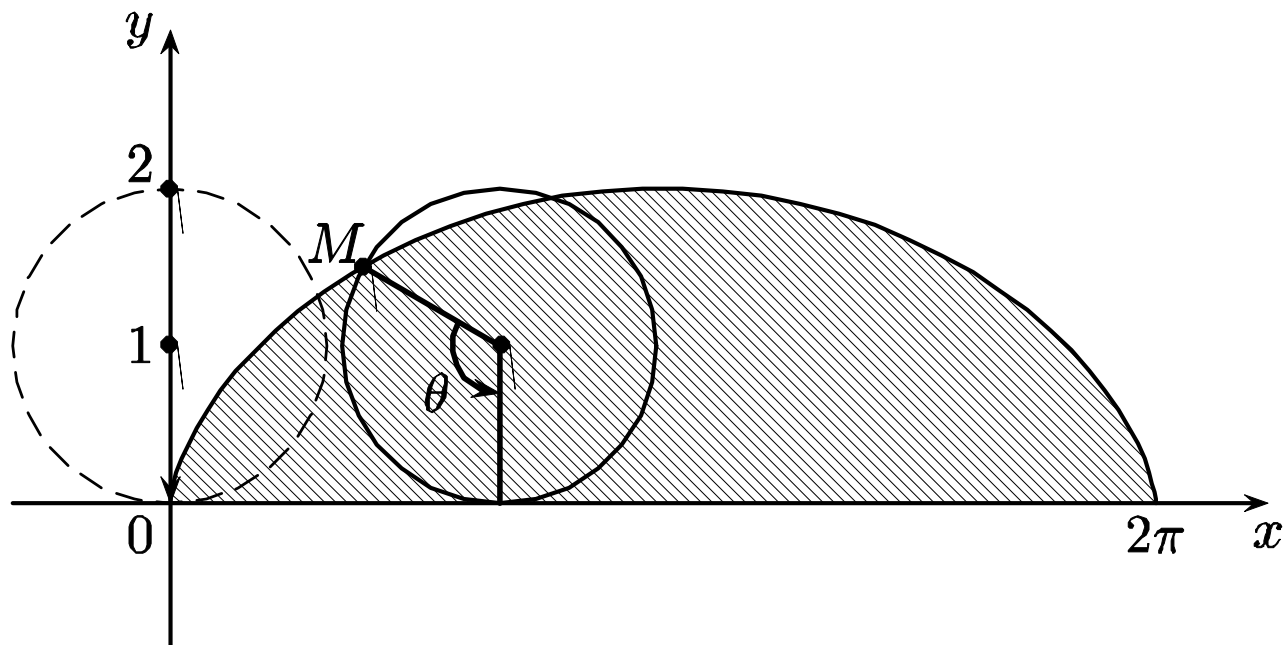
`ParametricPlot[{Sin[t],Sin[2t]},
{t,0,2Pi}]`



`ParametricPlot[{{2rCos[t],rSin[t]},
{rCos[t],2rSin[t]}}, {t,0,2Pi}, {r,0,1},
Mesh→False,PlotLegends→Automatic]`

ΑΣΚΗΣΗ 50

Να υπολογισθεί το εμβαδό μιας αψίδας της κυκλοειδούς καμπύλης με εξισώσεις $x = \theta - \sin\theta$, $y = 1 - \cos\theta$, όπου $\theta \in [0, 2\pi]$.



ΛΥΣΗ

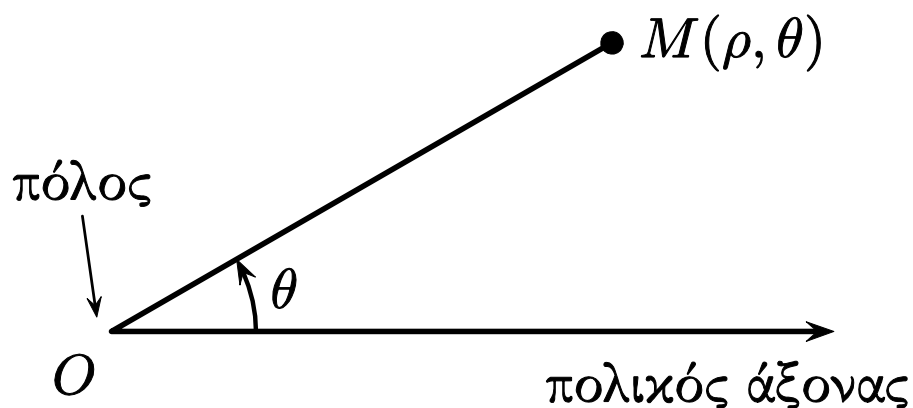
Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)(\theta - \sin \theta)' d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1 d\theta - 2 \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= [\theta]_0^{2\pi} - 2[\sin \theta]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 2\pi - 0 - 2(\sin 2\pi - \sin 0) + \frac{1}{2}[\theta]_0^{2\pi} + \frac{1}{4}[\sin 2\theta]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi + \pi + \frac{1}{4}(\sin 4\pi - \sin 0) = 3\pi. \end{aligned}$$

Πολικές συντεταγμένες

Ως γνωστό, η θέση ενός σημείου M του επιπέδου καθορίζεται από το ζεύγος (x, y) των καρτεσιανών του συντεταγμένων. Ένας άλλος τρόπος για τον καθορισμό της θέσης των σημείων του επιπέδου είναι ο εξής:

Θεωρούμε ένα σημείο O του επιπέδου το οποίο ονομάζεται **πόλος** και ένα ημιάξονα με αφετηρία το O , ο οποίος ονομάζεται **πολικός άξονας**. Κατόπιν τούτου η θέση ενός σημείου M του επιπέδου καθορίζεται από το ζεύγος (ρ, θ) όπου ρ είναι η απόσταση του σημείου M από τον πόλο O και θ η γωνία που σχηματίζει ο πολικός άξονας με την ημιευθεία OM .

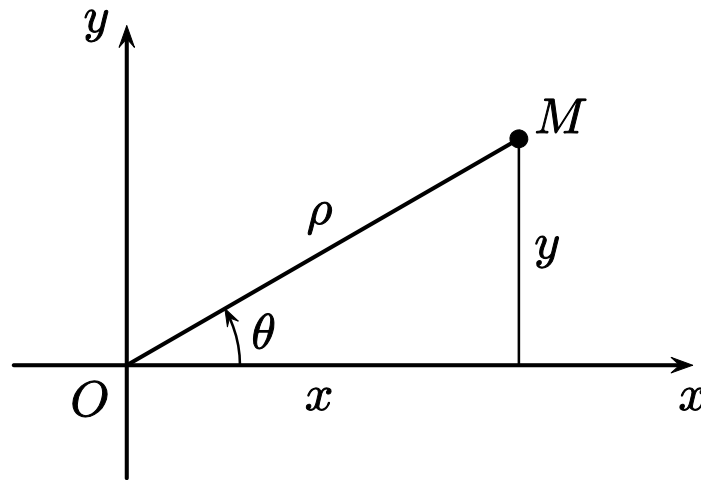


Τα στοιχεία του ζεύγους (ρ, θ) ονομάζονται **πολικές συντεταγμένες** του σημείου M . Προκειμένου να συσχετισθούν οι πολικές και οι καρτεσιανές συντεταγμένες λαμβάνεται ως πόλος η αρχή των αξόνων και ως πολικός άξονας ο ημιάξονας Ox .

Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

όπως προκύπτει άμεσα από το επόμενο ορθογώνιο τρίγωνο.



Είναι φανερό ότι οι πολικές συντεταγμένες ενός σημείου M δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένες, αφού τα σημεία με συντεταγμένες (ρ, θ) και $(\rho, \theta + 2n\pi)$, όπου $n \in \mathbb{Z}$, συμπίπτουν.

Έτσι, προκειμένου να υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των σημείων του επιπέδου (εκτός του O , όπου $\rho = 0$) και των πολικών συντεταγμένων τους, θα θεωρούμε ότι $\rho > 0$ και ότι το θ ανήκει σε ένα διάστημα μήκους 2π , συνήθως το $[0, 2\pi)$ ή το $(-\pi, \pi]$.

Μια καμπύλη C στο επίπεδο μπορεί να περιγραφεί από την πολική της εξίσωση $\psi(\rho, \theta) = 0$, έτσι ώστε κάθε σημείο του επιπέδου ανήκει στην καμπύλη C αν και μόνο αν οι πολικές του συντεταγμένες (ρ, θ) ικανοποιούν την εξίσωση αυτή.

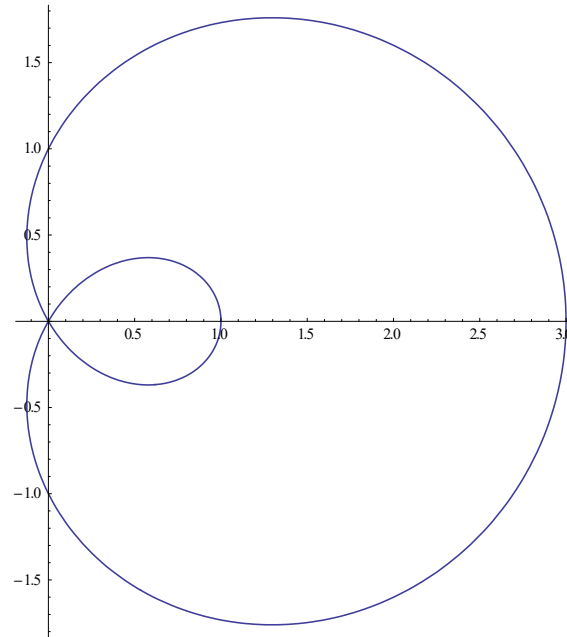
Παραδείγματα

1. Η πολική εξίσωση του κύκλου κέντρου O και ακτίνας r είναι $\rho = r$,
2. η πολική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το O και σχηματίζει γωνία φ με το πολικό άξονα είναι $\theta = \varphi$
3. η πολική εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής είναι $\rho^2 \cos 2\theta = \alpha^2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Άλλες καμπύλες που η πολική τους εξίσωση είναι απλούστερη από την καρτεσιανή είναι:

1. Οι καρδιοειδείς καμπύλες με πολικές εξισώσεις της μορφής

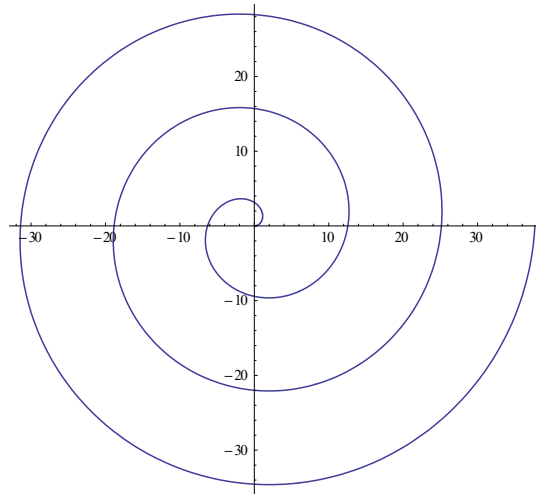
$$\rho = \beta + \alpha \cos \theta \quad \text{ή} \quad \rho = \beta + \alpha \sin \theta$$



```
PolarPlot[1+2*Cos[t], {t,0,2*Pi}]
```

2. Η έλικα του Αρχιμήδη με πολική εξίσωση

$$\rho = \alpha\theta$$

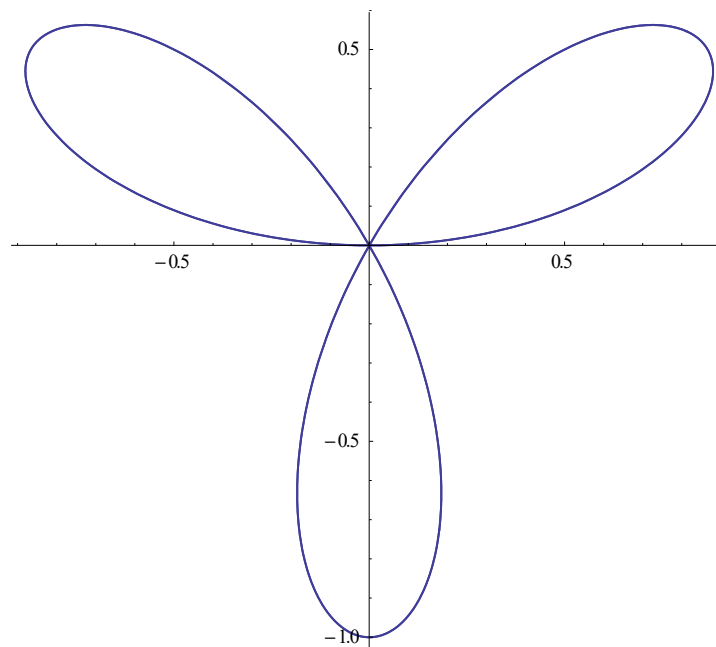


```
PolarPlot[2*t, {t, 0, 6*Pi}]
```

3. Ο λημνίσκος με πολικές εξισώσεις

$$\rho^2 = \alpha \cos \kappa \theta \quad \text{ή} \quad \rho^2 = \alpha \sin \kappa \theta \quad \text{ή} \quad \rho = \alpha \cos \kappa \theta \quad \text{ή} \quad \rho = \alpha \sin \kappa \theta,$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{N}^*$.



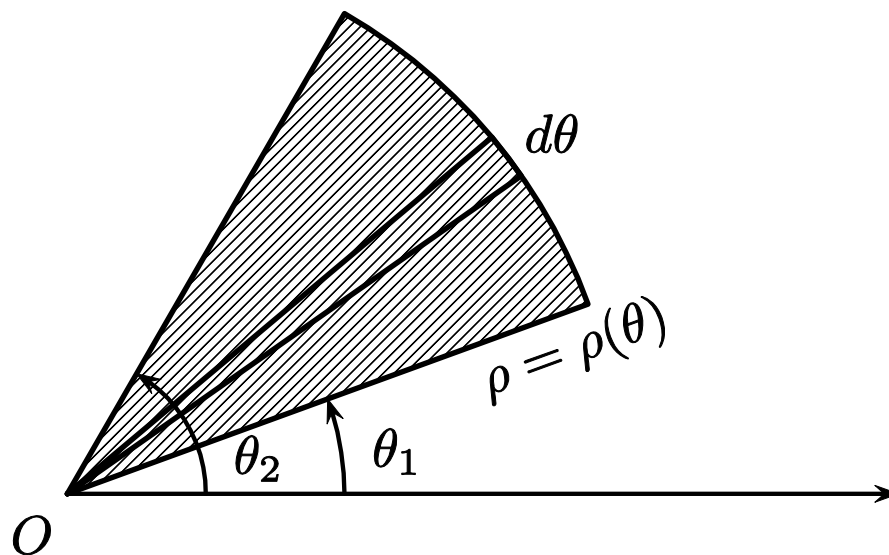
```
PolarPlot[Sin[3t], {t, 0, 2*Pi}]
```

Εμβαδό χωρίου σε πολικές συντεταγμένες

Το εμβαδό E του χωρίου του επιπέδου, στο σύστημα των πολικών συντεταγμένων, που περικλείεται από μια καμπύλη C η οποία έχει πολική εξίσωση $\rho = \rho(\theta)$ όπου $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ με $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$ δίδεται από τον τύπο

$$E = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta) d\theta,$$

αφού το εμβαδό dE του στοιχειώδους χωρίου προκύπτει από το γνωστό τύπο του εμβαδού κυκλικού τομέα $dE = \frac{1}{2} \rho^2 d\theta$.



ΑΣΚΗΣΗ 52

α) Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περιέχεται μεταξύ της παραβολής

$$\rho = \frac{2}{1 + \cos\theta}$$

και των ημιευθειών $\theta = 0$ και $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

β) Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη καρδιοειδή καμπύλη με εξίσωση

$$\rho = \sqrt{2}(1 + \cos\theta), \theta \in [0, 2\pi].$$

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου το οποίο περικλείεται από το λημνίσκο

$$\text{με εξίσωση } \rho^2 = \cos 2\theta, \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

ΛΥΣΗ

α)

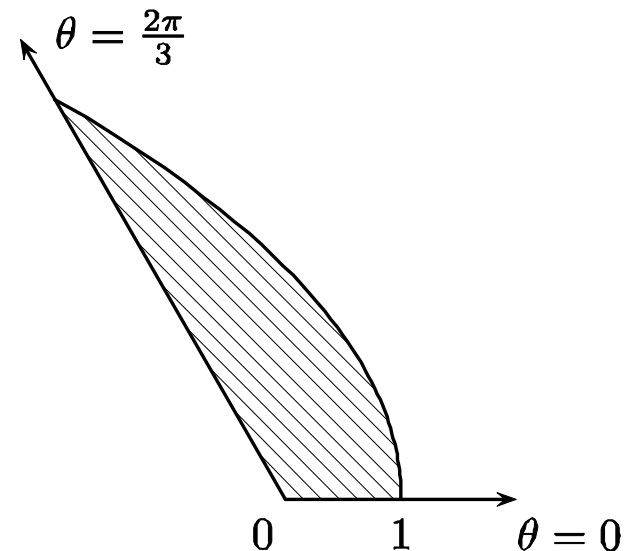
Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{4}{(1 + \cos \theta)^2} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta.$$

Αν τεθεί $y = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$, προκύπτει ότι $dy = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta$, οπότε

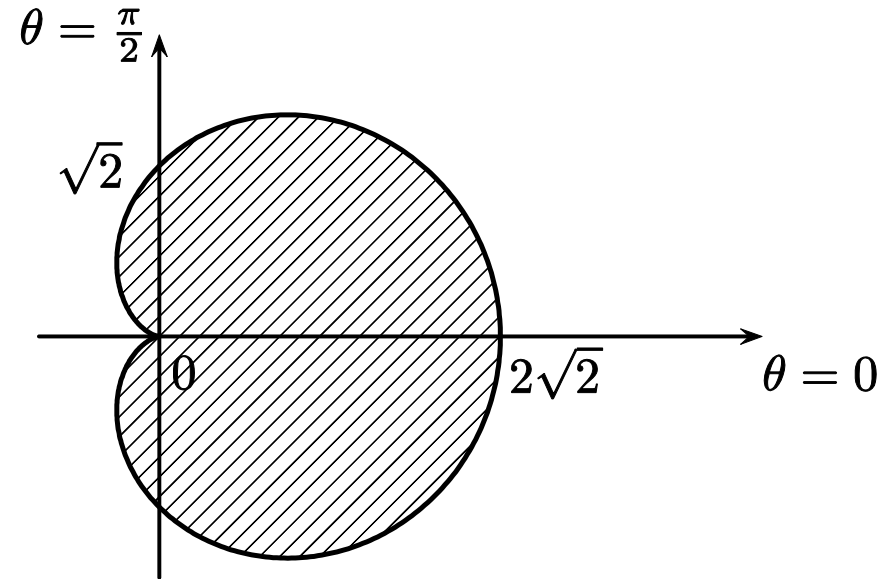
$$E = \int_0^{\sqrt{3}} (1 + y^2) dy = \left[y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$



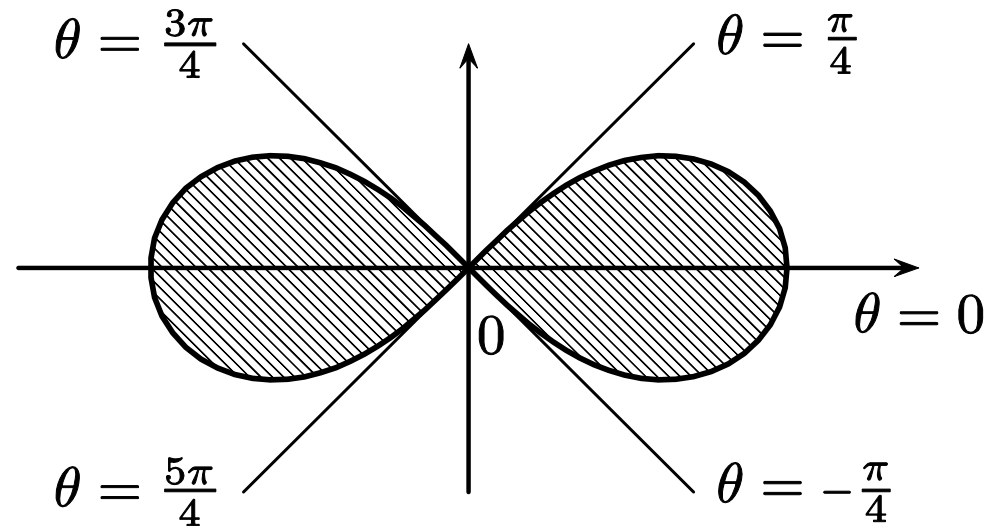
β)

Το ζητούμενο εμβαδό θα είναι

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 2(1 + \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1 d\theta + 2 \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 2\pi + 2[\sin \theta]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= 2\pi + \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = 3\pi. \end{aligned}$$



γ)



Επειδή, από τη συμμετρία του σχήματος, τα φύλλα του λημνίσκου έχουν ίσο εμβαδό, το συνολικό εμβαδό θα είναι

$$E = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} [\sin 2\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

7. ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Μήκος τόξου της γραφικής παράστασης συνάρτησης

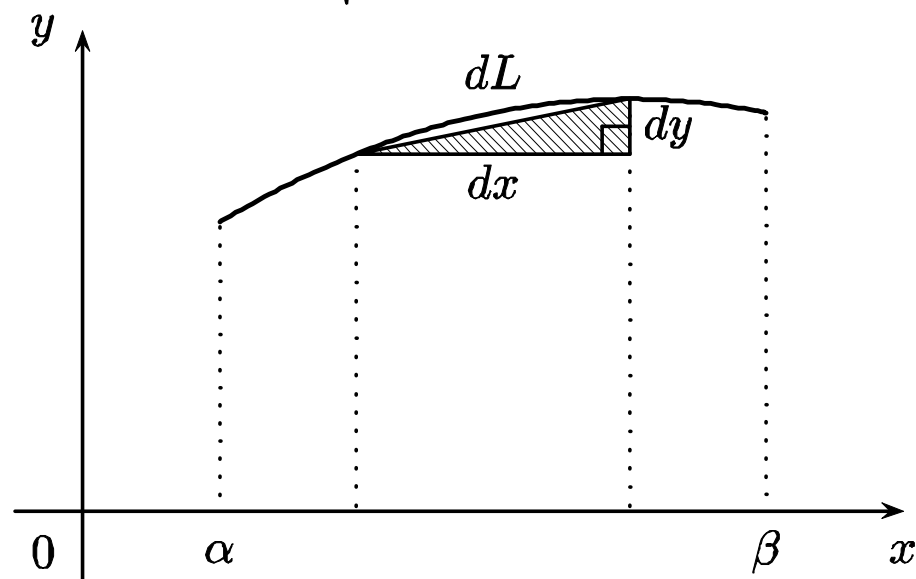
Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f / [\alpha, \beta]$ με παράγωγο συνεχή.

Τότε, το μήκος τόξου της γραφικής παράστασης ισούται με

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

αφού το μήκος dL του στοιχειώδους τόξου μπορεί να θεωρηθεί ίσο με το μήκος της υποτείνουσας του γραμμοσκιασμένου τριγώνου του επόμενου σχήματος, οπότε θα ισχύει ότι

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$



ΑΣΚΗΣΗ 55

Να υπολογισθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης
 $y = \cosh x / [0, \ln 3]$.

ΛΥΣΗ

Το ζητούμενο μήκος τόξου θα είναι

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\ln 3} \sqrt{1 + ((\cosh x)')^2} dx \\ &= \int_0^{\ln 3} \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx \\ &= \int_0^{\ln 3} \cosh x dx = [\sinh x]_0^{\ln 3} \\ &= \sinh(\ln 3) - \sinh 0 \\ &= \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Μήκος τόξου καμπύλης σε παραμετρική μορφή

Το μήκος του τόξου μιας καμπύλης που δίδεται σε παραμετρική μορφή

$$x = x(t), y = y(t) \text{ όπου } t \in [c, d],$$

δίδεται από τον τύπο $L = \int_c^d \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$

υπό την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ είναι **παραγωγίσιμες με παραγώγους συνεχείς**.

Παράδειγμα

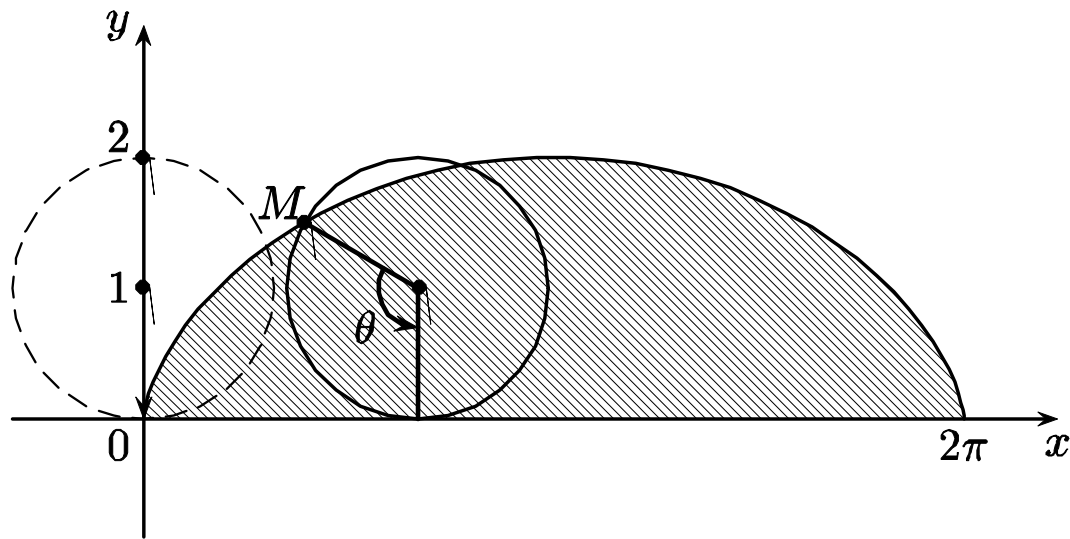
Το μήκος τόξου L ενός κύκλου ακτίνας r που αντιστοιχεί στην επίκεντρη γωνία φ είναι ίσο με $r \cdot \varphi$.

Πραγματικά, θεωρώντας την παραμετρική μορφή του τόξου αυτού

$$x = r \cos t, y = r \sin t, t \in [0, \varphi],$$

προκύπτει ότι

$$L = \int_0^\varphi \sqrt{((r \cos t)')^2 + ((r \sin t)')^2} dt = \int_0^\varphi \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = r \int_0^\varphi 1 dt = r \cdot \varphi.$$



ΑΣΚΗΣΗ 56

Να υπολογισθεί το μήκος του τόξου μιας αψίδας του κυκλοειδούς με εξισώσεις:

$$x = \theta - \sin\theta, \quad y = 1 - \cos\theta, \quad \text{όπου } \theta \in [0, 2\pi].$$

ΛΥΣΗ

Το ζητούμενο μήκος τόξου είναι

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2} d\theta = 4 \left[-\cos\frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 4(-\cos\pi + \cos 0) = 8. \end{aligned}$$

Μήκος τόξου καμπύλης που ορίζεται σε πολικές συντεταγμένες

Το μήκος τόξου L μιας επίπεδης καμπύλης C που ορίζεται στο σύστημα πολικών συντεταγμένων, με πολική εξίσωση $\rho = \rho(\theta)$, όπου $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ με $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$ δίδεται από τον τύπο

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta))^2} d\theta \quad (1)$$

Πραγματικά, καμπύλη C γράφεται στην παραμετρική μορφή

$$x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta, \quad y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta, \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

οπότε χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο τύπο του μήκους τόξου για συναρτήσεις σε παραμετρική μορφή προκύπτει ότι

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left((\rho(\theta)\cos\theta)'\right)^2 + \left((\rho(\theta)\sin\theta)'\right)^2} d\theta \quad (2)$$

Αλλά

$$\begin{aligned} & \left((\rho(\theta)\cos\theta)' \right)^2 + \left((\rho(\theta)\sin\theta)' \right)^2 \\ &= (\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta)^2 + (\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta)^2 \\ &= (\rho'(\theta))^2 \cos^2\theta + (\rho(\theta))^2 \sin^2\theta - 2\rho(\theta)\rho'(\theta)\cos\theta\sin\theta + \\ & \quad (\rho'(\theta))^2 \sin^2\theta + (\rho(\theta))^2 \cos^2\theta + 2\rho(\theta)\rho'(\theta)\cos\theta\sin\theta \\ &= (\rho'(\theta))^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (\rho(\theta))^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= (\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2. \end{aligned}$$

Επομένως, από τη σχέση (2) προκύπτει άμεσα ο τύπος (1).

ΑΣΚΗΣΗ 58

Να υπολογισθεί το μήκος του τόξου της έλικας του Αρχιμήδη, με εξίσωση $\rho = \alpha\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\alpha > 0$

ΛΥΣΗ

Το ζητούμενο μήκος της έλικας του Αρχιμήδη του παραπάνω σχήματος είναι

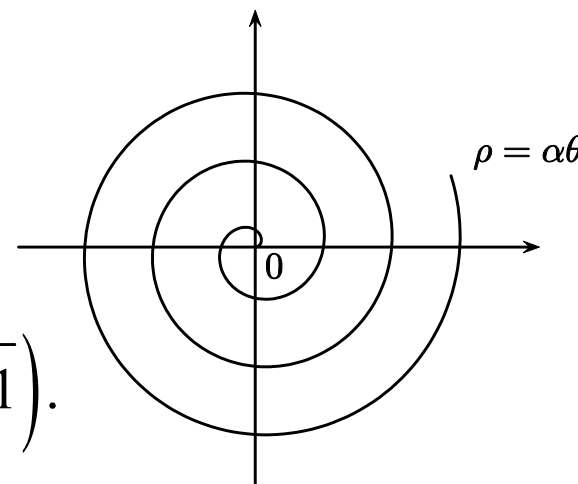
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2\theta^2 + \alpha^2} d\theta = \alpha \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta \quad (1)$$

Αν τεθεί $\theta = \sinh t$, τότε είναι $d\theta = \cosh t dt$ και $\sqrt{\theta^2 + 1} = \sqrt{\sinh^2 t + 1} = \cosh t$,
οπότε $\int \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta = \int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cosh 2t) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sinh 2t$

$$= \frac{1}{2} (t + \sinh t \cosh t) = \frac{1}{2} (\operatorname{arcsinh} \theta + \theta \sqrt{\theta^2 + 1})$$

Κατόπιν τούτων, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$L = \frac{\alpha}{2} \left(\ln \left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1} \right) + 2\pi \sqrt{4\pi^2 + 1} \right).$$



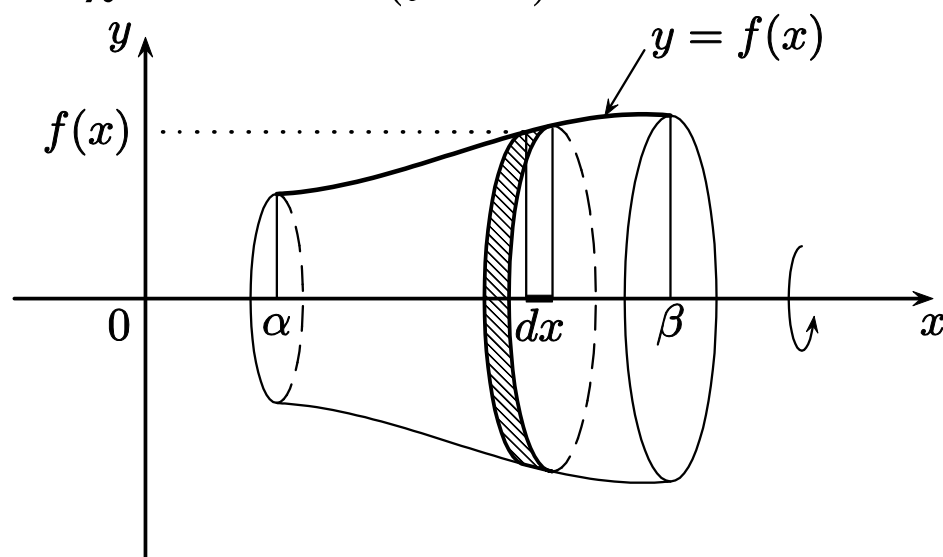
8. ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Έστω μια μη αρνητική συνεχής συνάρτηση $f / [\alpha, \beta]$ και R το χωρίο που ορίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

Τότε ο όγκος V του στερεού που προκύπτει με περιστροφή του χωρίου R γύρω από τον άξονα των τετμημένων ισούται με

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f(x))^2 dx,$$

αφού ο όγκος dV του στοιχειώδους στερεού μπορεί να θεωρηθεί ίσος με τον όγκο του κυλίνδρου, ύψους dx και ακτίνας βάσης $f(x)$, του επόμενου σχήματος, οπότε θα ισχύει $dV = \pi (f(x))^2 dx$.



Παραδείγματα

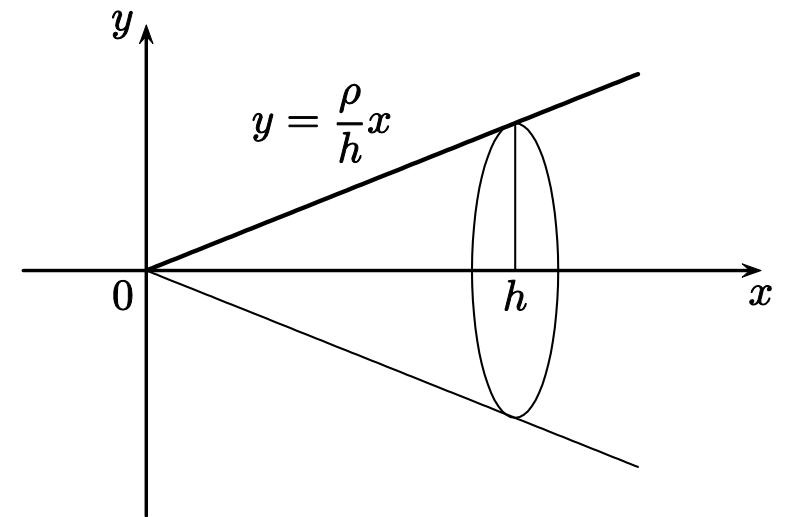
A) Ο κώνος ύψους h και ακτίνας βάσης ρ μπορεί να προκύψει με περιστροφή του τριγώνου που ορίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\rho}{h}x / [0, h]$$

με τον άξονα των τετμημένων και την ευθεία $x = h$, γύρω από τον άξονα των τετμημένων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Κατόπιν τούτου, είναι

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{\rho}{h}x \right)^2 dx = \frac{\pi\rho^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi\rho^2 h.$$



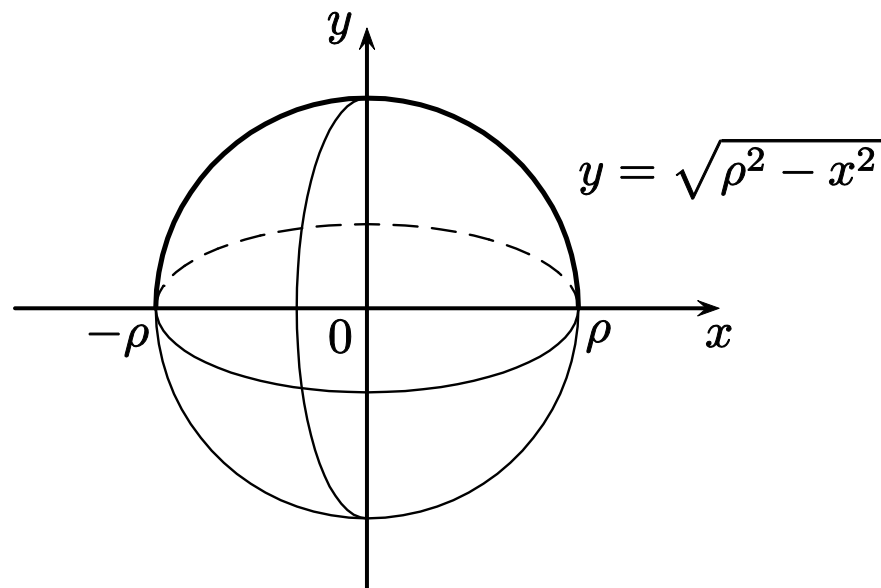
B) Η σφαίρα ακτίνας ρ μπορεί να προκύψει με περιστροφή του άνω ημικυκλίου που ορίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2} / [-\rho, \rho]$$

με τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = -\rho$, $x = \rho$ γύρω από τον άξονα των τετμημένων, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Κατόπιν τούτων, είναι

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\rho}^{\rho} \left(\sqrt{\rho^2 - x^2} \right)^2 dx \\ &= \pi \left[\rho^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\rho}^{\rho} = \pi \left(\rho^3 - \frac{\rho^3}{3} - \left(-\rho^3 + \frac{\rho^3}{3} \right) \right) \\ &= \frac{4}{3} \pi \rho^3. \end{aligned}$$



Ο τύπος του όγκου εκ περιστροφής εφαρμόζεται και σε πιο σύνθετες περιπτώσεις. Έτσι, αν $f, g / [\alpha, \beta]$ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις με $0 \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε ο όγκος V του στερεού που προκύπτει με περιστροφή του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g και των ευθειών $x = \alpha$, $x = \beta$ δίδεται από τον τύπο

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (g^2(x) - f^2(x)) dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 59

Να ευρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει με περιστροφή περί τον άξονα των τετμημένων, του χωρίου της συνάρτησης

$$f(x) = \cos x / \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

ΛΥΣΗ

Ο ζητούμενος όγκος του στερεού που παράγεται δια περιστροφής (βλ. σχήμα) είναι

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2} \right) \right) = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

