Ανάλυση 1: Σημειώσεις φροντιστηρίων

2020-2022

Περιεχόμενα

1 Απεικονίσεις

Μια απεικόνιση (ή αλλιώς συνάρτηση) f από το σύνολο A στο σύνολο B σημειώνεται με $f : A \to B$ και είναι ένας κανόνας αντιστοίχισης **κάθε** στοιχείου x του συνόλου A, το οποίο ονομάζεται **πρότυπο**, σε **ακριβώς ένα** στοιχείο y του συνόλου B, το οποίο ονομάζεται **εικόνα** του x και συμβολίζεται με $f(x)$. Το σύνολο A ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της απεικόνισης f και συμβολίζεται με D_f. Το υποσύνολο του B που αποτελείται από όλες τις εικόνες των στοιχείων του A ονομάζεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με R_f ή $f(A)$.

Μια συνάρτηση $f : A \to B$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύνολο από ζεύγη $(x, f(x))$, δηλαδή ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\},$$

οπότε γράφουμε $f \subseteq A \times B$.

Αν το πεδίο ορισμού A είναι πεπερασμένο, τότε η f περιγράφεται πλήρως από το σύνολο ζευγών. Για παράδειγμα, αν $A = B = \{1\}$, τότε το σύνολο ζευγών της f αποτελείται μόνο από το ζεύγος $(1, 1)$, δηλαδή είναι $f = \{(1, 1)\}$. Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί πολλούς διαφορετικούς τύπους, όπως για παράδειγμα

$$f(x) = 1, \qquad f(x) = x, \qquad f(x) = x^2.$$

Από τα παραπάνω, είναι προφανές ότι για τον πλήρη ορισμό μιας συνάρτησης, δεν αρκεί μόνο η γνώση του τύπου της, αλλά χρειάζεται και η γνώση του πεδίου ορισμού της.

Περιορισμός συνάρτησης: Αν $f : A \to B$ είναι μια συνάρτηση και $E \subseteq A$, τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, η οποία ονομάζεται περιορισμός της f στο E, συμβολίζεται με f/E και αποτελείται από τα ζεύγη $(x, f(x))$, για τα οποία είναι $x \in E$, δηλαδή

$$f/E = \{(x, y) \in f : x \in E\}.$$

Συναρτήσεις ένα προς ένα: Μια συνάρτηση $f : A \to B$ ονομάζεται 1-1 (ένα προς ένα), αν διαφορετικά πρότυπα έχουν και διαφορετικές εικόνες. Η συνθήκη αυτή περιγράφεται από τον ακόλουθο μαθηματικό συμβολισμό:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \qquad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in A.$$

Στις αποδείξεις συχνά χρησιμοποιείται η ισοδύναμη συνθήκη:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \qquad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in A,$$

η οποία με απλά λόγια δηλώνει ότι αν δύο εικόνες ταυτίζονται, τότε ταυτίζονται και τα πρότυπα από τα οποία προέρχονται, δηλαδή κάθε εικόνα προέρχεται από μοναδικό πρότυπο.

Συναρτήσεις επί: Μια συνάρτηση $f : A \to B$ ονομάζεται επί, αν $B = f(A)$, δηλαδή αν κάθε στοιχείο του B αποτελεί εικόνα κάποιου προτύπου στο A.

Αμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις: Μια συνάρτηση $f : A \to B$ ονομάζεται αμφιμονοσήμαντη, αν είναι ένα προς ένα και επί.

Σύνθεση συναρτήσεων: Αν για τις συναρτήσεις $f : A \to B$ και $g : \Gamma \to \Delta$, ισχύει ότι $f(A) \cap \Gamma \neq \emptyset$, δηλαδή υπάρχουν εικόνες της f που είναι πρότυπα της g, τότε ορίζεται η σύνθεση της g με την f ως μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $E = \{x \in A : f(x) \in f(A) \cap \Gamma\}$, η οποία συμβολίζεται με $g \circ f$ και αποτελείται από τα ζεύγη

$$g \circ f = \{(x, g(f(x))) : x \in E\},$$

δηλαδή $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, για κάθε $x \in E$.

Αντίστροφη συνάρτηση: Αν η συνάρτηση $f : A \to B$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε ορίζεται μια (μοναδική) συνάρτηση $g : B \to A$, τέτοια ώστε

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x, \qquad \text{για κάθε } x \in A,$$

δηλαδή η g απεικονίζει κάθε εικόνα στο πρότυπό της. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται αντίστροφη της f και συμβολίζεται με f^{-1}.

2 Βασικές ιδιότητες πραγματικών συναρτήσεων

Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όπου A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Η f ονομάζεται

- Αύξουσα, αν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in A$.
- Γνησίως αύξουσα, αν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in A$.
- Φθίνουσα, αν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in A$.
- Γνησίως φθίνουσα, αν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in A$.
- Μονότονη, αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.
- Γνησίως μονότονη, αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

  Για τη μελέτη της μονοτονίας, πολλές φορές εξετάζουμε το πρόσημο του λόγου μεταβολής $\lambda = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
- Περιοδική, αν υπάρχει $\tau \in \mathbb{R}^*$, τέτοιο ώστε $f(x + \tau) = f(x)$, για κάθε $x \in A$. Το τ ονομάζεται περίοδος της f. Το ελάχιστο θετικό τ που ικανοποιεί την προηγούμενη σχέση (αν υπάρχει), ονομάζεται πρωτεύουσα ή θεμελιώδης περίοδος της f.

  Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = 1$ είναι περιοδική, χωρίς όμως πρωτεύουσα περίοδο.
- Άρτια, αν $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in A$.
- Περιττή, αν $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in A$.

- Άνω φραγμένη, αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq M$, για κάθε $x \in A$. Ο αριθμός M ονομάζεται άνω φράγμα της f.

- Κάτω φραγμένη, αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $m \leq f(x)$, για κάθε $x \in A$. Ο αριθμός m ονομάζεται κάτω φράγμα της f.

- Φραγμένη, αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.

- Απολύτως φραγμένη, αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$, για κάθε $x \in A$.

  Άμεσα προκύπτει ότι μια συνάρτηση είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι απολύτως φραγμένη.

Παρατήρηση: Κάθε πραγματική συνάρτηση f/A μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα μιας περιττής και μιας άρτιας συνάρτησης, με την προϋπόθεση ότι $x \in A \Rightarrow -x \in A$, ως εξής:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Η συνάρτηση $A(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ είναι άρτια και αποτελεί το άρτιο μέρος της f, ενώ η συνάρτηση $\Pi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ είναι περιττή και αποτελεί το περιττό μέρος της f.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι υπερβολικές συναρτήσεις, οι οποίες ορίζονται στα επόμενα.

3 Βασικές Γνώσεις

Μαθηματική επαγωγή: Έστω $p(n)$ μια πρόταση που περιέχει τη μεταβλητή $n \in \mathbb{N}^*$ και η οποία ισχύει όταν $n = n_0 \in \mathbb{N}^*$. Αν $p(n) \Rightarrow p(n+1)$, για κάθε $n \geq n_0$, τότε η πρόταση ισχύει για κάθε $n \geq n_0$.

Ανισότητα Bernoulli: $(1+\theta)^n \geq 1 + n\theta, \qquad$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\theta > -1$.

Ανισότητα Cauchy: $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, $a_1, \ldots, a_n > 0, n \in \mathbb{N}^*$.

Ανισότητα Cauchy-Schwarz: $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$, για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Διωνυμικό Θεώρημα (Newton): $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \qquad x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*.$

Ακέραιο μέρος: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικός ακέραιος, ο οποίος συμβολίζεται με $[x]$, τέτοιος ώστε

$$x - 1 < [x] \leq x.$$

Ισοδύναμα, ισχύει ότι $[x] \leq x < [x] + 1$.

Απόλυτη τιμή: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases} \qquad$ ή ισοδύναμα $\qquad |x| = \max\{x, -x\}$.

Από τον ορισμό, άμεσα προκύπτουν οι ιδιότητες

$$-|x| \leq x \leq |x| \qquad \text{και} \qquad |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \qquad x, a \in \mathbb{R},$$

βάσει των οποίων αποδεικνύεται η επόμενη πολύ σημαντική ανισότητα:

Τριγωνική ανισότητα: $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|, \qquad$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Αξιοσημείωτα πηλίκα:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \qquad a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$$

Αν n περιττός, εφαρμόζοντας την παραπάνω ταυτότητα για a και $-b$, προκύπτει η ταυτότητα

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}), \qquad a, b \in \mathbb{R}, n = 2k+1, k \in \mathbb{N}.$$

4 Τριγωνομετρικοί τύποι

Βασικές ιδιότητες:

- $\cos(-x) = \cos x$ (δηλαδή η συνάρτηση $\cos x$ είναι άρτια)
- $\sin(-x) = -\sin x$ (δηλαδή η συνάρτηση $\sin x$ είναι περιττή)
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Βασικές τιμές:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Από την επόμενη ταυτότητα προκύπτουν όλες οι υπόλοιπες τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \tag{4.1}$$

1. $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$ (Θέτοντας στην (4.1) $y = \frac{\pi}{2}$)
2. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ (Θέτοντας στην (4.1) $x = -y$)
3. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ (Θέτοντας στην (4.1) $-y$ αντί για y)
4. $2\cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$ (Προσθέτοντας την προηγούμενη στην (4.1))
5. $2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ (Ομοίως, με αφαίρεση)
6. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ (Θέτοντας στην (4.1) $x - \frac{\pi}{2}$ αντί για x)
7. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ (Θέτοντας στην προηγούμενη $-y$ αντί για y)
8. $2\sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$ (Προσθέτοντας τις 2 προηγούμενες)
9. $2\cos x \sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$ (Ομοίως, με αφαίρεση)
10. $\sin 2x = 2\cos x \sin x$ (Θέτοντας $y = x$ στην προηγούμενη)
    Θέτοντας $x = a + b$ και $y = a - b$, τότε $a = \frac{x+y}{2}$ και $b = \frac{x-y}{2}$, οπότε προκύπτουν:
11. $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ (από την 8η),
12. $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ (από την 9η),
13. $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ (από την 4η),
14. $\cos y - \cos x = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ (από την 5η).
15. $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ και $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ (από τη 2η), οπότε $\mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$.

16. $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ και $\cos 2x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ (από τη 2η και τη 10η), οπότε $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

Επίσης, με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου, αποδεικνύεται η ακόλουθη ανισότητα

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \qquad x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

από την οποία προκύπτουν οι ανισότητες

$$|\sin x| \le |x|, \qquad x \in \mathbb{R}$$

και

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \qquad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}.$$

Η τελευταία χρησιμοποιείται στην απόδειξη του βασικού ορίου:

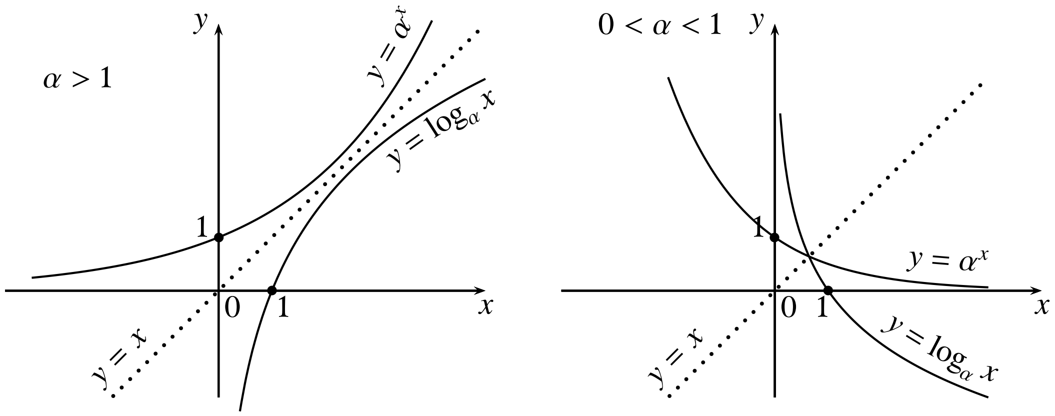
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

5 Βασικές συναρτήσεις

5.1 Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση

Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται για κάθε πραγματικό α, με $0 < \alpha \neq 1$. Εύκολα προκύπτει ότι είναι γνησίως αύξουσα όταν $\alpha > 1$ και γνησίως φθίνουσα όταν $0 < \alpha < 1$. Και στις δύο περιπτώσεις είναι γνησίως μονότονη, πράγμα που σημαίνει ότι είναι ένα προς ένα, επομένως είναι και αντιστρέψιμη, δηλαδή υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} τέτοια ώστε $y = \alpha^x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται λογαριθμική, συμβολίζεται με $\log_\alpha$ και (δεδομένου ότι $\alpha^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$) ορίζεται στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών. Έτσι, προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός του λογαρίθμου με βάση α ενός θετικού πραγματικού αριθμού y:

$$y = \alpha^x \Leftrightarrow \log_\alpha y = x \qquad (x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha \neq 1). \tag{5.1}$$



Από τον ορισμό αυτό, άμεσα προκύπτουν οι ιδιότητες:

i)	$\log_\alpha 1 = 0$	ii)	$\log_\alpha \alpha = 1$
iii)	$x = \alpha^{\log_\alpha x} = \log_\alpha \alpha^x$	iv)	$\log_\alpha x^k = k \log_\alpha x$
v)	$\log_\alpha(xy) = \log_\alpha x + \log_\alpha y$	vi)	$\log_\alpha(\frac{x}{y}) = \log_\alpha x - \log_\alpha y$
vii)	$\log_\alpha x = \dfrac{\log_\beta x}{\log_\beta \alpha}$	viii)	$\alpha^{\log_\beta c} = c^{\log_\beta \alpha}$

Ιδιαίτερα χρήσιμες είναι οι επόμενες ανισότητες:

$$e^x \geq x + 1, \quad x \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

$$\ln x \leq x - 1, \quad x > 0. \tag{5.3}$$

Αποδείξεις ιδιοτήτων.

i) Αρκεί να τεθεί $x = 0$ στη σχέση (5.1).

ii) Αρκεί να τεθεί $x = 1$ στη σχέση (5.1).

iii) Αρκεί να τεθεί στη σχέση (5.1) $x = \log_\alpha y$, για την πρώτη ισότητα και $y = \alpha^x$ για τη δεύτερη.

iv) $\log_\alpha x^k = \log_\alpha(\alpha^{\log_\alpha x})^k = \log_\alpha(\alpha^{k\log_\alpha x}) = k\log_\alpha x$.

v) $\log_\alpha(xy) = \log_\alpha(\alpha^{\log_\alpha x}\alpha^{\log_\alpha y}) = \log_\alpha(\alpha^{\log_\alpha x+\log_\alpha y}) = \log_\alpha x + \log_\alpha y$.

vi) Ομοίως.

vii) $\log_\alpha x = \dfrac{\log_\beta \alpha}{\log_\beta \alpha}\log_\alpha x = \dfrac{\log_\beta \alpha^{\log_\alpha x}}{\log_\beta \alpha} = \dfrac{\log_\beta x}{\log_\beta \alpha}$.

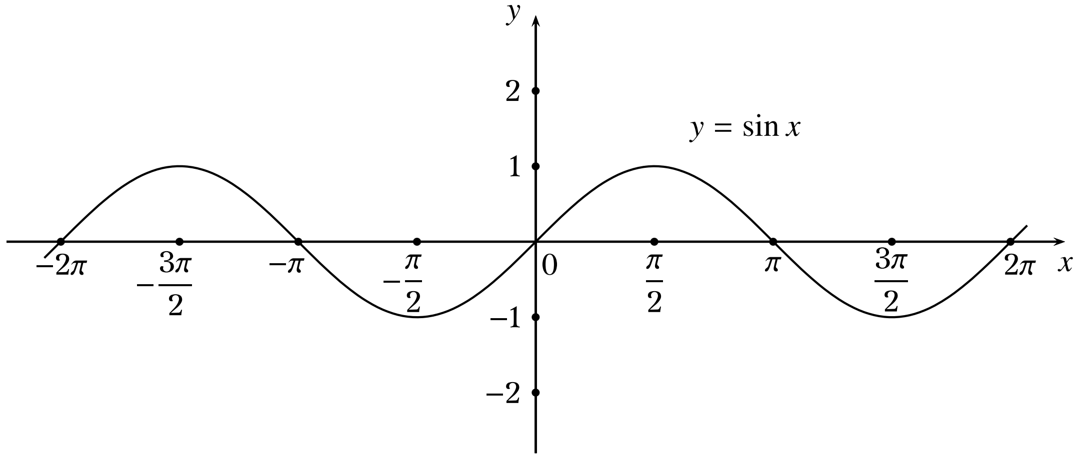
viii) $\alpha^{\log_\beta c} = \beta^{\log_\beta \alpha^{\log_\beta c}} = \beta^{\log_\beta c \log_\beta \alpha} = (\beta^{\log_\beta c})^{\log_\beta \alpha} = c^{\log_\beta \alpha}$.

$\square$

5.2 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

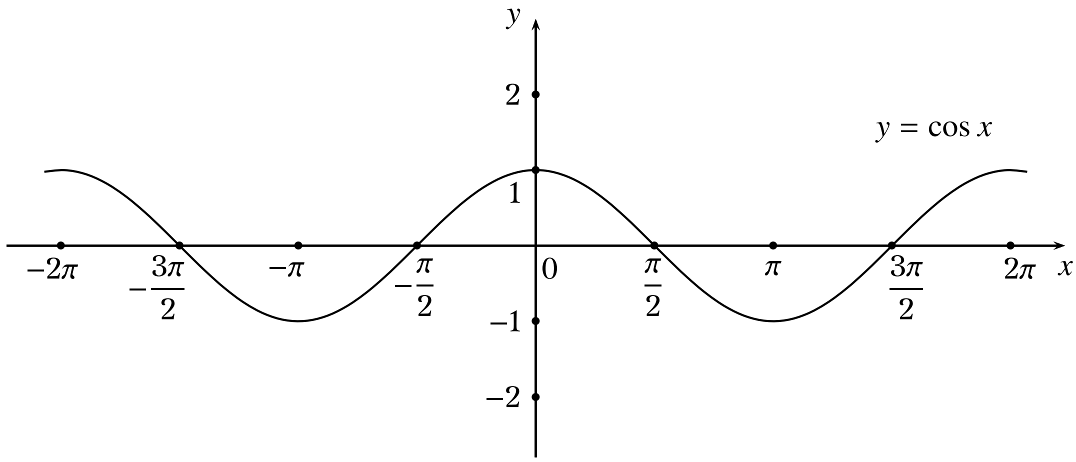
Η συνάρτηση ημίτονο $f(x) = \sin x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $[-1,1]$.

Είναι φραγμένη, περιττή και περιοδική, με πρωτεύουσα περίοδο το 2π.



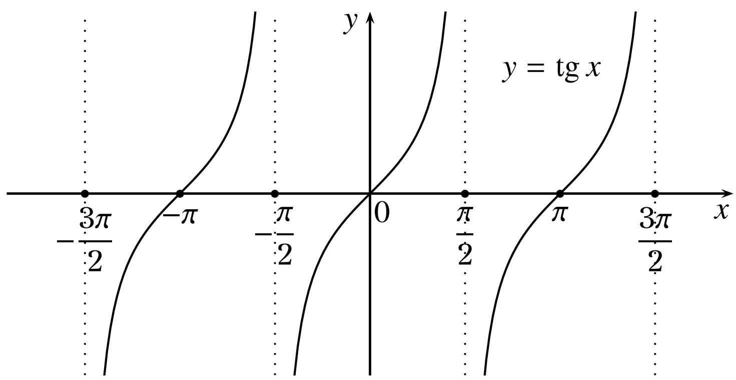
Η συνάρτηση συνημίτονο $f(x) = \cos x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $[-1,1]$.

Είναι φραγμένη, άρτια και περιοδική, με πρωτεύουσα περίοδο το 2π.



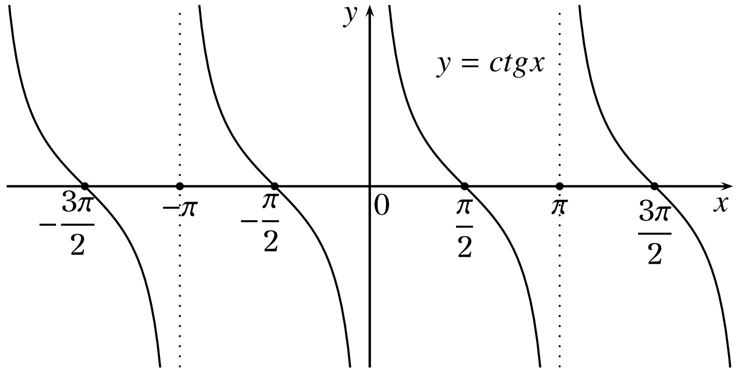
Η συνάρτηση εφαπτομένη $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ ή $\tan x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}\backslash\{k\pi+\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Είναι περιττή και περιοδική, με πρωτεύουσα περίοδο το π.



Η συνάρτηση συνεφαπτομένη $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ή $\cot x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

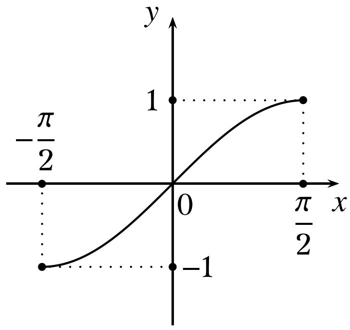
Είναι περιττή και περιοδική, με πρωτεύουσα περίοδο το π.



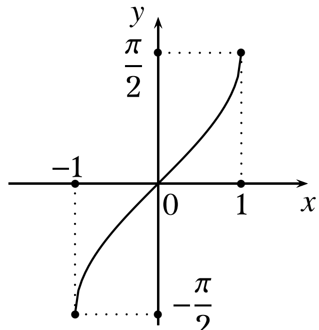
5.3 Αντίστροφες κυκλικές συναρτήσεις

Ο περιορισμός της συνάρτησης $\sin x$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$, οπότε ορίζεται η αντίστροφή της, η οποία ονομάζεται **τόξο ημιτόνου** και συμβολίζεται με

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2].$$



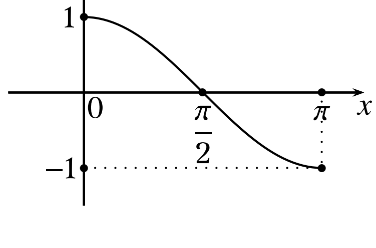
$y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



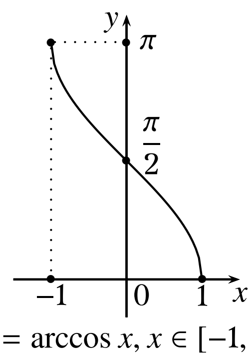
$y = \arcsin x, x \in [-1, 1]$

Ο περιορισμός της συνάρτησης $\cos x$ στο διάστημα $[0, \pi]$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$, οπότε ορίζεται η αντίστροφή της, η οποία ονομάζεται **τόξο συνημιτόνου** και συμβολίζεται με

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$



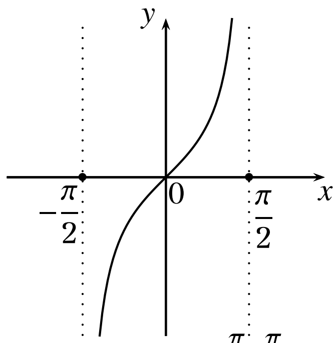
$y = \cos x, x \in [0, \pi]$



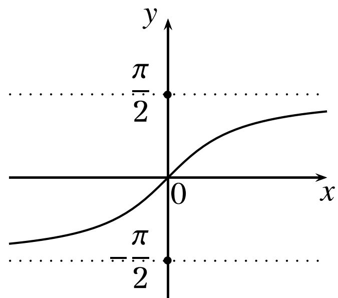
$y = \arccos x, x \in [-1, 1]$

Ο περιορισμός της συνάρτησης $\operatorname{tg} x$ στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε ορίζεται η αντίστροφή της, η οποία ονομάζεται **τόξο εφαπτομένης** και συμβολίζεται με

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2).$$



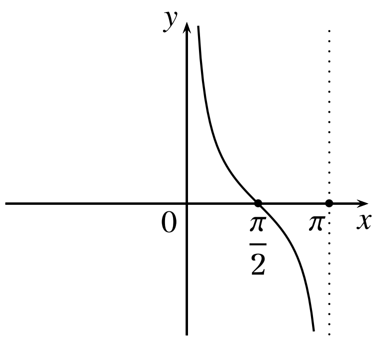
$y = tgx, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



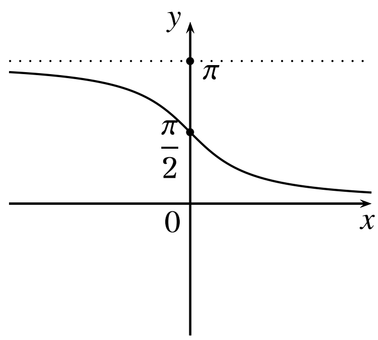
$y = arctgx, x \in \mathbb{R}$

Ο περιορισμός της συνάρτησης $\operatorname{ctg} x$ στο διάστημα $(0, \pi)$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε ορίζεται η αντίστροφή της, η οποία ονομάζεται **τόξο συνεφαπτομένης** και συμβολίζεται με

$$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0, \pi).$$



$y = ctgx, x \in (0, \pi)$



$y = arcctgx, x \in \mathbb{R}$

5.4 Υπερβολικές συναρτήσεις

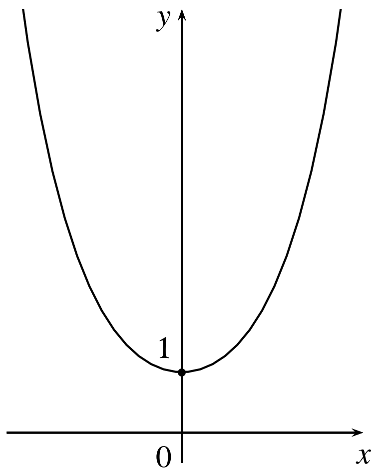
Οι υπερβολικές συναρτήσεις

$$\cosh : \mathbb{R} \to [1, +\infty), \quad \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{tgh} : \mathbb{R} \to (-1, 1), \quad \operatorname{ctgh} : \mathbb{R}^* \to (-\infty, -1) \cup (1, +\infty),$$

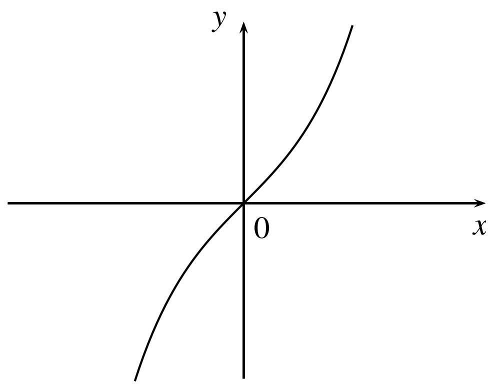
ορίζονται με τη βοήθεια της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^x$, ως εξής:

$$\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} = \frac{\sinh}{\cosh}, \quad \operatorname{ctgh} = \frac{\cosh}{\sinh}.$$

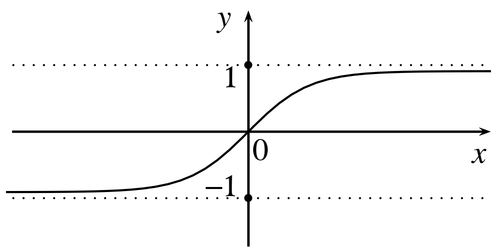
Συγκεκριμένα, οι cosh και sinh αποτελούν αντίστοιχα το άρτιο και περιττό μέρος της e^x, αφού η πρώτη είναι άρτια και η δεύτερη περιττή και ισχύει ότι $e^x = \cosh x + \sinh x$.



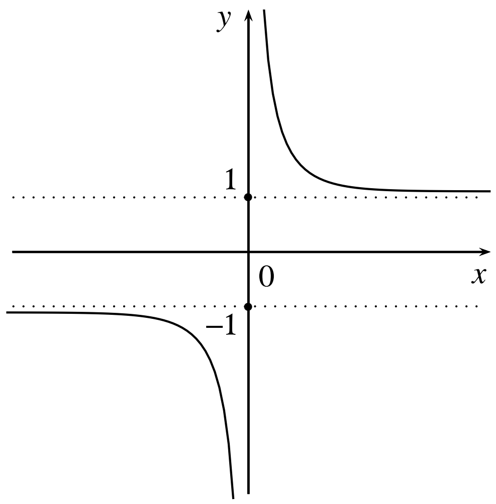
$y = coshx, x \in \mathbb{R}$



$y = sinhx, x \in \mathbb{R}$



$y = tghx, x \in \mathbb{R}$



$y = ctghx, x \in \mathbb{R}^*$

Υπερβολικές ταυτότητες - Ο κανόνας του Osborn. Οι υπερβολικές συναρτήσεις ικανοποιούν ταυτότητες παρόμοιες με αυτές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Σύμφωνα με τον κανόνα του Osborn, αν σε μια τριγωνομετρική ταυτότητα αντικαταστήσουμε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό με τον αντίστοιχο υπερβολικό και αλλάξουμε το πρόσημο κάθε όρου που περιέχει γινόμενο δύο ημιτόνων, τότε προκύπτει η αντίστοιχη υπερβολική ταυτότητα.

Ο κανόνας του Osborn χρησιμεύει για τον προσδιορισμό των υπερβολικών ταυτοτήτων, όχι όμως για την απόδειξή τους. Κάθε υπερβολική ταυτότητα, αφού προσδιορισθεί από την αντίστοιχη τριγωνομετρική, πρέπει να αποδειχθεί με τη βοήθεια του ορισμού των υπερβολικών αριθμών.

Παραδείγματα:

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 &\qquad \longrightarrow \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x &\qquad \longrightarrow \qquad \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x \end{aligned}$$

5.5 Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

οι συναρτήσεις sinh, tgh, ctgh και ο περιορισμός της cosh στο διάστημα $[0, +\infty)$ είναι αμφιμονοσήμαντες, επομένως ορίζονται οι αντίστροφές τους:

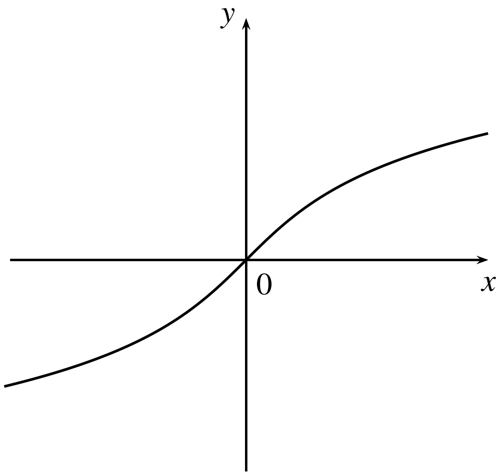
$$\operatorname{arcsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arccosh} : [1, +\infty) \to [0, +\infty),$$

$$\operatorname{arctgh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arcctgh} : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}^*,$$

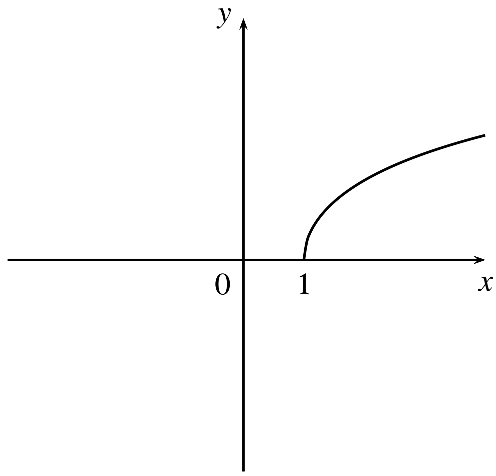
με

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \qquad \operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

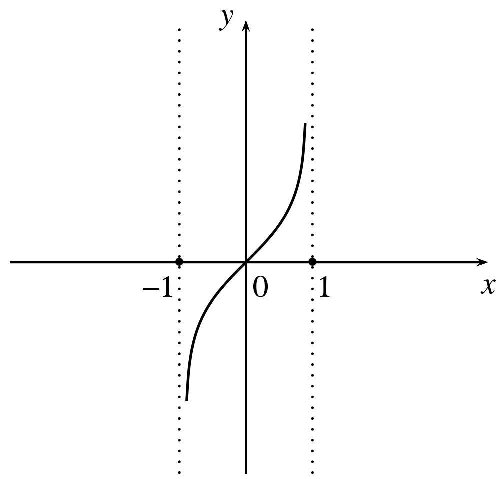
$$\operatorname{arctgh} x = \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}, \qquad \operatorname{arcctgh} x = \ln\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}.$$



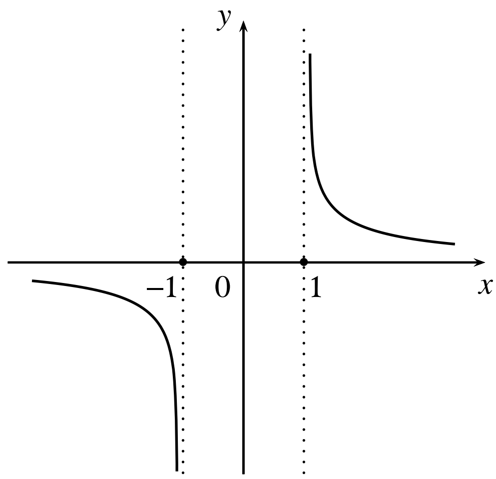
$y = arcsinhx, x \in \mathbb{R}$



$y = arccoshx, x \in [1, +\infty)$



$y = arctghx, x \in (-1, 1)$



$y = arcctghx, x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

5.6 Επανάληψη - Εύρεση τιμών αντίστροφων συναρτήσεων

Για να υπολογίσουμε την τιμή $f^{-1}(x)$ της συνάρτησης f^{-1}, η οποία είναι η αντίστροφη της f, στη θέση x, εφαρμόζουμε απευθείας τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

Παραδείγματα:

- Να υπολογιστεί το $\log_2 32$.

  Είναι $2^x = y \Leftrightarrow \log_2 y = x$. Επειδή $2^5 = 32$, έπεται ότι $\log_2 32 = 5$.

- Να υπολογιστεί το $\arccos 0$.

  Είναι $\cos x = y \Leftrightarrow \arccos y = x$, όπου $x \in [0, \pi]$. Επειδή $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, έπεται ότι $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

- Να υπολογιστεί το $\operatorname{arctg} 1$.

  Είναι $\operatorname{tg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{arctg} y = x$. Επειδή $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, έπεται ότι $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

- Να υπολογιστεί το $\operatorname{arccosh} 1$.

  Είναι $\cosh x = y \Leftrightarrow \operatorname{arccosh} y = x$. Επειδή $\cosh 0 = 1$, έπεται ότι $\operatorname{arccosh} 1 = 0$.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 1

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 47, Κεφάλαιο 1). *Δίδονται οι συναρτήσεις* f, g, *με*

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \qquad g(x) = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}.$$

Να εξετασθεί αν οι συναρτήσεις αυτές είναι ίσες.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 49, Κεφάλαιο 1). *Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση*

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}/[-1, 1]$$

είναι 1-1 και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 52, Κεφάλαιο 1). *Να αποδειχθεί ότι κάθε γνησίως αύξουσα συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και ότι η αντίστροφή της είναι επίσης γνησίως αύξουσα.*

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 55, Κεφάλαιο 1). *Έστω συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *για την οποία ισχύει η σχέση*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|, \qquad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

όπου $k \geq 0$. *Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *με* $F(x) = f(x) - kx$ *είναι φθίνουσα.*

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 59, Κεφάλαιο 1). *Αν* $f/\mathbb{R}$ *είναι μια πραγματική, όχι σταθερή, συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση*

$$f(x) + f(t) = 2f\left(\frac{x+t}{2}\right)f\left(1 + \frac{x-t}{2}\right),$$

για κάθε $x, t \in \mathbb{R}$. *Να αποδειχθεί ότι* $f(1) = 1$.

Αν επιπλέον $f(0) = 0$, *να αποδειχθεί ότι*

- *Η* f *είναι περιττή.*
- $f(x) + f(x+2) = 0$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.
- *Η* f *είναι περιοδική με περίοδο 4.*

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 60, Κεφάλαιο 1). *Να εξετασθεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.*

$$f(x) = \log_a \frac{1-x}{1+x}, \quad g(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2+1}), \quad h(x) = x\frac{1-a^x}{1+a^x},$$

όπου $0 < a \neq 1$.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 62, Κεφάλαιο 1). *Δίδονται οι συναρτήσεις* $f, g/\mathbb{R}$, *με*

$$f(x) = \frac{1-2e^x}{1+3e^x}, \quad g(x) = 1 - e^{2x}.$$

Να αποδειχθεί ότι η f *είναι 1-1 και να ευρεθεί η αντίστροφή της.*

Να επιλυθεί η εξίσωση $(g \circ f^{-1})(x) = 0$.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 64, Κεφάλαιο 1). *Να προσδιορισθεί η αντίστροφη της συνάρτησης* $f(x) = \sinh x/\mathbb{R}$.

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 65, Κεφάλαιο 1). *Δίνεται η συνάρτηση* $f/\mathbb{R}$, *για την οποία ισχύει η σχέση*

$$(\cosh x)f(x) - (\sinh x)f(-x) = \frac{1}{2}x^2 \sin x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρεθεί ο τύπος της f *και να αποδειχθεί ότι είναι φραγμένη.*

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 66, Κεφάλαιο 1). *Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:*

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad \cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 19, Κεφάλαιο 1). *Να αποδειχθεί ότι η σύνθεση δύο αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων* $f : A \to B$ *και* $g : B \to \Gamma$ *είναι αμφιμονοσήμαντη και ότι ισχύει η σχέση*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 20, Κεφάλαιο 1). *Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση* f, *με τύπο*

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}$$

είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφή της.

(Υπόδειξη: Να εκφραστεί η f ως σύνθεση 1-1 απεικονίσεων και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί η άλυτη άσκηση 19.)

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 23, Κεφάλαιο 1). *Αν μια συνάρτηση* $f/\mathbb{R}$ *ικανοποιεί τις συνθήκες:*

$$f(x) \le x \qquad \text{και} \qquad f(x + y) \le f(x) + f(y),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, *να αποδειχθεί ότι* $f(x) = x$.

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 74, Κεφάλαιο 1). *Αν για μια συνάρτηση* $f/\mathbb{R}$ *ισχύει η σχέση:*

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, *να αποδειχθεί ότι η* f *είναι περιττή.*

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 75, Κεφάλαιο 1). *Αν μια συνάρτηση* $f/\mathbb{R}$, *διαφορετική από τη μηδενική, ικανοποιεί τη σχέση:*

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, *να αποδειχθεί ότι η* f *είναι άρτια.*

Αν επιπλέον, υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}^*$, *με* $f(\rho) = 0$, *να αποδειχθεί ότι η* f *είναι περιοδική, με περίοδο* 4ρ.

6 Ακολουθίες

Έστω E ένα μη κενό σύνολο. Ακολουθία είναι κάθε απεικόνιση $f : \mathbb{N}^* \to E$ και συμβολίζεται ως $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ή πιο απλά ως (f_n). Ειδικά αν $E \subseteq \mathbb{R}$, τότε η ακολουθία ονομάζεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Παρατηρήσεις

- Η ακολουθίες αποτελούν μια ειδική κατηγορία απεικονίσεων (συναρτήσεων), στις οποίες το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών. Για το λόγο αυτό, η ανεξάρτητη μεταβλητή συνήθως συμβολίζεται με n αντί για x. Επιπλέον, η εικόνα του προτύπου n συμβολίζεται συνήθως, χάριν απλότητας, με f_n αντί για $f(n)$, και ονομάζεται n-οστός όρος της ακολουθίας.
- Πολλές φορές ως πεδίο ορισμού μιας ακολουθίας ορίζεται το $\mathbb{N}$ αντί για το $\mathbb{N}^*$.

Αναδρομικός (ή αναγωγικός) τύπος μιας ακολουθίας (a_n) ονομάζεται ένας τύπος ο οποίος καθορίζει την τιμή του γενικού όρου a_n συναρτήσει ενός ή και περισσότερων προηγούμενων όρων της ακολουθίας. Για παράδειγμα, η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = n!$ μπορεί να οριστεί ισοδύναμα μέσω του αναδρομικού τύπου

$$a_n = na_{n-1},$$

με αρχική συνθήκη $a_1 = 1$. Τονίζεται ότι η αρχική συνθήκη είναι απαραίτητη για τον πλήρη καθορισμό της ακολουθίας, ενώ οποιαδήποτε αλλαγή αυτής αλλάζει τελείως και την ακολουθία που προκύπτει.

Αριθμητική πρόοδος: Ονομάζεται κάθε ακολουθία που ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = a_n + \lambda$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Τελικά, προκύπτει ότι $a_n = a_1 + (n-1)\lambda$.

Γεωμετρική πρόοδος: Ονομάζεται κάθε ακολουθία που ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = \lambda a_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda \neq 1$. Τελικά, προκύπτει ότι $a_n = a_1\lambda^{n-1}$.

Βασικά αθροίσματα όρων προόδων: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda^k = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}, \lambda \neq 1.$

Άλλα βασικά αθροίσματα: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

Μονοτονία: Η ακολουθία (a_n) είναι:

- *Αύξουσα*, αν $a_{n+1} - a_n \geq 0$ (ή $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ και $a_n > 0$), για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

  (Γνησίως αύξουσα, αν οι ανισότητες είναι γνήσιες).
- *Φθίνουσα*, αν $a_{n+1} - a_n \leq 0$ (ή $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ και $a_n > 0$), για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

  (Γνησίως φθίνουσα, αν οι ανισότητες είναι γνήσιες).

Όριο ακολουθίας: Η ακολουθία (a_n) *συγκλίνει* στο $a \in \mathbb{R}$, οπότε γράφουμε $a_n \to a$ ή $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ή $\lim a_n = a$, αν και μόνο αν

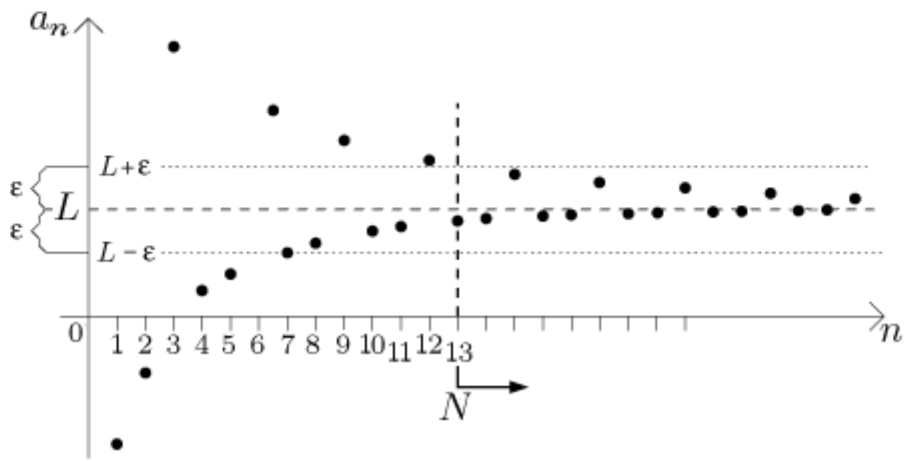
$$\boxed{\text{για κάθε } \varepsilon > 0, \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N}^*, \text{ τέτοιο ώστε, για κάθε } n \geq n_0, \text{ ισχύει } |a_n - a| < \varepsilon.}$$

Η ακολουθία (a_n) *δεν συγκλίνει* στο $a \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν

$$\boxed{\text{υπάρχει } \varepsilon > 0 \text{ τέτοιο ώστε, για κάθε } n_0 \in \mathbb{N}^*, \text{ υπάρχει } n \geq n_0, \text{ τέτοιο ώστε } |a_n - a| \geq \varepsilon.}$$

Παρατηρήσεις:

- Μια ακολουθία που συγκλίνει στο 0 ονομάζεται **μηδενική ακολουθία**.
- Ερμηνεύοντας τον ορισμό της σύγκλισης, μια ακολουθία συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν η απόσταση των όρων της από το a (δηλαδή η ποσότητα $|a_n - a|$) γίνεται τελικά (δηλαδή από κάποιο n_0 και μετά) οσοδήποτε μικρή (το ε μπορεί να είναι ένας θετικός αριθμός οσοδήποτε κοντά στο 0).
- Γενικά λέμε ότι μια σχέση ως προς τη μεταβλητή $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει **τελικά**, όταν ισχύει για κάθε n με $n \geq n_0$, όπου n_0 είναι ένας σταθερός προκαθορισμένος φυσικός αριθμός.
- Σημειώνεται ότι στην εφαρμογή του παραπάνω ορισμού της σύγκλισης η επιλογή του n_0 συνήθως εξαρτάται από την τιμή του ε, για το λόγο αυτό πολλές φορές γράφουμε $n_0 = n_0(\varepsilon)$, τονίζοντας αυτή την εξάρτηση.



Ιδιότητες ορίου ακολουθίας: Αν υπάρχουν τα $\lim a_n$, $\lim b_n$, $\lim c_n$ στο $\mathbb{R}$, τότε

- $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.
- $\lim (a_n)^k = (\lim a_n)^k$, για κάθε $k \neq 0$.
- $\lim(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim a_n + \mu \lim b_n$.
- $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n$.
- (Κριτήριο παρεμβολής.) Αν $\lim b_n = \lim c_n = a$ και $b_n \leq a_n \leq c_n$, για κάθε $n \geq n_0$, τότε $\lim a_n = a$.

  Ειδική περίπτωση κριτήριου παρεμβολής: Αν $\lim b_n = 0$ και $|a_n| \leq b_n$, για κάθε $n \geq n_0$, τότε $\lim a_n = 0$.

  Εφαρμογές: $\sqrt[n]{2n^3 + 3n^2 + 5}$, $\sqrt[n]{4^n + 3^n}$, $\dfrac{\sin n}{n}$, $\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Κατ΄ εκδοχή σύγκλιση: Η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $+\infty$ αν και μόνο αν

$$\boxed{\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ τέτοιος ώστε } n \geq n_0 \Rightarrow a_n > \varepsilon.}$$

Η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $-\infty$ αν και μόνο αν

$$\boxed{\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ τέτοιος ώστε } n \geq n_0 \Rightarrow a_n < -\varepsilon.}$$

Βασικά όρια:

- $\lim \dfrac{1}{n^p} = 0$, για κάθε $p > 0$.
- $\lim a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$. (Επιπλέον, αν $a < -1$ τότε το όριο δεν υπάρχει.)
- $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, για κάθε $a > 0$.
- $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.
- $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = e$.

  (Αποδεικνύεται ότι $\lim \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.)

Υπακολουθία: Για κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (k_n), η (a_{k_n}) ονομάζεται *υπακολουθία* της (a_n). (Δηλαδή η $a_{k_n} = a(k(n))$ είναι η σύνθεση των ακολουθιών $k : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ και $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.) Μια χρήσιμη ιδιότητα της ακολουθίας δεικτών (k_n) είναι η εξής: $k_n \geq n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ (αποδεικνύεται με επαγωγή).

Από τον ορισμό του ορίου προκύπτει ότι $\lim a_n = a \Rightarrow \lim a_{k_n} = a$.

Σημείο συσσώρευσης: Το $a \in \mathbb{R}$ είναι *σημείο συσσώρευσης* της (a_n), αν και μόνο αν

$$\boxed{\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ και για κάθε } n \in \mathbb{N}^*, \text{ υπάρχει } m \in \mathbb{N}^*, \text{ με } m \geq n, \text{ τέτοιος ώστε } |a_m - a| < \varepsilon.}$$

Δηλαδή, υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας σε κάθε οσοδήποτε μικρή περιοχή του σημείου συσσώρευσης a.

Πρόταση. *Ο $a \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης της (a_n), αν και μόνο αν υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) με $\lim a_{k_n} = a$.*

Φράγμα ακολουθίας: Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι *φραγμένη* (ισοδύναμα *απολύτως φραγμένη*), αν υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $m \leq a_n \leq M$ (ισοδύναμα, αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $|a_n| \leq m$), για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

- Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.
- Έστω (a_n) μια (τελικά) αύξουσα ακολουθία. Αν είναι άνω φραγμένη, τότε $\lim a_n = \sup a_n$, αλλιώς $\lim a_n = +\infty$. (Εφαρμογές: $a_{n+1} = \sqrt{18 + 7a_n}, a_1 = 1$.)
- Έστω (a_n) μια (τελικά) φθίνουσα ακολουθία. Αν είναι κάτω φραγμένη, τότε $\lim a_n = \inf a_n$, αλλιώς $\lim a_n = -\infty$.
- Αν (a_n) φραγμένη και (b_n) μηδενική, τότε $\lim(a_n b_n) = 0$.
  Εφαρμογές: $\dfrac{\sin n}{n}, \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Αν (a_n) είναι μια φραγμένη ακολουθία, τότε ορίζονται οι ακολουθίες

$$\beta_n = \sup_{m\geq n} a_m = \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} \quad \text{και} \quad \gamma_n = \inf_{m\geq n} a_m = \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}.$$

Άμεσα προκύπτει ότι οι (β_n) και (γ_n) είναι φραγμένες και μονότονες (η (β_n) είναι φθίνουσα, ενώ η (γ_n) είναι αύξουσα) και επιπλέον ισχύει ότι $\gamma_n \leq a_n \leq \beta_n$. Επομένως υπάρχουν τα όρια $\lim \beta_n$ και $\lim \gamma_n$, τα οποία συμβολίζονται αντίστοιχα με $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$.

Αν (a_n) είναι μια μη φραγμένη ακολουθία, τότε τα $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$ ορίζονται με τον ίδιο τρόπο, αλλά δεν είναι απαραίτητα πραγματικοί αριθμοί.

Πρόταση. *Τα $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$ μιας ακολουθίας (a_n) αποτελούν αντίστοιχα το μέγιστο και το ελάχιστο σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας.*

Πόρισμα. *Το όριο μιας ακολουθίας (a_n) υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$ αν και μόνο αν $\limsup a_n = \liminf a_n$. Στην περίπτωση αυτή είναι $\lim a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$.*

Πρόταση. *Για κάθε ακολουθία θετικών όρων ισχύει ότι*

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Πρόταση (Bolzano-Weierstrass). *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει σημείο συσσώρευσης.*

Βασική ακολουθία: Η ακολουθία (a_n), ονομάζεται *βασική* αν και μόνο αν

$$\boxed{\text{για κάθε } \varepsilon > 0, \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ τέτοιος ώστε, για κάθε } m, n \geq n_0, \text{ ισχύει } |a_n - a_m| < \varepsilon.}$$

Πρόταση (Cauchy). *Μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν είναι βασική.*

Η προηγούμενη πρόταση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την απόδειξη της μη σύγκλισης μιας ακολουθίας, ή για την απόδειξη της σύγκλισής της, όταν το όριό της είναι άγνωστο.

Κριτήρια σύγκλισης:

- Αν $a_n \neq 0$ και $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda < 1$, τότε $\lim a_n = 0$.

  Εφαρμογές: $\frac{4^n}{n!}$, $\frac{(-1)^n n^3}{2^n}$

- Αν $a_n \neq 0$ και $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$.

  Εφαρμογές: $\sqrt[n]{2n^3 + 3n^2 + 5}$, $\sqrt[n]{4^n + 3^n}$, $\sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}}$.

- (Stoltz) Αν (A_n) μια γνησίως αύξουσα, όχι άνω φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών και $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim \frac{a_n}{A_n} = \ell$.

  Εφαρμογές: $\frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n}$.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 5). *Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι ακολουθίες:*

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \beta_n = \frac{3n+2}{4^n}, \qquad \gamma_n = \frac{(-1)^n}{n^2+5n+2}.$$

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{n+1}{n}\left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Bernoulli: $n \in \mathbb{N}, \theta > -1 \Rightarrow (1+\theta)^n \geq 1 + n\theta$, για $\theta = \frac{-1}{(n+1)^2} > -1$, προκύπτει ότι

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \geq \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1} = 1$$

άρα η (α_n) είναι αύξουσα.

Η ακολουθία (β_n) είναι γνησίως φθίνουσα, διότι

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{3n+5}{4^{n+1}}\frac{4^n}{3n+2} = \frac{1}{4}\frac{3n+5}{3n+2} \leq \frac{1}{4}\frac{3n+5n}{3n} = \frac{1}{4}\frac{8}{3} = \frac{2}{3} < 1$$

Η ακολουθία (γ_n) δεν μπορεί να είναι αύξουσα, ούτε φθίνουσα γιατί κάθε 2 διαδοχικοί όροι έχουν αντίθετο πρόσημο, δηλαδή ισχύει $\gamma_1 < \gamma_2 > \gamma_3 < \gamma_4 > \cdots$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 6). *Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι φραγμένες:*

$$\alpha_n = \frac{2n}{n^2+1}\cos(n+1), \qquad \beta_n = n2^{-n}, \qquad \gamma_n = (-1)^n \frac{n^2 \sin n + 2n}{2n^2+3}.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιηθούν οι γνωστές ανισότητες

$$|\cos x| \le 1, \qquad |\sin x| \le 1, \qquad \frac{2x}{1+x^2} \le 1, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η τελευταία προκύπτει ως εξής:

$$(x-1)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \ge 0 \Rightarrow 2x \le x^2 + 1 \Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} \le 1.$$

Βάσει των παραπάνω, είναι

$$|\alpha_n| = \frac{2n}{n^2+1}|\cos(n+1)| \le \frac{2n}{n^2+1} \le 1$$

και

$$|\gamma_n| = \frac{|n^2 \sin n + 2n|}{2n^2+3} \le \frac{n^2|\sin n| + 2n}{2n^2+3} \le \frac{n^2+2n}{2n^2+3} \le \frac{n^2+2n^2}{2n^2} = \frac{3}{2},$$

άρα οι (α_n), (γ_n) είναι φραγμένες.

Για την (β_n) είναι

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} \le \frac{n+n}{2n} = 1,$$

άρα η (β_n) είναι φθίνουσα, οπότε $0 < b_n \le b_1 = 1/2$, δηλαδή είναι φραγμένη.

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα (αλλά με μεγαλύτερο άνω φράγμα) ως εξής:

$$|\beta_n| = \frac{n}{2^n} \le \frac{n}{(1+1/2)^n} \le \frac{n}{1+n/2} \le \frac{n}{n/2} = 2.$$

□

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 9). *Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία (a_n), με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Αν η (a_n) συγκλίνει και σε κάποιον άλλον αριθμό $b \neq a$, τότε εφαρμόζοντας δύο φορές τον ορισμό της σύγκλισης, προκύπτει ότι για $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2} > 0$, υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, τέτοια ώστε

$$n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{και} \qquad n \geq n_2 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon.$$

Επιλέγοντας $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, οι δύο παραπάνω ανισότητες ισχύουν για $n \geq n_0$. Επομένως, για $n \geq n_0$, έχουμε

$$|a-b| = |a_n - b - (a_n - a)| \leq |a_n - b| + |a_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = |a-b|,$$

δηλαδή $|a-b| < |a-b|$, το οποίο είναι άτοπο. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 11.1). *Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει στο ίδιο όριο με την ακολουθία αυτή.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία (a_n), με $\lim a_n = a$. Βάσει του ορισμού της σύγκλισης, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.

Αν (a_{k_n}) είναι μια υπακολουθία της (a_n), τότε η (k_n) είναι εξ ορισμού μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, οπότε είναι $k_n \geq n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως,

$$n \geq n_0 \Rightarrow k_n \geq k_{n_0} \geq n_0 \Rightarrow |a_{k_n} - a| < \varepsilon,$$

δηλαδή η (a_{k_n}) ικανοποιεί τον ορισμό της σύγκλισης, οπότε $\lim a_{k_n} = a$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 11.2). *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία (a_n), με $\lim a_n = a$. Τότε, για $\varepsilon = 1$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε $|a_n - a| < 1$, για κάθε $n \geq n_0$. Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

προκύπτει ότι

$$|a_n| - |a| \leq ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < 1,$$

άρα $|a_n| < 1 + |a|$, για κάθε $n \geq n_0$. Αν ληφθεί

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\}$$

(το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένο, άρα έχει μέγιστο), τότε είναι $|a_n| \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, δηλαδή η (a_n) είναι φραγμένη. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 12). *Να βρεθούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:*

$$\alpha_n = \frac{8n^3 + 4n^2 - 5n + 7}{4n^3 + 10n^2 - 6n + 3}, \qquad \beta_n = \frac{3n^3 + 5n^2 + 6n - 2}{2n^4 + 3n^3 - 6n^2 + 11}, \qquad \gamma_n = \frac{2n^3 + 4n^2 - 7n + 3}{n^2 - 5n + 12}.$$

Λύση. Έχουμε ρητές παραστάσεις ως προς τη μεταβλητή n, οπότε σε κάθε περίπτωση διαιρούμε με τον μεγιστοβάθμιο όρο του παρονομαστή.

$$\lim \alpha_n \overset{/n^3}{=} \lim \frac{8 + 4/n - 5/n^2 + 7/n^3}{4 + 10/n - 6/n^2 + 3/n^3} = \frac{8 + \lim(4/n) - \lim(5/n^2) + \lim(7/n^3)}{4 + \lim(10/n) - \lim(6/n^2) + \lim(3/n^3)} = \frac{8}{4}$$

$$\lim \beta_n \overset{/n^4}{=} \lim \frac{3/n + 5/n^2 + 6/n^3 - 2/n^4}{2 + 3/n - 6/n^2 + 11/n^4} = \frac{\lim(3/n) + \lim(5/n^2) + \lim(6/n^3) - \lim(2/n^4)}{2 + \lim(3/n) - \lim(6/n^2) + \lim(11/n^4)} = 0$$

$$\lim \gamma_n \overset{/n^2}{=} \frac{2n + 4 - 7/n + 3/n^2}{1 - 5/n + 12/n^2} = \frac{2\lim n + 4 - \lim(7/n) + \lim(3/n^2)}{1 - \lim(5/n) + \lim(12/n^2)} = +\infty$$

□

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 17). *Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (a_n), με*

$$a_1 = 1 \qquad \textit{και} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{5}{2a_n}, \quad \textit{για } n \in \mathbb{N}^*,$$

συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.

Λύση. Αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας, δηλαδή αν $\lim a_n = x \in \mathbb{R}$, τότε θα είναι

$$x = \lim a_{n+1} = \lim \frac{a_n^2 + 5}{2a_n} = \frac{x^2 + 5}{2x}$$

δηλαδή θα πρέπει να είναι $x^2 = 5$, οπότε $x = \sqrt{5}$ (η αρνητική ρίζα απορρίπτεται διότι $a_n > 0$).

Παρατηρούμε ότι $a_1 = 1 < a_2 = 3 > a_3 = 14/6 > \cdots$. Εικάζουμε λοιπόν ότι, για $n \geq 2$, η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το $x = \sqrt{5}$, και στη συνέχεια το αποδεικνύουμε. Πράγματι,

$$a_{n+1} - x = \frac{a_n^2 + 5}{2a_n} - x = \frac{a_n^2 + x^2 - 2xa_n}{2a_n} = \frac{(a_n - x)^2}{2a_n} \geq 0, \qquad n \geq 1,$$

άρα η (a_{n+1}) είναι κάτω φραγμένη (από το x), καθώς επίσης και

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 5}{2a_n} - a_n = \frac{a_n^2 + x^2 - 2a_n^2}{2a_n} = -\frac{a_n^2 - x^2}{2a_n} = -\frac{(a_n - x)(a_n + x)}{2a_n} \leq 0, \quad n \geq 2,$$

άρα η (a_{n+1}) είναι φθίνουσα.

Κατόπιν τούτων, η (a_{n+1}) είναι συγκλίνουσα, οπότε το όριό της είναι αναγκαστικά το $x = \sqrt{5}$, σύμφωνα με τα προηγούμενα, δηλαδή $\lim a_n = \lim a_{n+1} = \sqrt{5}$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 18). *Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία* (a_n), *με*

$$a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}, \quad \textit{πλήθος ριζικών } n, \quad a > 0,$$

συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.

Λύση. Ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι ο εξής:

$$a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}, \qquad a_1 = \sqrt{a}.$$

Η ακολουθία προφανώς αποτελείται από θετικούς όρους. Αν υπάρχει το όριο, δηλαδή αν $\lim a_n = x \in \mathbb{R}$, τότε θα πρέπει να είναι

$$x = \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{a + a_n} = \sqrt{a + \lim a_n} = \sqrt{a + x}.$$

Επομένως,

$$x^2 - x - a = 0,$$

οπότε $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ (Η αρνητική ρίζα $\overline{x} = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$ απορρίπτεται διότι $a_n > 0$).

Παρατηρούμε ότι $a_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a + \sqrt{a}} < \cdots$, οπότε εικάζουμε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το x και στη συνέχεια το αποδεικνύουμε με επαγωγή.

Προφανώς, $a_1 < x$. Έστω ότι η σχέση $a_n < x$ ισχύει για κάποιο $n \geq 1$. Τότε,

$$x - a_{n+1} = x - \sqrt{a + a_n} = \frac{x^2 - a - a_n}{x + \sqrt{a + a_n}} = \frac{x - a_n}{x + \sqrt{a + a_n}} > 0.$$

Επομένως ισχύει $a_n < x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η (a_n) είναι άνω φραγμένη.

Επιπλέον,

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a + a_n} - a_n = \frac{a + a_n - a_n^2}{\sqrt{a + a_n} + a_n} = \frac{-(a_n - x)(a_n - \overline{x})}{\sqrt{a + a_n} + a_n} > 0$$

άρα η (a_n) είναι και (γνησίως) αύξουσα.

Για την τελευταία ισότητα, υπενθυμίζεται ότι η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, όταν $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, έχει 2 πραγματικές ρίζες, τις $\rho_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, και τότε ισχύει ότι

$$ax^2 + bx + c = a(x - \rho_1)(x - \rho_2).$$

Επομένως, η παράσταση $a + a_n - a_n^2$ του αριθμητή παραγοντοποιείται ως

$$a + a_n - a_n^2 = -(a_n^2 - a_n - 2) = -(a_n - x)(a_n - \overline{x}).$$

Κατόπιν τούτων, η ακολουθία είναι συγκλίνουσα, οπότε $\lim a_n = x$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 21). *Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:*

$$\alpha_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2+1}, \qquad \beta_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Λύση. Για την ακολουθία (α_n), παρατηρούμε ότι ο αριθμητής είναι μια φραγμένη παράσταση, ενώ ο παρονομαστής τείνει στο $+\infty$. Επομένως, εκτιμάμε ότι το όριό της θα είναι το 0 και θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της παρεμβολής για να το αποδείξουμε. Πράγματι, είναι

$$|\alpha_n| = \frac{|\sin\frac{n\pi}{2}|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \to 0,$$

επομένως, $\alpha_n \to 0$.

Για την (β_n), με ανάλυση σε απλά κλάσματα, βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}, \qquad \text{όπου } A = 1/2 = -B.$$

Κατόπιν τούτου, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\beta_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1/2}{2k-1} - \frac{1/2}{2k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{2k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1/2}{2k-1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1/2}{2k-1} = \frac{1}{2} - \frac{1/2}{2n+1} \to \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 26). *Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας:*

$$\alpha_n = \frac{9\alpha^n - 5\beta^{n+1}}{3\alpha^n + \beta^n}, \qquad \alpha, \beta \neq 0.$$

Λύση. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $|\alpha| < |\beta|$, τότε $\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = 0$, οπότε

$$\alpha_n = \frac{9(\alpha/\beta)^n - 5\beta}{3(\alpha/\beta)^n + 1} \to -5\beta.$$

Αν $|\alpha| > |\beta|$, τότε $\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$, οπότε

$$\alpha_n = \frac{9 - 5\beta(\beta/\alpha)^n}{3 + (\beta/\alpha)^n} \to 3.$$

Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha_n = \dfrac{9-5\beta}{4}$.

Αν $\alpha = -\beta$, τότε $\alpha_n = \dfrac{9-5\beta(-1)^n}{3+(-1)^n}$ και το όριο δεν υπάρχει, διότι έχει 2 υπακολουθίες με διαφορετικά όρια, τις

$$\alpha_{2n} = \frac{9-5\beta}{3+1} \qquad \text{και} \qquad \alpha_{2n+1} = \frac{9+5\beta}{3-1},$$

εκτός αν $\beta = -3/5$, οπότε είναι $\alpha_n = 3$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 30). *Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:*

$$\alpha_n = \sqrt[n]{4n^3 + 3n^2 + 5n + 3}, \qquad \beta_n = \sqrt[n]{4^n + 7^n}.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε τα γνωστά όρια $\lim \sqrt[n]{n} = \lim \sqrt[n]{a} = 1$, όπου $a > 0$, καθώς επίσης και το κριτήριο παρεμβολής. Είναι

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{3} \leq \alpha_n = \sqrt[n]{4n^3 + 3n^2 + 5n + 3} \leq \sqrt[n]{4n^3 + 3n^3 + 5n^3 + 3n^3} = \sqrt[n]{15n^3} = \sqrt[n]{15}(\sqrt[n]{n})^3 \to 1,$$

άρα $\lim \alpha_n = 1$.

Ομοίως,

$$7 = \sqrt[n]{7^n} \leq \beta_n = \sqrt[n]{4^n + 7^n} \leq \sqrt[n]{7^n + 7^n} = 7\sqrt[n]{2} \to 7,$$

άρα $\lim \beta_n = 7$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 34). *Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:*

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \beta_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n, \qquad \gamma_n = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^n.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιηθεί το βασικό όριο $\lim e_n = e$, όπου $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$.

$$\alpha_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1-n} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{e_{n-1}} \frac{n-1}{n} \to \frac{1}{e}$$

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \left(\frac{n-3}{n}\right)^n = \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^n \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\
&= \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^{n-2} \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^2 \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-1} \left(\frac{n-2}{n-1}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\
&= \alpha_{n-2} \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^2 \alpha_{n-1} \left(\frac{n-2}{n-1}\right) \alpha_n \to e^{-1} \cdot 1 \cdot e^{-1} \cdot 1 \cdot e^{-1} = e^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^n = \left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^n \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^n = \sqrt[3]{\left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^{3n} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{3n}} \\
&= \sqrt[3]{\left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^{3n-1} \frac{3n-2}{3n-1} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{3n}} = \sqrt[3]{\alpha_{3n-1} \frac{3n-2}{3n-1} \alpha_{3n}} \to \sqrt[3]{e^{-1} \cdot 1 \cdot e^{-1}} = e^{-2/3}.
\end{aligned}$$

□

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 41). *Να βρεθούν τα σημεία συσσώρευσης της ακολουθίας:*

$$\alpha_n = \begin{cases} \sqrt[n]{n}, & n = 3k, k \in \mathbb{N}^*, \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, & n = 3k+1, k \in \mathbb{N}, \\ \frac{n+1}{2n}, & n = 3k+2, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

και στη συνέχεια να βρεθούν τα $\limsup a_n$ *και* $\liminf a_n$.

Λύση. Επειδή κάθε υπακολουθία μιας ακολουθίας έχει το ίδιο όριο με την ακολουθία αυτή, έπεται ότι

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[3k]{3k} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3k+1}\right)^{3k+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k+3}{2(3k+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Τέλος, αφού δεν υπάρχουν άλλα σημεία συσσωρεύσεως, διότι οι 3 αυτές υπακολουθίες διαμερίζουν την (a_n), έπεται ότι

$$\limsup a_n = \max\{1, e, 1/2\} = e \qquad \text{και} \qquad \liminf a_n = \min\{1, e, 1/2\} = 1/2.$$

□

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 47). *Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:*

$$\alpha_n = \frac{4^n}{n!}, \qquad \beta_n = (-1)^n \frac{n^3}{2^n}, \qquad \gamma_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιηθεί το κριτήριο μηδενικής ακολουθίας: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \lambda < 1 \Rightarrow a_n \to 0$.

Είναι

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{4^n} = \frac{4}{n+1} \to 0 < 1,$$

επομένως $\alpha_n \to 0$.

$$\left|\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right| = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{2} < 1,$$

επομένως $\beta_n \to 0$.

$$\left|\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1,$$

επομένως $\gamma_n \to 0$.

□

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 48). *Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:*

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}}, \qquad b_n = \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}}.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιηθεί το κριτήριο της ρίζας: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \lambda \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \to \lambda$.

Θέτουμε $c_n = \frac{(n+1)^n}{n!}$. Είναι

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{(n+1)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \to e,$$

οπότε $a_n = \sqrt[n]{c_n} \to e$.

Θέτουμε $d_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}$. Είναι

$$\left|\frac{d_{n+1}}{d_n}\right| = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)(3n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} = \frac{2n+1}{3n+2} \to \frac{2}{3}$$

οπότε $b_n = \sqrt[n]{d_n} \to 2/3$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 50). *Αν (x_n) είναι μια ακολουθία θετικών αριθμών η οποία συγκλίνει στο x, να αποδειχθεί ότι*

$$\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = x.$$

Λύση. Θέτουμε $a_n = x_1 x_2 \cdots x_n > 0$. Είναι

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}}{x_1 x_2 \cdots x_n} = x_{n+1} \to x,$$

επομένως $\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = x$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 52). *Να αποδειχθεί ότι*

$$\lim \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιηθεί η πρόταση Stolz:

Αν (b_n) γνησίως αύξουσα, θετική και όχι άνω φραγμένη, τότε

$$\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=x \Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n}=x.$$

Θέτοντας $a_n=1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}$ και $b_n=n$, έχουμε ότι

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{n+1-n}=\sqrt[n+1]{n+1}\to 1,$$

επομένως $a_n/b_n \to 1$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 53). *Να αποδειχθεί ότι*

$$\lim \frac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n}=1.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιηθεί η πρόταση Stolz.

Θέτοντας $a_n=1+2^2+3^3+\cdots+n^n$ και $b_n=n^n$, έχουμε ότι

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}-n^n}=\frac{1}{1-\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}}\to 1,$$

διότι

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 0\cdot\frac{1}{e}=0,$$

επομένως $a_n/b_n \to 1$. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 36). *Να υπολογισθούν τα όρια των ακολουθιών:*

$$\alpha_n = \left(\frac{4n+3}{4n}\right)^n, \qquad \beta_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}, \qquad \gamma_n = \left(3+\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^{2n}.$$

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 53). *Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας* (a_n), *με*

$$a_1 = 1 \qquad \text{και} \qquad a_{n+1} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} a_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 54). *Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία* (a_n), *με*

$$a_n = \frac{1}{1+x^{n+1}} + \frac{1}{x+x^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{x^n+x^{n+1}}, \quad x > 1,$$

είναι μηδενική.

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 59). *Να υπολογισθούν τα όρια των ακολουθιών:*

$$\alpha_n = \sqrt[n]{x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n + 1}, \quad x > 0, \qquad \beta_n = \sqrt{n+3} - 2\sqrt{n+4} + \sqrt{n+5}.$$

7 Σειρές ακολουθιών

Για κάθε ακολουθία (a_n) ορίζεται η *ακολουθία μερικών αθροισμάτων* (s_n) με

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{ή αναδρομικά} \quad s_n = s_{n-1} + a_n,\ s_1 = a_1.$$

Ορισμός. *Σειρά της ακολουθίας (a_n) ονομάζεται το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n$.*

Αν $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$, λέμε ότι η σειρά *συγκλίνει* (στο s), αλλιώς η σειρά *αποκλίνει*. Αν $\lim s_n = +\infty$ (αντ. $-\infty$), τότε λέμε ότι η σειρά *απειρίζεται* θετικά (αντ. αρνητικά).

Βασικές σειρές:

- **Γεωμετρική σειρά**: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & |x| < 1 \\ +\infty, & x > 1. \end{cases}$ (Αν $x < -1$, το όριο δεν υπάρχει.)

  Εφαρμογές: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{5^n}.$

- **Εκθετική σειρά**: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

  Εφαρμογές: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n!}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}.$

- **Αρμονική σειρά p-τάξης**: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$, αν $p \leq 1$, αλλιώς συγκλίνει.

  Εφαρμογές: Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$, όπου $p(n)$, $q(n)$ πολυώνυμα βαθμού k και λ αντίστοιχα, συγκλίνει αν και μόνο αν $\lambda - k > 1$.

- **Τηλεσκοπική σειρά**: Σειρά που μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ (ή πιο γενικά οι όροι της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων απλοποιούνται και τελικά μένει ένα πλήθος αυτών ανεξάρτητο του n). Για παράδειγμα,

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right) = \lim\left(1 - \tfrac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Ιδιότητες σειρών:

- Αν $\lim a_n \neq 0$, τότε η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.

- (Γραμμικότητα) Αν $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, τότε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (ka_n + \lambda b_n) = ka + \lambda b$.

- (Συνέλιξη σειρών) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}.$

Σύγκριση σειρών (με θετικούς όρους):

- **Κριτήριο σύγκρισης I**: Αν ισχύουν τελικά οι ανισότητες $0 \le a_n \le b_n$, τότε

  i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty.$

  ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$

  Εφαρμογές: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin^2 n}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+n}.$

- **Κριτήριο σύγκρισης II**: Αν ισχύουν τελικά οι ανισότητες $a_n \ge 0$, $b_n > 0$ και $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε:

  i) Αν $\ell \neq 0, +\infty$, οι σειρές είναι της αυτής φύσης.

  ii) Αν $\ell = 0$, τότε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$

  iii) Αν $\ell = +\infty$, τότε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$

  Εφαρμογές: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}, \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\tfrac{1}{2n+1}\right).$

Κριτήρια σύγκλισης σειρών:

1. **Κριτήριο συμπύκνωσης Cauchy**: Αν (a_n) φθίνουσα και $a_n \ge 0$, τότε

   $$\text{n} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ συγκλίνει αν και μόνο αν n } \sum_{n=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ συγκλίνει.}$$

   Εφαρμογές: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$, σύγκλιση της αρμονικής p-σειράς.

2. **Leibniz**: Αν (a_n) φθίνουσα με $a_n \ge 0$ και $\lim a_n = 0$, τότε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = S \in \mathbb{R}$, με

   $$\left|\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_i - S\right| \le a_{n+1}.$$

   Το μερικό άθροισμα $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_i$ αποτελεί προσέγγιση της τιμής S του αθροίσματος της σειράς, ενώ η απόλυτη διαφορά είναι το σφάλμα της προσέγγισης. Έτσι, αν για παράδειγμα ζητείται προσέγγιση με σφάλμα μικρότερο του 0.001, τότε επιλέγεται n τέτοιο ώστε $a_{n+1} < 0.001$.

3. **Απόλυτη σύγκλιση**: Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και λέμε ότι συγκλίνει απολύτως. Επιπλέον, τότε ισχύει ότι $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

   Μια σειρά που συγκλίνει αλλά όχι απολύτως, λέμε ότι συγκλίνει υπό συνθήκη.

4. **Cauchy**: Έστω $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$. Αν $\ell < 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Αν $\ell > 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.

   Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^n$.

5. **D' Alembert**: Έστω $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$. Αν $\ell < 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Αν $\ell > 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.

   Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{4n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-7}{5^n}$.

6. **Raabe**: Έστω $\lim n\left(1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) = \ell$. Αν $\ell > 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Αν $\ell < 1$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$.

   Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$.

7. **Λογαριθμικό κριτήριο**: Έστω $\lim \frac{\ln |a_n|}{\ln(1/n)} = \ell$. Αν $\ell > 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Αν $\ell < 1$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$.

   Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2+n+1)^{\ln a}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}(n+1)}{\sqrt{n^2+4}(n^2+3)}$.

8. **Abel**: Αν $\sum_{k=1}^{n} a_k$ φραγμένη και (b_n) φθίνουσα και μηδενική, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

   Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 5n}{n}$.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 3

Άσκηση (Άλυτες ασκήσεις 1-2). *Να ευρεθούν τα αθροίσματα των σειρών:*

$$i)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)^2},\qquad ii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)},\qquad iii)\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right).$$

Λύση. (Τηλεσκοπικές σειρές.)

$i)$ Θέτουμε $a_n = \dfrac{n+1}{n^2(n+2)^2}$ και $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Παρατηρούμε ότι $(n+2)^2 = n^2+4n+4 = n^2+4(n+1)$, οπότε $4(n+1) = (n+2)^2 - n^2$ και

$$\begin{aligned}4s_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{4(k+1)}{k^2(k+2)^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+2)^2-k^2}{k^2(k+2)^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+2)^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)^2}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k^2} = 1+\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2} \to 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n = \dfrac{5}{16}$.

$ii)$ Θέτουμε $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ και $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ και εφαρμόζουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}\\ \Leftrightarrow&\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n+2)A+n(n+2)B+n(n+1)C}{n(n+1)(n+2)}\\ \Leftrightarrow&1 = (n+1)(n+2)A+n(n+2)B+n(n+1)C\end{aligned}$$

Θέτοντας $n = 0, -1, -2$, βρίσκουμε αντίστοιχα ότι $A = 1/2$, $B = -1$, $C = 1/2$, οπότε

$$2s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} = 1-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2} \to \frac{1}{2}$$

Επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n = \dfrac{1}{4}$.

$iii)$ Θέτουμε $a_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$ και $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, οπότε

$$\begin{aligned}s_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\ln\frac{k+1}{k}+\ln\frac{k+1}{k+2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+2}{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\ln\frac{k+1}{k} = \ln 2 - \ln\frac{n+2}{n+1} \to \ln 2\end{aligned}$$

Επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n = \ln 2$. □

Άσκηση (Άλυτες ασκήσεις 10-11). *Να ευρεθούν τα αθροίσματα των σειρών:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+2)},$$

Λύση. Υπενθυμίζονται οι τύποι της γεωμετρικής και της εκθετικής σειράς:

$$k \in \mathbb{N}, |x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} x^n = x^k + x^{k+1} + \cdots = \frac{x^k}{1-x}, \qquad x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = e^x$$

Βάσει αυτών έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} = \frac{2/4}{1-2/4} + \frac{3/4}{1-3/4} = \frac{2}{2} + \frac{3}{4-3} = 1 + 3 = 4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} + e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + e = 2e$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-2)(n-1)}{n!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{n!} - 3\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n!} + 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
&= 2e - 1 - 2 - 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} + 2(e - 1 - 1 - 1/2) \\
&= 2e - 3 - 3(e-2) + 2e - 5 = e - 2
\end{aligned}$$

(Απάντηση.) □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 13). *Να γραφούν σε ρητή μορφή οι αριθμοί:*

$$1.1\overline{43}, \qquad 2.3\overline{9}.$$

Λύση.

$$1.1\overline{43} = \frac{11.\overline{43}}{10} = \frac{11}{10} + \frac{43}{10}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100^n} = \frac{11}{10} + \frac{43}{10}\frac{1/100}{1-1/100} = \frac{11}{10} + \frac{43}{10}\frac{1}{99} = \frac{11 \cdot 99 + 43}{10 \cdot 99} = \frac{1132}{990}$$

$$2.3\overline{9} = \frac{23.\overline{9}}{10} = \frac{23}{10} + \frac{9}{10}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{23}{10} + \frac{9}{10}\frac{1/10}{1-1/10} = \frac{23}{10} + \frac{9}{10}\frac{1}{9} = \frac{24}{10}$$

□

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 17). *Να υπολογισθεί μια προσέγγιση για το άθροισμα*

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

με σφάλμα μικρότερο του 0.001.

Λύση. (Πρόταση Leibniz) Θέτουμε $a_n = \dfrac{1}{(2n)!}$ και $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$, με $\lim s_n = S$ το ζητούμενο άθροισμα. Επειδή η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα και μηδενική, εφαρμόζοντας την πρόταση Leibniz, προκύπτει ότι

$$|s_n - S| \le a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)!}$$

Επομένως, προκειμένου να είναι $|s_n - S| < 0.001$, αρκεί να επιλέξουμε n τέτοιο ώστε

$$a_{n+1} < 0.001 \Leftrightarrow \frac{1}{(2n+2)!} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow (2n+2)! > 1000 \Leftrightarrow 2n+2 > 6 \Leftrightarrow n > 2$$

Οπότε, για $n = 3$, η ζητούμενη προσέγγιση είναι $S \simeq s_3 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{6!}$. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 25). *Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές*

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^{3/2} - 3n + 5}{2n^2 + 3n^{5/3} + 4n - 3}, \qquad ii) \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}, \qquad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n - 2n}.$$

Λύση. (1ο-2ο κριτήριο σύγκρισης)

i) Θέτουμε $a_n = \dfrac{4n^{3/2} - 3n + 5}{2n^2 + 3n^{5/3} + 4n - 3}$. Η ακολουθία είναι θετικών όρων (τελικά). Συγκρίνοντας τους εκθέτες των μεγιστοβάθμιων όρων αριθμητή και παρονομαστή, παρατηρούμε ότι $p = 2 - 3/2 = 1/2 \leq 1$, οπότε αναμένουμε η σειρά να απειρίζεται, οπότε προσπαθούμε να φράξουμε τον a_n από μια μικρότερη παράσταση του n, που ξέρουμε ότι η σειρά της απειρίζεται.

$$a_n = \frac{4n^{3/2} - 3n + 5}{2n^2 + 3n^{5/3} + 4n - 3} \geq \frac{4n^{3/2} - 3n^{3/2}}{2n^2 + 3n^2 + 4n^2} = \frac{n^{3/2}}{9n^2} = \frac{1}{9}\frac{1}{n^{1/2}}$$

Ως γνωστό είναι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$ άρα και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, βάσει του 1ου κριτηρίου σύγκρισης.

(Εναλλακτικά, μπορεί να γίνει σύγκριση με την ακολουθία $b_n = \frac{1}{n^p}$, οπότε $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 2$, και να χρησιμοποιηθεί το 2ο κριτήριο σύγκρισης.)

ii) Θέτουμε $a_n = n\mathrm{tg}(1/n^2)$, και συγκρίνουμε με την $b_n = 1/n$.

$$\lim \frac{n\mathrm{tg}(1/n^2)}{1/n} = \lim \frac{\sin(1/n^2)}{1/n^2} \lim \frac{1}{\cos(1/n^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \lim \frac{1}{\cos(1/n^2)} = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

Επομένως, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

iii) Θέτουμε $a_n = \dfrac{1}{4^n - 2n}$ και συγκρίνουμε με την $b_n = \dfrac{1}{4^n}$.

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{4^n}{4^n - 2n} = \lim \frac{1}{1 - 2n/4^n} = 1,$$

διότι $c_n = n/4^n \to 0$. Πράγματι, $\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \dfrac{n+1}{4^{n+1}} \cdot \dfrac{4^n}{n} = \dfrac{n+1}{4n} \to \dfrac{1}{4} < 1$. Επομένως, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n - 2n} < +\infty$. □

Παρατήρηση: Η λύση του iii) μέσω του 1ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι πιο δύσκολη. Θα δείξουμε ότι ο όρος $2n$ είναι αμελητέος σε σχέση με τον 4^n, φράσσοντας τελικά την ποσότητα $4^n - 2n$, π.χ. από το 4^{n-1}.

$$4^n - 2n \geq 4^{n-1} \Leftrightarrow 1 - \frac{2n}{4^n} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{2n}{4^n} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{n}{4^n} \leq \frac{3}{8}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει τελικά, δηλαδή από κάποιο n_0 και μετά, αφού $\dfrac{n}{4^n} \to 0$. Επομένως $n \geq n_0 \Rightarrow \dfrac{1}{4^n - 2n} \leq \dfrac{1}{4^{n-1}}$, οπότε, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n - 2n} < +\infty$.

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 26). *Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά* $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} a_n$, *όταν*

$$i)\ a_n = \frac{\ln n}{n^{4/3}}, \qquad ii)\ a_n = \frac{\ln n}{n^{3/4}}, \qquad iii)\ a_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{n+1}{n^3+n+1}\right).$$

Λύση. (2ο κριτήριο σύγκρισης.)

i) Επειδή $4/3 > 1$, αναμένουμε ότι η εν λόγω σειρά θα συγκλίνει. Επιλέγουμε p, με $1 < p < 4/3$ (π.χ. $p = 5/4$) και συγκρίνουμε με την $b_n = \dfrac{1}{n^p}$.

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\ln n}{n^{4/3-p}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{4/3-p}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{(4/3-p)x^{4/3-p-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(4/3-p)x^{4/3-p}} = 0$$

οπότε, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

ii) Επειδή $3/4 < 1$, αναμένουμε ότι η εν λόγω σειρά θα απειρίζεται. Επιλέγουμε p, με $3/4 < p < 1$ (π.χ. $p = 4/5$) και συγκρίνουμε με την $b_n = \dfrac{1}{n^p}$.

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim n^{p-3/4} \ln n = +\infty$$

οπότε, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

iii) Επειδή για την παράσταση $c_n = \dfrac{n+1}{n^3+n+1}$ είναι βαθμός παρονομαστή - βαθμό αριθμητή = 2, συγκρίνουμε με την $b_n = \dfrac{1}{n^2}$.

$$\begin{aligned}\lim \frac{a_n}{b_n} &= \lim \frac{\operatorname{arctg}(c_n)}{c_n} \cdot \frac{c_n}{b_n} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \lim \frac{c_n}{b_n} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{arctg} x)'}{x'} \cdot \lim \frac{c_n}{b_n} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} \cdot \lim \frac{n^2(n+1)}{n^3+n+1} = 1\end{aligned}$$

Επομένως, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. □

Παρατήρηση: Για την απόδειξη του *i*), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το 1ο κριτήριο σύγκρισης ως εξής: Έστω σταθερά $c > 0$ της οποίας την τιμή θα υπολογίσουμε εκ των υστέρων. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $x > 0 \Rightarrow \ln x \le x - 1 < x$, έχουμε ότι

$$\frac{\ln n}{n^{4/3}} = \frac{\ln(n^c)^{1/c}}{n^{4/3}} = \frac{\ln(n^c)}{cn^{4/3}} < \frac{n^c}{cn^{4/3}} = \frac{1}{cn^{4/3-c}}$$

Αρκεί λοιπόν να επιλέξουμε $4/3 - c > 1 \Leftrightarrow c < 4/3 - 1 = 1/3$ και να θέσουμε $b_n = \dfrac{1}{n^{4/3-c}}$. Τότε, η σειρά $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, επομένως θα συγκλίνει και η $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} a_n$.

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 29). *Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά* $\sum\limits_{\text{n=1}}^{\infty} a_n$*, όταν*

$$i)\ a_n = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{n^2}, \qquad ii)\ a_n = \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{n^2+1}\right)^n, \qquad iii)\ a_n = (-1)^n \frac{100^n}{n^n}.$$

Λύση. (Κριτήριο Cauchy.)

i) Είναι

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^n = e^{-2/3} < 1$$

άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως.

ii) Είναι

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \operatorname{arctg} \frac{n}{n^2+1} = \operatorname{arctg} 0 = 0 < 1$$

άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως.

iii) Είναι

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{100}{n} = 0 < 1$$

άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως.

□

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 30). *Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, όταν*

$$a_n = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}, & n = 3k, k \in \mathbb{N}^*, \\ 2^n, & n = 3k+1, k \in \mathbb{N}, \\ n^2 + 1, & n = 3k+2, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Λύση. (Κριτήριο Cauchy.)

Έστω $b_n = \sqrt[n]{|a_n|}$. Είναι

$$\begin{aligned} \lim b_{3n} &= \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}, \\ \lim b_{3n+1} &= \lim \sqrt[n]{2^n} = 2, \\ \lim b_{3n+2} &= \lim \sqrt[n]{n^2+1} = 1. \end{aligned}$$

Επομένως, $\limsup b_n = \max\{1/e, 2, 1\} = 2 > 1$ και άρα η σειρά δεν συγκλίνει. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 32). *Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\frac{x^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Λύση. (Κριτήριο D' Alembert.)

Θέτοντας $a_n = n(n+1)\frac{x^n}{n!}$, έχουμε ότι

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{(n+1)(n+2)|x|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n(n+1)|x|^n} = |x| \lim \frac{(n+2)}{(n+1)n} = 0 < 1,$$

άρα η πρώτη σειρά συγκλίνει απολύτως.

Θέτοντας $b_n = \frac{x^n}{n(n+1)}$, έχουμε ότι

$$\lim\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\frac{n(n+1)}{|x|^n} = |x| \lim \frac{n}{n+2} = |x|.$$

άρα η δεύτερη σειρά συγκλίνει απολύτως όταν $|x| < 1$ και δεν συγκλίνει όταν $|x| > 1$. Η περίπτωση όπου $|x| = 1$ αντιμετωπίζεται ξεχωριστά. Στην περίπτωση αυτή, η σειρά συγκλίνει απολύτως ως τηλεσκοπική σειρά. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 33). *Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *όταν*

$$i)\ a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 4\cdots(2n)}{n!}, \qquad ii)\ a_n = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}, \qquad iii)\ a_n = \frac{n^{100}}{2^n}.$$

Λύση. (Κριτήριο D' Alembert.)

i)

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{1\cdot 2\cdot 4\cdots(2n)(2n+2)}{(n+1)!}\frac{n!}{1\cdot 2\cdot 4\cdots(2n)} = \lim \frac{2n+2}{n+1} = 2 > 1$$

άρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

ii)

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!}\frac{(3n)!}{n!(2n)!} = \lim \frac{(n+1)(2n+1)(2n+2)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{4}{27} < 1$$

άρα η εν λόγω σειρά συγκλίνει απολύτως.

iii)

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^{100}} = \frac{1}{2}\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{100} = \frac{1}{2} < 1$$

άρα η εν λόγω σειρά συγκλίνει απολύτως. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 35). *Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{7 \cdot 11 \cdots (4n+3)} 2^n.$$

Λύση. (Κριτήριο Raabe.) Θέτοντας $a_n = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{7 \cdot 11 \cdots (4n+3)} 2^n$, έχουμε ότι

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+2)}{7 \cdot 11 \cdots (4n+3)(4n+7)} 2^{n+1} \frac{7 \cdot 11 \cdots (4n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{1}{2^n} = 2\frac{2n+2}{4n+7} = \frac{4n+4}{4n+7} \to 1,$$

οπότε δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα από το κριτήριο D' Alembert και, για τον λόγο αυτόν, χρησιμοποιούμε το κριτήριο Raabe.

$$n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = n\left(1 - \frac{4n+4}{4n+7}\right) = n\frac{4n+7-(4n+4)}{4n+7} = \frac{3n}{4n+7} \to \frac{3}{4} < 1,$$

επομένως, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 40). *Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)\sqrt{2n+5}}{(n^2+1)\sqrt{n^2+2}},$$

Λύση. (Λογαριθμικό κριτήριο) Θέτοντας $a_n = \dfrac{(n+2)\sqrt{2n+5}}{(n^2+1)\sqrt{n^2+2}}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim \frac{\ln|a_n|}{\ln(1/n)} &= \lim \frac{\ln((n+2)\sqrt{2n+5}) - \ln((n^2+1)\sqrt{n^2+2})}{-\ln n} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln(2x+5) - \ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+2)}{-\ln x}\end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό, εφαρμόζουμε τον κανόνα L' Hopital, διότι προφανώς $a_n \to 0$, οπότε $\ln|a_n| \to -\infty$, δηλαδή ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος απειρίζονται.

Κατόπιν τούτου, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim \frac{\ln|a_n|}{\ln(1/n)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{2x+5} - \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{x}{x^2+2}}{-\dfrac{1}{x}} \\ &= -\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+2} + \frac{x}{2x+5} - \frac{2x^2}{x^2+1} - \frac{x^2}{x^2+2}\right) = -(1 + 1/2 - 2 - 1) = 3/2 > 1,\end{aligned}$$

οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 50). *Να ευρεθεί ποιες από τις παρακάτω σειρές είναι απολύτως συγκλίνουσες και ποιες συγκλίνουσες υπό συνθήκη.*

$$\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^2+1}}, \qquad \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots (2n)} \right)^3, \qquad \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{n},$$

$$\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2n+1} \right), \qquad \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+40}{5n+20} \right)^n, \qquad \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2\cosh n)}.$$

Λύση.

$$n = \ln e^n \le \ln(2\cosh n) = \ln(e^n + e^{-n}) \le \ln(2e^n) = n + \ln 2 \le 2n \Rightarrow \frac{1}{2n} \le \frac{1}{\ln(e^n + e^{-n})} \le \frac{1}{n}$$

□

Άσκηση. *Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά* $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} a_n$, *όταν*

$$i)\ a_n = \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}}, \qquad ii)\ a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}, \qquad iii)\ a_n = \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}, \qquad iv)\ a_n = \frac{1}{n\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}.$$

Λύση. *i*) Είναι

$$\lim \frac{\ln|a_n|}{\ln(1/n)} = \lim \frac{2\ln n - \sqrt{n}\ln e}{-\ln n} = -2 + \lim \frac{\sqrt{n}}{\ln n} = +\infty$$

άρα η σειρά συγκλίνει.

ii) $1 \le \sqrt[n]{\ln n} < \sqrt[n]{n} \to 1$, άρα $a_n \to 1$, οπότε η σειρά δεν συγκλίνει.

iii) Ο αριθμητής της παράστασης $a_n = \dfrac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}$ απειρίζεται, ενώ ο παρονομαστής τείνει στο e, άρα $a_n \to +\infty$ και $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} a_n = +\infty$.

iv)

$$a_n = \frac{1}{n^{4/3} - n^{1/2}} = \frac{1}{n^{4/3}(1 - n^{-5/6})} \le \frac{2}{n^{4/3}} = b_n$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει τελικά επειδή $\lim(1-n^{-5/6}) = 1$, οπότε τελικά $1-n^{-5/6} \ge 1/2$. Η σειρά της (b_n) συγκλίνει ως p-σειρά με $p = 4/3 > 1$, άρα $\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} a_n < +\infty$. □

Άσκηση. *Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, όπου*

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, \qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Λύση. Η πρώτη σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη, βάσει του κριτηρίου Leibniz, διότι η $(|a_n|)$ είναι φθίνουσα και μηδενική, ενώ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$ ως p-σειρά με $p = 1/2 < 1$.

Για τη δεύτερη σειρά, έχουμε ότι

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{1}{\sqrt{4n}} + \frac{1}{\sqrt{4n}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4n}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4n}} = c_n > 0.$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty$, έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$. □

Παρατήρηση : Οι δύο σειρές έχουν τους ίδιους ακριβώς όρους, αλλά σε διαφορετική διάταξη. Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned}\{\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}^*\} &= \{\frac{1}{\sqrt{2n-1}} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\frac{-1}{\sqrt{2n}} : n \in \mathbb{N}^*\} \\ &= \{\frac{1}{\sqrt{4n-3}} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\frac{1}{\sqrt{4n-1}} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\frac{-1}{\sqrt{2n}} : n \in \mathbb{N}^*\}\end{aligned}$$

Εν τούτοις, η πρώτη συγκλίνει ενώ η δεύτερη όχι. Αυτό είναι ένα γενικότερο αποτέλεσμα (Θεώρημα Riemann), σύμφωνα με το οποίο, όταν μια σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη, τότε για κάθε $x \in \overline{\mathbb{R}}$ υπάρχει αναδιάταξη των όρων της σειράς που να αθροίζει στο x.

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 54). *Να αποδειχθεί ότι*

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots = +\infty.$$

Λύση. Ο γενικός όρος της σειράς είναι ο $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\left[\frac{n+3}{2}\right] + (-1)^n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Έστω $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ η ακολουθία μερικών αθροισμάτων. Είναι

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}+1} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \to +\infty$$

και

$$s_{2n-1} = s_{2n-2} + a_{2n-1} = s_{2n-2} + \frac{1}{\sqrt{n}-1} \to +\infty + 0 = +\infty.$$

Επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n = +\infty$. □

Άσκηση (Άλυτη 46, Κεφ. 3). *Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές*

$$\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} \frac{1}{2n+1}(\operatorname{tg} x)^{2n+1}, \qquad \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} x^n \frac{\sin(n\theta)}{n}, \qquad x < 1, \theta \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Θέτοντας $a_n = \dfrac{1}{2n+1}(\operatorname{tg} x)^{n+1}$, έχουμε ότι

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{2n+3}|\operatorname{tg} x|^{n+2}\frac{2n+1}{|\operatorname{tg} x|^{n+1}} = \frac{2n+1}{2n+3}|\operatorname{tg} x| \to |\operatorname{tg} x|$$

οπότε η σειρά της (a_n) συγκλίνει απολύτως όταν $|\operatorname{tg} x| < 1$, ενώ δεν συγκλίνει όταν $|\operatorname{tg} x| > 1$. Αν $\operatorname{tg} x = 1$, η σειρά δεν συγκλίνει, ενώ αν $\operatorname{tg} x = -1$, η σειρά συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο Leibniz.

Για τη δεύτερη σειρά, θέτοντας $b_n = x^n \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$, έχουμε ότι $\sqrt[n]{|b_n|} \to |x|$, οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως όταν $|x| < 1$, αλλιώς δεν συγκλίνει. □

Άσκηση (Άλυτη 47, Κεφ. 3). *Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές*

$$\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty}(\ln n)^{-n}, \qquad \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} n^{\ln n}\ln n^n, \qquad \sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} x^n \ln n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Η πρώτη σειρά συγκλίνει, διότι

$$(\ln n)^{-n} = \left(\frac{1}{\ln n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad n \geq 3.$$

Η δεύτερη σειρά απειρίζεται θετικά, διότι

$$n^{\ln n}\ln n^n = n^{\ln n} n \ln n \geq n \cdot n = n^2.$$

Η τρίτη σειρά, από το κριτήριο του λόγου, συγκλίνει απολύτως για $|x| < 1$, αλλιώς δεν συγκλίνει. □

Άσκηση (Άλυτη 48, Κεφ. 3). *Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Έστω $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}$. Αν $p \leq 0$, τότε προφανώς η (a_n) δεν είναι μηδενική, οπότε η σειρά δεν συγκλίνει.

Επειδή

$$\frac{|a_n|}{\frac{1}{n^p}} = \frac{n^p}{(n+(-1)^n)^p} = \frac{1}{\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^p} \to 1,$$

και δεδομένου ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$, έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν $p > 1$.

Αν $0 < p \leq 1$, τότε θέτοντας[1] $s_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, $n \geq 2$, άμεσα προκύπτει ότι η υπακολουθία (s_{2n+1}) συγκλίνει, έστω στο $s \in \mathbb{R}$, αφού είναι κάτω φραγμένη και φθίνουσα. Πράγματι,

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n} + a_{2n+1} = \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^p} - \frac{1}{(2n)^p} \\ &\geq \frac{1}{4^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{6^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(2n+2)^p} - \frac{1}{(2n)^p} = \frac{1}{(2n+2)^p} - \frac{1}{2^p} \geq -\frac{1}{2^p} \end{aligned}$$

και $s_{2n+3} - s_{2n+1} = \frac{1}{(2n+3)^p} - \frac{1}{(2n+2)^p} < 0$. Τότε όμως θα συγκλίνει και η (s_{2n}) στο s, αφού

$$s_{2n} = s_{2n+1} - a_{2n+1} = s_{2n+1} - \frac{1}{(2n)^p}.$$

Επομένως, η (s_n) συγκλίνει στο s. □

Άσκηση (Άλυτη 49, Κεφ. 3). *Αν (a_n) είναι μια φθίνουσα και μηδενική ακολουθία μηδενικών όρων, να δειχθεί ότι η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

συγκλίνει υπό συνθήκη.

Λύση. Έστω $b_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. Η εν λόγω σειρά δεν συγκλίνει απολύτως, διότι $0 < b_n \leq a_1/n$.

Από την Πρόταση Stolz έπεται ότι

$$\lim b_n = \lim a_{n+1} = 0,$$

άρα η (b_n) είναι μηδενική.

$$\begin{aligned} b_n - b_{n+1} &= \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \frac{a_1 + \cdots + a_{n+1}}{n+1} = \frac{(n+1)a_1 + \cdots + (n+1)a_n - (na_1 + \cdots + na_{n+1})}{n(n+1)} \\ &= \frac{a_1 + \cdots + a_n - na_{n+1}}{n(n+1)} \geq \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{n+1} - na_{n+1}}{n(n+1)} = 0, \end{aligned}$$

επομένως η (b_n) είναι φθίνουσα, άρα από το κριτήριο Leibniz η σειρά συγκλίνει. □

[1] Εναλλακτικά, θέτοντας $b_n = a_{2n} + a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}$, προφανώς είναι $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ και η τελευταία σειρά συγκλίνει, όπως προκύπτει από το κριτήριο του ολοκληρώματος, αφού το αντίστοιχο γενικευμένο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί και συγκλίνει.

8 Όριο - συνέχεια

Όριο συνάρτησης: Αν $\xi, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, είναι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in D(f)$ με

$$\boxed{\begin{cases} 0 < |x-\xi| < \delta, & \text{αν } \xi \in \mathbb{R}, \\ x > \delta, & \text{αν } \xi = +\infty, \\ x < -\delta, & \text{αν } \xi = -\infty, \end{cases} \quad \text{να ισχύει} \quad \begin{cases} |f(x)-\ell| < \varepsilon, & \text{αν } \ell \in \mathbb{R}, \\ f(x) > \varepsilon, & \text{αν } \ell = +\infty, \\ f(x) < -\varepsilon, & \text{αν } \ell = -\infty. \end{cases}}$$

Τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to\xi^+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi^-} f(x)$ στο $\xi \in \mathbb{R}$ ορίζονται όπως παραπάνω, με την επιπλέον απαίτηση να είναι $x > \xi$ (αντίστοιχα $x < \xi$). Το όριο της f στο ξ υπάρχει αν και μόνο αν τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα.

Αρχή της μεταφοράς: Αν $\xi, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, είναι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε $x_n \in D(f) \setminus \{\xi\}$ και $\lim x_n = \xi$ ισχύει $\lim f(x_n) = \ell$.

Εφαρμογές: $\lim_{x\to 0} \cos \dfrac{1}{x}$.

Ιδιότητες ορίου: Οι τρεις πρώτες ιδιότητες ισχύουν αρκεί να υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$, με $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$, και να μην προκύπτει απροσδιοριστία $(+\infty - \infty,\ 0 \cdot (\pm\infty))$. Οι τρεις τελευταίες απαιτούν να πληρούνται οι αντίστοιχες προϋποθέσεις σε μια περιοχή $\pi(\xi) \setminus \{\xi\}$.

- $\lim_{x\to\xi}(kf(x) + \lambda g(x)) = k \lim_{x\to\xi} f(x) + \lambda \lim_{x\to\xi} g(x)$.
- $\lim_{x\to\xi}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to\xi} f(x) \lim_{x\to\xi} g(x)$.
- $\lim_{x\to\xi} |f(x)|^k = |\lim_{x\to\xi} f(x)|^k$, για κάθε $k \in \mathbb{Q}^*$. (Το απόλυτο μπορεί να παραλειφθεί, όταν $k \in \mathbb{N}^*$.)
- (Κριτήριο παρεμβολής) Αν $\lim_{x\to\xi} h(x) = \lim_{x\to\xi} g(x) = \ell$ και $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$.
- (Σύνθεση) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to\ell} g(x) = m$ και $f(x) \neq \ell$, τότε $\lim_{x\to\xi} g(f(x)) = m$.
- Αν $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to\xi} f(x) = a \in (0, +\infty)$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = b \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to\xi}(f(x))^{g(x)} = a^b$.

Βασικά όρια:

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$. (Αποδεικνύονται με το κριτήριο παρεμβολής.)

  Εφαρμογές: $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{7x} - e^{3x}}{x}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x(e^x + e^{-x})}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x(x+2)}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + \sin x)}{x}$.
- $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Ασύμπτωτες:

- Αν $\xi \in \mathbb{R}$, τότε η ευθεία $x = \xi$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi^+} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim_{x\to\xi^-} f(x) = \pm\infty$.

- Αν $\xi = \pm\infty$, τότε η ευθεία $y = ax+b$ είναι $\begin{cases} \text{πλάγια ασύμπτωτη της } f, & \text{αν } a \neq 0, \\ \text{οριζόντια ασύμπτωτη της } f, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi}(f(x) - (ax+b)) = 0$.

  Οι a, b υπολογίζονται ως εξής: $a = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{x}$ και $b = \lim_{x\to\xi}(f(x) - ax)$.

9 Συνέχεια συναρτήσεων

Ορισμός: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\xi \in D(f)$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$.

Ακολουθιακός ορισμός: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\xi \in D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \in D(f)$ και $\lim x_n = \xi$ είναι $\lim f(x_n) = f(\xi)$.

Βασικές συνεχείς συναρτήσεις:

- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση.
- Κάθε ρητή συνάρτηση (πηλίκο δύο πολυωνύμων) είναι συνεχής.
- Η $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.
- Οι τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις.
- Οι a^x και $\log_a x$, $1 \neq a > 0$.
- Αν f, g συνεχείς τότε είναι και οι

  $kf+\lambda g, \quad fg, \quad \frac{f}{g}, \quad (f(x))^{g(x)}, \text{ αν } f(x) > 0, \quad |f|^a, \text{ όπου } a > 0, \quad g\circ f, \text{ αν } R_f \subseteq D_g > 0.$

Συνέχεια σε κλειστό διάστημα: Έστω $f/[a,b]$ συνεχής.

- Η f είναι φραγμένη.
- Υπάρχουν $m, M \in [a,b]$ με $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$, για κάθε $x \in [a,b]$. (Θεώρημα μεγίστου-ελαχίστου)
- Αν $f(a) < \gamma < f(b)$ ή $f(b) < \gamma < f(a)$, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $f(\xi) = \gamma$. (Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής)
- Αν $f(a)f(b) < 0$, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $f(\xi) = 0$. (Θεώρημα Bolzano)
- Αν $f : [a,b] \to [a,b]$, υπάρχει $\xi \in [a,b]$ με $f(\xi) = \xi$. (Θεώρημα σταθερού σημείου)
- Αν η f είναι 1-1, τότε η $f^{-1}/f([a,b])$ είναι επίσης συνεχής.

Ομοιόμορφη (ή ομαλή) συνέχεια: Η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν

$$\boxed{\text{Για κάθε } \varepsilon > 0, \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε } (x, y \in D(f) \text{ και } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).}$$

Η έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας αναφέρεται σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της f και όχι σε μεμονωμένο σημείο. Αποδεικνύεται ότι κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι και συνεχής. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Όμως, κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ασυνέχεια:

- Πρώτου είδους: Αν τα πλευρικά όρια $\lim_{x \to \xi^+} f(x)$, και $\lim_{x \to \xi^-} f(x)$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι και τα δύο ίσα με $f(\xi)$.
- Δεύτερου είδους: Αν κάποιο από τα πλευρικά όρια δεν υπάρχει.

Ασκήσεις

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 3, (βλ. άλυτη άσκηση 4)). *Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης* $f(x) = \cos(1/x)/\mathbb{R}^*$, *όταν* $x \to 0$.

Λύση. Προκειμένου να αποδείξουμε ότι το πλευρικό όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ δεν υπάρχει, αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες (x_n) και (y_n) θετικών αριθμών, τέτοιες ώστε $\lim x_n = \lim y_n = 0$ και τα όρια των ακολουθιών $(f(x_n))$, $(f(y_n))$ να υπάρχουν αλλά να είναι διαφορετικά.

Επιλέγουμε $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ και $y_n = \dfrac{1}{2\pi n + \pi/2}$, οι οποίες είναι προφανώς μηδενικές. Επιπλέον, είναι

$$\lim f(x_n) = \lim \cos(2\pi n) = \lim \cos(0) = 1,$$

$$\lim f(y_n) = \lim \cos(2\pi n + \pi/2) = \lim \cos(\pi/2) = 0 \neq 1,$$

άρα πράγματι το $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ δεν υπάρχει. (Αν υπήρχε, τότε θα έπρεπε να είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim f(x_n) = \lim f(y_n)$.)

Ομοίως, το πλευρικό όριο $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ δεν υπάρχει, διότι αν επιλέξουμε δύο μηδενικές ακολουθίες αρνητικών αριθμών, π.χ. τις $x_n = \dfrac{1}{-2\pi n}$ και $y_n = \dfrac{1}{-2\pi n - \pi/2}$, τότε

$$\lim f(x_n) = \lim \cos(-2\pi n) = \lim \cos(0) = 1,$$

$$\lim f(y_n) = \lim \cos(-2\pi n - \pi/2) = \lim \cos(-\pi/2) = 0 \neq 1.$$

□

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 13). *Να ευρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια:*

$$i)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor,\qquad ii)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt[\lfloor x\rfloor]{x},\qquad iii)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x\lfloor x\rfloor}{4x^2+3}.$$

Λύση. *i*) Από τον ορισμό του ακεραίου μέρους του $x\in\mathbb{R}$, ισχύει ότι $\lfloor x\rfloor\le x<\lfloor x\rfloor+1$, ή ισοδύναμα

$$x-1<\lfloor x\rfloor\le x.$$

Επομένως,

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{2}-1\right)\le\frac{1}{x}\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor\le\frac{1}{x}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Επειδή, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=\frac{1}{2}$.

ii) Ομοίως, για $x>1$, προκύπτει ότι

$$\sqrt[\lfloor x\rfloor]{\lfloor x\rfloor}\le\sqrt[\lfloor x\rfloor]{x}<\sqrt[\lfloor x\rfloor]{\lfloor x\rfloor+1}\le\sqrt[\lfloor x\rfloor]{\lfloor x\rfloor+\lfloor x\rfloor}=\sqrt[\lfloor x\rfloor]{\lfloor x\rfloor}\,\sqrt[\lfloor x\rfloor]{2}$$

Από τα γνωστά όρια $\lim\sqrt[n]{n}=\lim\sqrt[n]{2}=1$, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[\lfloor x\rfloor]{\lfloor x\rfloor}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[\lfloor x\rfloor]{2}=1$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[\lfloor x\rfloor]{x}=1$.

Εναλλακτικά, θέτοντας $f(x)=\sqrt[\lfloor x\rfloor]{x}$, έχουμε ότι

$$\frac{\ln x}{x}\le\ln f(x)=\ln x^{1/\lfloor x\rfloor}=\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\ln x<\frac{\ln x}{x-1}$$

Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}=0$.

Για το πρώτο όριο, για $x>1$, έχουμε ότι

$$0<\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln(\sqrt{x})^2}{x}=\frac{2\ln\sqrt{x}}{x}<\frac{2\sqrt{x}}{x}=\frac{2}{\sqrt{x}},$$

οπότε δεδομένου ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$, έπεται ότι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

Επομένως, είναι και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=0\cdot1=0.$$

iii) Ομοίως,

$$\frac{x^2-x}{4x^2+3}=\frac{x(x-1)}{4x^2+3}<\frac{x\lfloor x\rfloor}{4x^2+3}\le\frac{x^2}{4x^2+3}$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{4x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4x^2+3}=\frac{1}{4}$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\lfloor x\rfloor}{4x^2+3}=\frac{1}{4}$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 23 (βλ. άλυτες ασκήσεις 25, 26)). *Να υπολογισθούν τα όρια*

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x},\qquad ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{1-\cos x},\qquad iii)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{1-\cos x},\ a,b\in\mathbb{R}.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιηθεί το γνωστό όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, καθώς και η γνωστή ταυτότητα $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, οπότε

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x).$$

$$\begin{aligned} i)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos^2 x}(1+\cos x) = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin^2 x}(1+\cos x)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}(1+\cos x) = 1(1+\cos 0) = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{1-\cos^2 x}(1+\cos x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{\sin^2 x}(1+\cos x)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}+1\right)(1+\cos x) = \left(1+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\lim_{x\to 0}(1+\cos x)\\ &= (1+1)(1+\cos 0) = 4. \end{aligned}$$

$$iii)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos bx}{1-\cos x}-\frac{1-\cos ax}{1-\cos x}\right).$$

Επιπλέον, είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos bx}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 bx}{1-\cos^2 x}\frac{1+\cos x}{1+\cos bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 bx}{\sin^2 x}\frac{1+\cos x}{1+\cos bx}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin bx}{bx}\right)^2\lim_{x\to 0}\left(\frac{bx}{\sin x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{1+\cos bx}\\ &= \left(\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\right)^2 b^2\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{1+\cos bx}\\ &= 1\cdot b^2\cdot 1\cdot\frac{1+1}{1+1} = b^2. \end{aligned}$$

Ομοίως προκύπτει και $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos x}=a^2$.

Άρα, τελικά είναι $\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{1-\cos x}=b^2-a^2$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 25 (βλ. άλυτη άσκηση 28)). *Να υπολογισθούν τα όρια*

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{3x}}{x},\qquad ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x(e^{x}+e^{-x})},\qquad iii)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-b^{x}}{x},\quad a,b>0.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιηθεί το γνωστό όριο $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{3x}}{x}=\lim_{x\to 0}e^{3x}\frac{e^{4x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}(4e^{3x})\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}=4e^0\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=4.$$

ii) Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με e^x, προκύπτει

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x(e^{x}+e^{-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x(e^{2x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\frac{2}{e^{2x}+1}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^{2x}+1}=1\cdot\frac{2}{1+1}=1.$$

iii) Δεδομένου ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln a^x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\ln a=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}\ln a=\ln a,$$

προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}=\ln a-\ln b.$$

□

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 30 (βλ. άλυτη άσκηση 32)). *Να υπολογισθεί το όριο*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+x+1}\right)^x.$$

Λύση. Θα χρησιμοποιηθεί το γνωστό όριο $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x=e$. Θέτουμε

$$f(x)=\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+x+1}\right)^x=\left(1+\frac{3x+2}{x^2+x+1}\right)^x \qquad \text{και} \qquad g(x)=\frac{x^2+x+1}{3x+2},$$

οπότε

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^x=\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)\frac{x}{g(x)}}.$$

Αν επιπλέον τεθούν

$$G(x)=\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} \qquad \text{και} \qquad h(x)=\frac{x}{g(x)},$$

τότε

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}G(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)}=\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\frac{x(3x+2)}{x^2+x+1}=3,$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}G(x)^{h(x)}=\lim_{x\to+\infty}G(x)^{\lim_{x\to+\infty}h(x)}=e^3.$$

Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)&=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{3x+2}{x^2+x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(3x+2)}{x^2+x+1}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3x+2}{x^2+x+1}\right)}{\frac{3x+2}{x^2+x+1}}\\&=3\lim_{z\to1}\frac{\ln z}{z-1}=3,\end{aligned}$$

επομένως,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln f(x)}=e^3.$$

□

10 Παράγωγος

Ορισμός: Η παράγωγος $f'(\xi)$ της f στο σημείο ξ του πεδίου ορισμού της ταυτίζεται με το ακόλουθο όριο, όταν αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός:

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Αν η f/A είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $\xi\in A$, τότε η συνάρτηση που ορίζεται από τα ζεύγη $(\xi, f'(\xi))$ ονομάζεται *παράγωγος συνάρτηση* της f και συμβολίζεται με $f'(x)$ ή $\frac{df}{dx}$.

Πρόταση. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ, τότε θα είναι και συνεχής σε αυτό.

Κανόνες παραγώγισης: Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε

- $(\lambda f+kg)'=\lambda f'+kg'$ (Γραμμικότητα)
- $(fg)'=f'g+fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$
- $(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$, ή ισοδύναμα $\frac{df\circ g}{dx}=\frac{df\circ g}{dg}\frac{dg}{dx}$ (Κανόνας αλυσίδας)
- $(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ (διότι $1=\frac{dx}{dx}=\frac{df^{-1}\circ f}{dx}=\frac{df^{-1}\circ f}{df}\frac{df}{dx}=\frac{df^{-1}}{dy}\frac{df}{dx}$)

Βασικές παραγωγίσεις:

$f(x)$	c	x^a	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	a^x	$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
$f'(x)$	0	ax^{a-1}	$\frac{1}{x}$	e^x	$a^x\ln a$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Παράγωγος ανώτερης τάξης: Η n-οστή παράγωγος $f^{(n)}(x)$ (ή $\frac{d^n f}{dx^n}$) της $f(x)$, όπου $n\in\mathbb{N}$, ορίζεται αναδρομικά ως εξής: $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ και $f^{(0)}(x)=f(x)$ (με την προϋπόθεση βέβαια ότι η $f^{(k)}(x)$ παραγωγίζεται, για κάθε $k<n$).

Βασικές παράγωγοι n τάξης: $\cos^{(n)}x=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$, $\quad\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

Εφαπτομένη: Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι:

- Η $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$, αν η f παραγωγίζεται στο ξ.

  Η κάθετη στην εφαπτομένη αυτή είναι η $y-f(\xi)=-\frac{1}{f'(\xi)}(x-\xi)$.

- Η $x=\xi$, αν $\lim_{x\to\xi^-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}, \lim_{x\to\xi^+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\in\{-\infty,+\infty\}$.

Η τιμή $f'(\xi)$ ονομάζεται *συντελεστής διεύθυνσης* ή *κλίση* της εφαπτομένης.

Παραμετρική μορφή: Αν μια καμπύλη C δίνεται σε παραμετρική μορφή δύο μεταβλητών x, y ως προς μια παράμετρο $t\in A$, δηλαδή $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=f(t), y=g(t), t\in A\}$, τότε, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε ότι $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{g'}{f'}$, οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε την εφαπτομένη της σε κάποιο σημείο ξ.

Θεώρημα (Fermat). *Αν η f/A είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο ξ του A και παρουσιάζει σε αυτό τοπικό ακρότατο, τότε είναι $f'(\xi)=0$. (Το ξ είναι εσωτερικό σημείο του A όταν υπάρχει περιοχή $\pi(\xi)\subseteq A$.)*

Θεώρημα (Rolle). *Αν η f συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και $f(a)=f(b)$, τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.*

Θεώρημα (Μέσης Τιμής). *Αν η f συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Πόρισμα. *Αν $f,g/(a,b)$ παραγωγίσιμες, με $f'(x)=g'(x)$, για κάθε $x\in(a,b)$, τότε $f(x)=g(x)+c$, για κάποια σταθερά $c\in\mathbb{R}$.*

Απροσδιόριστες μορφές: $\frac{0}{0}$, $(\pm1)\frac{+\infty}{+\infty}$, $\pm\infty+(\mp\infty)$, $0(\pm\infty)$, 0^0, $1^{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$

Ο κανόνας του L' Hopital: Αν $f,g/\pi(\xi)\setminus\{\xi\}$ παραγωγίσιμες, $g'(x)\neq 0$ και $\lim_{x\to\xi}f(x)=\lim_{x\to\xi}g(x)=\ell$, όπου $\ell\in\{0,-\infty,+\infty\}$, και υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)}{g'(x)}\in\overline{\mathbb{R}}$, τότε είναι $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\xi}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Οι υπόλοιπες απροσδιόριστες μορφές μπορούν να επιλυθούν με τον κανόνα του L' Hopital, αφού πρώτα αναχθούν σε κάποια από τις δύο πρώτες μορφές με τη βοήθεια των τύπων:

$$f-g=\frac{\frac{f-g}{fg}}{\frac{1}{fg}}=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}},\qquad fg=\frac{f}{\frac{1}{g}},\qquad f^g=e^{\ln f^g}=e^{g\ln f}$$

Μονοτονία: Αν f συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε

- f αύξουσα $\Leftrightarrow f'(x)\geq 0$ (αντίστοιχα f φθίνουσα $\Leftrightarrow f'(x)\leq 0$), για κάθε $x\in(a,b)$.
- $f'(x)>0\Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα $f'(x)<0\Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα), για κάθε $x\in(a,b)$.

  (Προσοχή, στη δεύτερη περίπτωση δεν ισχύει η ισοδυναμία.)

Ακρότατα: Τα υποψήφια σημεία τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης ονομάζονται *κρίσιμα σημεία* και είναι: τα εσωτερικά σημεία όπου μηδενίζεται ή δεν ορίζεται η παράγωγος, καθώς και τα άκρα διαστημάτων (αρκεί η συνάρτηση να ορίζεται στα άκρα αυτά). Αν ισχύει κάποια από τις επόμενες συνθήκες:

- η f είναι συνεχής στο ξ και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\begin{cases} x \in (\xi - \delta, \xi) \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ και} \\ x \in (\xi, \xi + \delta) \Rightarrow f'(x) < 0. \end{cases}$

- η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποια περιοχή $\pi(\xi)$, με $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) < 0$,

τότε το ξ είναι θέση τοπικού μεγίστου της f. Αλλάζοντας τις ανισότητες για τις f', f'', προκύπτει θέση τοπικού ελαχίστου.

Κυρτότητα: Η $f/(a,b)$ είναι κυρτή αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- $(1-t)f(x_1) + tf(x_2) \geq f((1-t)x_1 + tx_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in (a,b)$ και $t \in (0,1)$. (Ορισμός)

- $f(x_1) - f(x_2) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1)$, για κάθε $x_1, x_2 \in (a,b)$.

- $f'/(a,b)$ αύξουσα.

- $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (a,b)$.

Αλλάζοντας τις ανισότητες (και θέτοντας $f'/(a,b)$ φθίνουσα), προκύπτουν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε να είναι η f κοίλη. Αν ισχύουν γνήσιες ανισότητες, τότε η f είναι γνησίως κυρτή (αντίστοιχα κοίλη).

Σημείο καμπής: Κάθε σημείο της γραφικής παράστασης στο οποίο η συνάρτηση αλλάζει κυρτότητα.

- Αν το ξ είναι θέση σημείου καμπής, τότε $f''(\xi) = 0$.

- Αν $f''(\xi) = 0$ και $f'''(\xi) \neq 0$, τότε το ξ είναι θέση σημείου καμπής.

Ασκήσεις

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 13 (βλ. άλυτη άσκηση 17)). *Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων*
$$f(x) = x^x/(1,+\infty), \qquad g(x) = (x^2+x+1)^{x^2}/\mathbb{R}$$

Λύση.
$$(f(x))' = (x^x)' = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\,(x\ln x)' = x^x\,(x'\ln x + x(\ln x)') = x^x\,(\ln x+1)$$

$$\begin{aligned}\frac{g'(x)}{g(x)} &= (\ln g(x))' = (x^2\ln(x^2+x+1))' = \left(2x\ln(x^2+x+1) + \frac{x^2}{x^2+x+1}(x^2+x+1)'\right)\\ &= \left(2x\ln(x^2+x+1) + \frac{x^2(2x+1)}{x^2+x+1}\right)\end{aligned}$$

επομένως, $g'(x) = g(x)\left(2x\ln(x^2+x+1) + \dfrac{x^2(2x+1)}{x^2+x+1}\right)$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 23 (βλ. άλυτη άσκηση 28)). *Να ευρεθούν οι σταθερές $a, b, c \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 + ax + b/\mathbb{R}$ και $g(x) = x^3 - c/\mathbb{R}$ τέμνονται στο σημείο $(1,2)$ και έχουν κοινή εφαπτομένη σε αυτό.*

Λύση. Αφού, τέμνονται στο $(1,2)$, θα πρέπει να είναι
$$2 = f(1) = 1 + a + b = g(1) = 1 - c,$$
οπότε
$$a + b = 1 \qquad \text{και} \qquad c = -1.$$
Επιπλέον, έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό, άρα
$$f'(1) = 2\cdot 1 + a = 2 + a = g'(1) = 3\cdot 1^2 = 3,$$
οπότε $a = 1$ και ως εκ τούτου $b = 0$. □

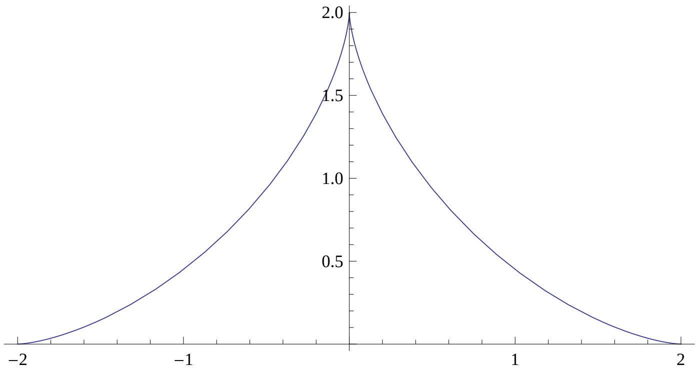
Άσκηση (Λυμένη άσκηση 28 (βλ. άλυτες ασκήσεις 35, 36)). *Να υπολογισθεί με τη βοήθεια του διαφορικού μια προσεγγιστική τιμή του $\sqrt[3]{123}$.*

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}/(0,+\infty)$, οπότε $f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Για $x_0 = 125$, είναι $f(x_0) = 5$ και $f'(x_0) = \dfrac{1}{3\cdot 5^2} = \dfrac{1}{75}$. Επομένως, για $x = 123$, είναι
$$\sqrt[3]{123} = f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 5 + \frac{1}{75}(123-125) = 5 - \frac{2}{75}.$$
□

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 30 (βλ. άλυτες ασκήσεις 38, 39)). *Έστω η καμπύλη με παραμετρική μορφή*

$$x = x(t) = a\cos^3 t, y = y(t) = a\sin^3 t, \qquad t \in [0, \pi], a \neq 0.$$

Αν η εφαπτομένη της σε ένα σημείο $A(x(t), y(t))$ τέμνει τους άξονες στα B, Γ, να δειχθεί ότι το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ έχει σταθερό μήκος (ανεξάρτητο του t).



(Σχήμα.)

Λύση. Η παράγωγος της συνάρτησης δίνεται από τον τύπο

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a3\sin^2 t\cos t}{a3\cos^2 t(-\sin t)} = -\frac{\sin t}{\cos t}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x(t), y(t))$ έχει εξίσωση

$$y - a\sin^3 t = -\frac{\sin t}{\cos t}(x - a\cos^3 t) \Rightarrow y\cos t - a\sin^3 t\cos t = -x\sin t + a\cos^3 t\sin t$$

οπότε

$$y\cos t + x\sin t = a\sin t\cos t.$$

Θέτοντας $y = 0$, βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου B, δηλαδή $B = (a\cos t, 0)$. Θέτοντας $x = 0$, βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου Γ, δηλαδή $\Gamma = (0, a\sin t)$. Επομένως, το τετράγωνο του μήκους του $B\Gamma$ ισούται με

$$(a\cos t - 0)^2 + (0 - a\sin t)^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2,$$

δηλαδή είναι σταθερό. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 50 (βλ. άλυτη άσκηση 64)). *Να υπολογισθούν τα όρια*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x+1}, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$$

Λύση. Για το πρώτο όριο, έχουμε απροσδιοριστία ∞/∞ και εφαρμόζουμε n φορές τον κανόνα L' Hopital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x+1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{n(\ln x)^{n-1}(1/x)}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)(\ln x)^{n-2}}{x} \\ &= \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{x} = 0.\end{aligned}$$

Για το δεύτερο όριο, έχουμε απροσδιοριστία $\infty - \infty$, οπότε μετασχηματίζουμε πρώτα την παράσταση σε μορφή $0/0$ και έπειτα εφαρμόζουμε τον κανόνα 2 φορές:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}.$$

□

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 51 (βλ. άλυτη άσκηση 65)). *Να υπολογισθούν τα όρια*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(3x^2+2x+7\right)^{1/x}$$

Λύση. Το πρώτο όριο είναι της μορφής 1^∞, οπότε θέτουμε $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$ και υπολογίζουμε το $\lim_{x\to 0}\ln f(x)$ με τον κανόνα L' Hopital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ln f(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x))' - (\ln(1-x))'}{1} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-1-x-1}{x^2-1} = \frac{-2}{-1} = 2.\end{aligned}$$

Επομένως, $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{\ln f(x)} = e^2$.

Το δεύτερο όριο είναι της μορφής ∞^0, οπότε θέτουμε $g(x) = (3x^2+2x+7)^{1/x}$ και υπολογίζουμε το $\lim_{x\to+\infty}\ln g(x)$ με τον κανόνα L' Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x^2+2x+7)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6x+2}{3x^2+2x+7} = 0.$$

Επομένως, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln g(x)} = e^0 = 1$. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 18). *Να αποδειχθεί ότι* $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Έστω $y = f(x) = \operatorname{tg} x/(-\pi/2, \pi/2)$, οπότε $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Βάσει της ταυτότητας $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, διαιρώντας κατά μέλη με $\cos^2 x$, προκύπτει ότι

$$1 + y^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Επιπλέον

$$\operatorname{arctg} y = f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow \frac{d}{dx} \operatorname{arctg} y = 1 \Rightarrow \frac{d}{dy} \operatorname{arctg} y \frac{dy}{dx} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dy} \operatorname{arctg} y = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+y^2}$$

□

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 51). *Να αποδειχθούν, με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ., οι ανισότητες*

$$p(x-1) < x^p - 1 < px^{p-1}(x-1), \qquad x > 1, p > 1,$$
$$\frac{\pi}{4} - \frac{1-x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{4} - \frac{1-x}{2}, \qquad 0 < x < 1.$$

Λύση.

$$p(x-1) < x^p - 1 < px^{p-1}(x-1) \Leftrightarrow p < \frac{x^p - 1}{x-1} < px^{p-1}$$

Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ για τη συνάρτηση $f(t) = t^p/[1, x]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (1, x)$, τέτοιο ώστε $p\xi^{p-1} = f'(\xi) = \dfrac{x^p - 1}{x-1}$. Όμως, για $p > 1$, είναι

$$1 < \xi < x \Rightarrow p < p\xi^{p-1} < px^{p-1},$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

Ομοίως για τη δεύτερη ανισότητα,

$$-\frac{1-x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x - \pi/4 < -\frac{1-x}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{1+x^2} < \frac{\operatorname{arctg} x - \pi/4}{1-x} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{\operatorname{arctg} x - \pi/4}{x-1} < \frac{1}{1+x^2}$$

Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ για τη συνάρτηση $g(t) = \operatorname{arctg} t/[x, 1]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (x, 1)$, τέτοιο ώστε $\dfrac{1}{1+\xi^2} = g'(\xi) = \dfrac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1}{x-1} = \dfrac{\operatorname{arctg} x - \pi/4}{x-1}$. Όμως,

$$x < \xi < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1^2} < \frac{1}{1+\xi^2} < \frac{1}{1+x^2},$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 44). *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση* $e^{x-2} + x - 3 = 0$ *έχει ακριβώς μία λύση.*

Λύση. Έστω $f(x) = e^{x-2} + x - 3/\mathbb{R}$, οπότε $f'(x) = e^{x-2} + 1 > 0$. Παρατηρούμε ότι $f(2) = 1 - 1 = 0$, άρα το 2 είναι μια ρίζα της εξίσωσης. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και μια δεύτερη ρίζα $\rho \neq 2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $\rho > 2$. Τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[2, \rho]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (2, \rho)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού $f'(x) > 0$ για κάθε x. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 54). *Έστω* $f/[a, b]$ *συνεχής συνάρτηση, για την οποία υπάρχει η* $f''/(a, b)$. *Αν το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία* $A(a, f(a))$ *και* $B(b, f(b))$ *τέμνει τη γραφική παράσταση της* f *σε ένα τρίτο σημείο* $C(c, f(c))$, *με* $a < c < b$, *να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο* $\xi \in (a, b)$ *με* $f''(\xi) = 0$.

Λύση. Το ευθύγραμμο τμήμα AC έχει συντελεστή διεύθυνσης $\dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$ και το ευθύγραμμο τμήμα CB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\dfrac{f(b) - f(c)}{b - c}$. επειδή τα σημεία A, C, B είναι συνευθειακά, έπεται ότι

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Επιπλέον, εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στα διαστήματα $[a, c]$ και $[c, b]$, προκύπτει ότι υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (a, c)$ και $\xi_2 \in (c, b)$, τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}, \qquad f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Επομένως, $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 58). *Να αποδειχθεί η ταυτότητα*

$$\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}(1+x+x^2), \qquad x \in \mathbb{R}$$

και στη συνέχεια να υπολογισθεί το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}(1+n+n^2)$.

Λύση. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg} x$ και $g(x) = \operatorname{arcctg}(1+x+x^2)$. Παραγωγίζοντας, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-(1+(1+x)^2)}{(1+(1+x)^2)(1+x^2)} = \frac{x^2-(1+x)^2}{(1+1+2x+x^2)(1+x^2)} \\ &\overset{y=1+x+x^2}{=} \frac{-2x-1}{(1+x+y)(y-x)} = \frac{-2x-1}{y-x+xy-x^2+y^2-yx} = \frac{-2x-1}{y-x-x^2+y^2} \\ &= \frac{-2x-1}{1+y^2} = g'(x), \end{aligned}$$

άρα η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή σε όλο το $\mathbb{R}$, δηλαδή $f(x)-g(x)=c$, για κάποια σταθερά c, την οποία υπολογίζουμε θέτοντας οποιαδήποτε τιμή στο x:

$$c = f(0)-g(0) = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{\pi}{4} = 0.$$

Επομένως, η ταυτότητα ισχύει.

Κατόπιν τούτου,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arcctg}(1+k+k^2) = \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{arctg}(1+k) - \operatorname{arctg} k) = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}(n+1) - \frac{\pi}{4}$$

και επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}(1+n+n^2) = \lim s_n = \lim \operatorname{arctg}(n+1) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

□

11 Σειρές Taylor

Θεώρημα (Taylor). *Έστω συνάρτηση $f(t)$, για την οποία υπάρχουν και είναι συνεχείς οι παράγωγοι $f', \dots, f^{(n)}/[a,b]$ και υπάρχει και η $f^{(n+1)}/(a,b)$. Τότε, για κάθε $x, x_0 \in [a,b]$ και για κάθε $\nu \in [n+1]$, υπάρχει ξ μεταξύ των x, x_0 τέτοιο ώστε*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n(x) \\ &= R_n(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0), \end{aligned}$$

όπου $R_n(x) = \dfrac{(x-x_0)^\nu (x-\xi)^{n-\nu+1}}{\nu n!} f^{(n+1)}(\xi)$.

Για $\nu = 1$, η $R_n(x)$ ονομάζεται *υπόλοιπο Cauchy*, ενώ για $\nu = n+1$, ονομάζεται *υπόλοιπο Lagrange*.

Αν $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ και μόνο τότε είναι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Η έκφραση αυτή ονομάζεται *σειρά Taylor* της συνάρτησης f γύρω από το σημείο $x = x_0$. Ειδικά για $x_0 = 0$ προκύπτει η *σειρά Maclaurin* της συνάρτησης f, δηλαδή

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Βασικές σειρές Maclaurin:

- $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1,1)$.
- $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ και $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\sinh x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ και $\cosh x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$, $x \in (-1,1]$.
- $(1+x)^r = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{r}{n} x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n$, $x \in (-1,1)$ και $r \in \mathbb{R}$.

Σειρές Taylor και διωνυμικοί συντελεστές

Οι διωνυμικοί συντελεστές ορίζονται από τον τύπο

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \dfrac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}.$$

όπου το γινόμενο $r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)$ ορίζεται ίσο με 1, όταν $k = 0$.

Μια σημαντική ταυτότητα των διωνυμικών συντελεστών είναι η ακόλουθη:

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}, \qquad k \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}. \tag{11.1}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\binom{r}{k} &= \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{(-r)(1-r)(2-r)\cdots(k-r-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(k-r-1)(k-r-1-1)\cdots((k-r-1)-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}.\end{aligned}$$

Για παράδειγμα, εφαρμόζοντας την (11.1), για $r = -1$, έχουμε

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k \binom{k-(-1)-1}{k} = (-1)^k \binom{k}{k} = (-1)^k.$$

Βάσει του παραπάνω αποτελέσματος, προκύπτει ο τύπος της γεωμετρικής σειράς ως μια ειδική περίπτωση της διωνυμικής σειράς:

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Σε ορισμένες περιπτώσεις, όπου ο r δεν είναι ακέραιος, ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{r}{k}$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει απλούστερων διωνυμικών συντελεστών. Για παράδειγμα,

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k} \qquad \text{και} \qquad \binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k}.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{2}}{k} &= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2k-1}{2})}{k!} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{(1)(3)\cdots(2k-1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k (2k)!}{2^k k! 2 \cdot 4 \cdots (2k)} = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^k k! 2^k k!} = \frac{(-1)^k (2k)!}{4^k k! k!} = \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{k} &= \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})\cdots(-\frac{2k-3}{2})}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^k} \frac{(1)(1)\cdots(2k-3)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^k k! 2 \cdot 4 \cdots (2k)(2k-1)} = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^k k! 2^k k! (2k-1)} = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{4^k k! k! (2k-1)} = \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k}\end{aligned}$$

Ασκήσεις

Άσκηση. *Να αναπτυχθούν σε σειρές MacLaurin οι συναρτήσεις*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}, \quad x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \qquad g(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad x \in (-1,1)\,.$$

Λύση. Βάσει των προηγούμενων σχέσεων

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k} \qquad \text{και} \qquad \binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\binom{2k}{k},$$

καθώς και του τύπου της διωνυμικής σειράς, έχουμε ότι

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-4x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}x^k$$

και

$$g(x) = \sqrt{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\binom{2k}{k}x^{2k}.$$

□

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 85). *Να αποδειχθεί ο τύπος*

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Λύση. Αρχικά θα αποδειχθεί με επαγωγή ότι

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2}), \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Για $n = 1$ ισχύει, αφού

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x = (\cos x)'.$$

Αν ισχύει για $n \geq 1$, τότε

$$\begin{aligned}\cos(x + (n+1)\frac{\pi}{2}) &= \cos(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) \cos\frac{\pi}{2} - \sin(x + n\frac{\pi}{2}) \sin\frac{\pi}{2} \\ &= -\sin(x + n\frac{\pi}{2}) = (\cos(x + n\frac{\pi}{2}))' = (\cos^{(n)} x)' = \cos^{(n+1)} x.\end{aligned}$$

Επομένως, το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor για τη συνάρτηση $f(t) = \cos t$ στο διάστημα $[-a, a]$, για $a > 0$ και για $x_0 = 0$, προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [-a, a]$ και $\nu \in [n+1]$ υπάρχει ξ μεταξύ των 0 και x τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^\nu (x-\xi)^{n-\nu+1}}{\nu n!} f^{(n+1)}(\xi) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\pi/2)}{k!} x^k + \frac{x^\nu (x-\xi)^{n-\nu+1}}{\nu n!} \cos(\xi + (n+1)\pi/2)\end{aligned}$$

Θέτοντας $\nu = n + 1$, έχουμε ότι $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos(\xi + (n+1)\pi/2)$, οπότε $|R_n(x)| \leq \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Με το κριτήριο της μηδενικής ακολουθίας, προκύπτει άμεσα ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Επιπλέον, για $k, n \in \mathbb{N}$, είναι

$$\cos(k\pi/2) = \begin{cases} 0, & k = 2n-1 \\ \cos(n\pi), & k = 2n \end{cases} = \begin{cases} 0, & k = 2n-1 \\ (-1)^n, & k = 2n \end{cases}$$

Κατόπιν τούτων, έχουμε ότι

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi/2)}{k!} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 65). *Να αναπτυχθούν σε σειρές οι συναρτήσεις*

$$f(x) = \sin^3 x/\mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{1}{(4-x^2)^2}/(-2,2), \qquad h(x) = \ln\frac{2+x}{1-x}/(-1,1).$$

Λύση. Θα εκφράσουμε το $\sin^3 x$ συναρτήσει του $\sin(3x)$. Είναι

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(x+2x) = \sin x\cos(2x) + \cos x\sin(2x) = \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos x(2\sin x\cos x)\\ &= \sin x(1-2\sin^2 x) + 2\cos^2 x\sin x = (1-2\sin^2 x)\sin x + 2(1-\sin^2 x)\sin x\\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x,\end{aligned}$$

επομένως $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin(3x)$.

Χρησιμοποιώντας τον γνωστό τύπο της σειράς του ημιτόνου

$$\sin y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}y^{2n+1}, \qquad y\in\mathbb{R},$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x) = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(3x)^{2n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{3}{4}-\frac{3^{2n+1}}{4}\right)x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n(1-9^n)}{4(2n+1)!}x^{2n+1}\end{aligned}$$

Για τη συνάρτηση g, έχουμε ότι

$$g(x) = (4-x^2)^{-2} = 4^{-2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{-2}.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο της διωνυμικής σειράς για $y = -x^2/4 \in (-1,1)$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{1}{16}(1+y)^{-2} = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}y^n = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+1}{n}\frac{(-x^2)^n}{4^n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4^{n+2}}x^{2n}, \qquad x\in(-2,2).\end{aligned}$$

(Απάντηση.)

Για την συνάρτηση h θα χρησιμοποιηθεί ο τύπος της λογαριθμικής σειράς

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}y^n, \qquad y\in(-1,1].$$

$$\begin{aligned}h(x) &= \ln(2+x) - \ln(1-x) = \ln 2 + \ln(1+x/2) - \ln(1-x)\\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x/2)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(-x)^n = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)x^n.\end{aligned}$$

□

Άσκηση (ΣΕΠ. 2020). *Να ευρεθούν οι συντελεστές της σειράς Taylor της συνάρτησης* $f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$, *γύρω από το σημείο* $x_0 = 1$.

Λύση. Θα χρησιμοποιηθεί ο τύπος της γεωμετρικής σειράς

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad x \in (-1, 1).$$

Θέτουμε $y = x - x_0 = x - 1$, οπότε

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{2-x} = \frac{(y+1)+1}{2-(y+1)} = \frac{y+2}{1-y} = \frac{y-1+3}{1-y} \\ &= -1 + \frac{3}{1-y} = -1 + 3\sum_{n=0}^{\infty} y^n = -1 + 3 + 3\sum_{n=1}^{\infty} y^n = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 3(x-1)^n. \end{aligned}$$

Άρα, ο συντελεστής της σειράς είναι ο

$$a_n = \begin{cases} 3, & n > 0, \\ 2, & n = 0. \end{cases}$$

□

Άσκηση (βλ. Λυμένη άσκηση 66). *Να ευρεθεί η σειρά Taylor των συναρτήσεων*

i) $f(x) = \cos x$, *γύρω από το σημείο* $x_0 = \pi$.

ii) $g(x) = \ln(4 - x)$, *γύρω από το σημείο* $x_0 = 2$.

iii) $h(x) = \dfrac{x-1}{(3x-5)^2}$, *γύρω από το σημείο* $x_0 = 1$.

Λύση. *i*) Θέτοντας $y = x - \pi$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x = \cos(y+\pi) = \cos y \cos\pi - \sin y \sin\pi = -\cos y \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} (x-\pi)^{2n} \end{aligned}$$

ii) Θέτοντας $y = x - 2$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(4-x) = \ln(4-(y+2)) = \ln(2-y) = \ln(2(1-y/2)) = \ln 2 + \ln(1-y/2) \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-y/2)^n = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} y^n = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(x-2)^n \end{aligned}$$

όταν $-y/2 \in (-1,1)$, ή ισοδύναμα $x \in (0,4)$.

iii) Θέτοντας $y = x - 1$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x-1}{(3x-5)^2} = \frac{y}{(3(y+1)-5)^2} = \frac{y}{(3y-2)^2} = \frac{y}{4(1-3y/2)^2} = \frac{y}{4}(1-3y/2)^{-2} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-3/2)^n y^{n+1} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2-1}{n} (-1)^n (-3/2)^n y^{n+1} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)3^n}{2^n} y^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)3^n}{2^{n+2}} (x-1)^{n+1} \end{aligned}$$

όταν $-3y/2 \in (-1,1)$, ή ισοδύναμα $x \in (1/3, 5/3)$. □

Άσκηση (βλ. Άλυτη άσκηση 88). *Να ευρεθεί με τη βοήθεια ενός πολυωνύμου Taylor μια κατά προσέγγιση τιμή του αριθμού* $\cos 1$ *με ακρίβεια* 10^{-4}.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \cos x$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Taylor για $x = 1$ και $x_0 = 0$. Αναπτύσσοντας την $f(x)$ γύρω από το 0, έχουμε ότι

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos(\xi + (n+1)\pi/2) = p_n(x) + R_n(x)$$

όπου

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} (x)^n, \qquad R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos(\xi + (n+1)\pi/2)$$

Για $x = 1$, έχουμε

$$|R_n(1)| = \frac{|\cos(\xi + (n+1)\pi/2)|}{(n+1)!} \le \frac{1}{(n+1)!}.$$

Επειδή

$$\frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{10000} \Leftrightarrow (n+1)! \ge 10^4 \Leftrightarrow n \ge 7,$$

προκύπτει ότι, για $n \ge 7$, είναι $|\cos 1 - p_7(1)| = |R_7(1)| \le 10^{-4}$, δηλαδή η προσέγγιση

$$\cos 1 \approx p_7(1) = \sum_{k=0}^{7} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}$$

έχει την απαιτούμενη ακρίβεια. □

Σύμφωνα με τον παρακάτω κώδικα, είναι

$$\cos(1) \approx 0.5403023058681397174, \qquad p_7(1) \approx 0.540277777777778$$

```python
from sympy import Symbol, cos, series
x = Symbol('x')
N = 7
point = 1
f = series(cos(x), x, x0 = 0, n = N)
poly = f.removeO() #remove O() term
val = poly.subs(x,point) #evaluate at x = point
val2 = cos(point).evalf(22)
print("cos(x) =", f, "(Maclaurin series)")
print("p(x) = ", poly, "(Taylor polynomial of degree %d)"%N)
print("p(%d) = %0.22f"%(point, val), "(Approximation of cos(%d))"%point)
print("cos(%d) ="%1, val2, "(Higher order approximation)")
print("Error =", val2-val)
```

Ouput:

```
cos(x) = 1 - x**2/2 + x**4/24 - x**6/720 + O(x**7) (MacLaurin series)
p(x) =  -x**6/720 + x**4/24 - x**2/2 + 1 (Taylor polynomial of degree 7)
p(1) = 0.5402777777777777457047 (Approximation of cos(1))
cos(1) = 0.5403023058681397174009 (Higher order approximation)
Error = 0.00002452809036193962314881
```

12 Αόριστο Ολοκλήρωμα

Ορισμός: Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων $F(x)+c$, όπου $c \in \mathbb{R}$ και $F'(x) = f(x)$. δηλαδή είναι

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Η συνάρτηση F ονομάζεται παράγουσα της f.

Από τον ορισμό προκύπτουν οι ιδιότητες:

- $\int f'(x)dx = f(x) + c$
- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
- $\int (kf(x) + \lambda g(x))dx = k\int f(x)dx + \lambda \int g(x)dx$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

Στις επόμενες περιπτώσεις εφαρμόζεται ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

1. $\int e^{ax+b}p(x)dx$, όπου $p(x)$ πολυώνυμο. Θέτουμε $e^{ax+b} = (\frac{1}{a}e^{ax+b})'$.

   Εφαρμογές: $\int x^2e^xdx$, $\int (x^2 + 6x - 1)e^xdx$.

2. $\int \sin(ax + b)p(x)dx$ και $\int \cos(ax + b)p(x)dx$, όπου $p(x)$ πολυώνυμο. Θέτουμε αντίστοιχα $\sin(ax + b) = (\frac{-1}{a}\cos(ax + b))'$ και $\cos(ax + b) = (\frac{1}{a}\sin(ax + b))'$.

   Εφαρμογές: $\int x\sin(3x - 1)dx$, $\int x^2\cos(-2x + 3)dx$, $\int (2x^2 - 3x + 5)\cos 4xdx$.

3. $\int e^{ax+b}\sin(cx + d)dx$ και $\int e^{ax+b}\cos(cx + d)dx$. Θέτουμε $e^{ax+b} = (\frac{1}{a}e^{ax+b})'$ και εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση 2 φορές.

   Εφαρμογές: $\int e^{2x}\sin xdx$, $\int e^x\cos 3xdx$, $\int xe^x\cos 3xdx$.

4. $\int f(x)\ln(g(x))dx$, $\int f(x)\arctan(g(x))dx$ και $\int f(x)\arcsin(g(x))dx$, όπου $f(x)$ ρητή συνάρτηση. Βρίσκουμε μια $F(x)$ ώστε $F'(x) = f(x)$.

   Εφαρμογές: $\int (3x^2 + 4x + 1)\ln(\frac{x^2+1}{x})dx$, $\int (4x^3 + x)\arctan(x^2 - 1)dx$, $\int \arcsin xdx$.

5. Αναγωγικοί τύποι, δηλαδή ολοκληρώματα της μορφής $I_n = \int A(x, n)dx$.

   Εφαρμογές: $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$, $\int \sin^n xdx$, $\int \cos^n xdx$, $\int x^ne^{-x}dx$.

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy$

Θέτουμε $y = g(x)$, οπότε[2] $dy = g'(x)dx$ και αντικαθιστώντας στο πρώτο μέλος παίρνουμε το δεύτερο.

Στις επόμενες περιπτώσεις εφαρμόζεται ολοκλήρωση με αντικατάσταση:

1. $\int A(\cos x, \sin x)$. Διακρίνουμε 4 περιπτώσεις:

   - Αν η A είναι περιττή ως προς $\cos x$ (δηλαδή είναι $A(-\cos x, \sin x) = -A(\cos x, \sin x)$), τότε θέτουμε $y = \sin x$.
   - Αν η A είναι περιττή ως προς $\sin x$ (δηλαδή είναι $A(\cos x, -\sin x) = -A(\cos x, \sin x)$), τότε θέτουμε $y = \cos x$.
   - Αν η A είναι άρτια ως προς $\sin x$ και $\cos x$ (δηλαδή είναι $A(-\cos x, -\sin x) = A(\cos x, \sin x)$), τότε θέτουμε $y = \tan x$. Από τον τριγωνομετρικό τύπο $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ έχουμε ότι $dx = \frac{dy}{1+y^2}$.
   - Αν δεν ισχύει τίποτα από τα προηγούμενα, τότε θέτουμε $y = \tan\frac{x}{2}$. Ομοίως βρίσκουμε ότι $dx = \frac{2dy}{1+y^2}$. Επίσης, κατά την αντικατάσταση χρησιμοποιούνται και οι τύποι $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ και $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$.

   Εφαρμογές: $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$, $\int \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$, $\int \frac{1}{5+3\cos x}dx$.

2. $\int A(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$. Θέτουμε $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Αν το κλάσμα $\frac{ax+b}{cx+d}$ εμφανίζεται σε περισσότερα από ένα ριζικά, τότε θέτουμε $y = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, όπου k το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δεικτών των ριζικών.

   Εφαρμογές: $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$, $\int \frac{x+\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2}}dx$.

3. $\int A(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Αν η A είναι ρητή συνάρτηση διακρίνουμε περιπτώσεις:

   - Αν $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, τότε θέτουμε $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\rho)y$, όπου ρ είναι μια ρίζα του τριωνύμου.
   - Αν $\Delta < 0$, τότε θέτουμε $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(x-y)$. Ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί γενικά όταν $a > 0$.

   Εφαρμογές: $\int \frac{x-3}{\sqrt{-x^2-2x+3}}dx$, $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx$, $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+2x-1}}dx$.

4. $\int A(x, \sqrt{a^2-b^2x^2})dx$. Θέτουμε $bx = a\sin y$

5. $\int A(x, \sqrt{b^2x^2-a^2})dx$. Θέτουμε $bx = a\cosh y$ (επειδή $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$). Μπορεί επίσης να τεθεί $bx = \frac{a}{\cos^2 y}$ (επειδή $\tan^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}$).

6. $\int A(x, \sqrt{b^2x^2+a^2})dx$. Θέτουμε $bx = a\sinh y$. Μπορεί επίσης να τεθεί $bx = a\tan y$.

7. $\int x^k(ax^\lambda + b)^\mu dx$. Αν μ ακέραιος, τότε θέτουμε $x = y^\rho$, όπου ρ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των k, λ. Διαφορετικά, θέτουμε $ax^\lambda + \beta = y^\delta$, ή $ax^\lambda + \beta = y^\delta x^\lambda$, όπου δ είναι ο παρονομαστής του μ σε ανάγωγη μορφή.

[2] Γενικά, για τον μετασχηματισμό $f(y) = g(x)$, η σχέση μεταξύ dy και dx προκύπτει παραγωγίζοντας ως προς x, οπότε είναι $f(y) = g(x) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \Rightarrow \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dx} \Rightarrow f'(y)dy = g'(x)dx$.

Η εξίσωση $ax^2+bx+c=0$

Για την επίλυση της εξίσωσης $ax^2+bx+c=0$, με $a\neq 0$, αρχικά δημιουργούμε ένα τέλειο τετράγωνο (το άθροισμα των τετραγώνων δύο ποσοτήτων και του διπλάσιου γινομένου τους):

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right),
\end{aligned} \tag{12.1}$$

όπου η παράσταση $\Delta=b^2-4ac$ ονομάζεται διακρίνουσα της εξίσωσης. Στο σημείο αυτό διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\Delta=0$, τότε $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, οπότε η εξίσωση έχει μία (διπλή) ρίζα, την $\rho=-\frac{b}{2a}$.
- Αν $\Delta<0$, τότε $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$, οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες και επιπλέον η παράσταση ax^2+bx+c είναι ομόσημη του a, για κάθε x.
- Αν $\Delta>0$, τότε

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\\
&= a(x-\rho_1)(x-\rho_2),
\end{aligned} \tag{12.2}$$

όπου $\rho_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ και $\rho_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης.

Επιπλέον, εύκολα επαληθεύεται με πράξεις ότι

$$\rho_1+\rho_2=-\frac{b}{a},\qquad \rho_1\rho_2=\frac{c}{a}. \tag{12.3}$$

Η μορφή $\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$, με $b^2-4ac<0$

Έστω $p(x)=ax^2+bx+c$, με $a\neq 0$ και $\Delta=b^2-4ac<0$. Ως γνωστό, όταν η διακρίνουσα Δ είναι αρνητική, τότε το $p(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και επιπλέον είναι ομόσημο του a, για κάθε x.

Η επίλυση του ολοκληρώματος

$$I=\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

γίνεται με τη βοήθεια της συνάρτησης arctg, για την οποία ως γνωστό ισχύει

$$\frac{d(\operatorname{arctg} y)}{dy}=\frac{1}{1+y^2},\qquad \text{ή, ισοδύναμα,}\qquad c+\operatorname{arctg} y=\int\frac{1}{1+y^2}dy,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Προσπαθούμε λοιπόν να μετατρέψουμε το $ax^2 + bx + c$ στη μορφή $y^2 + 1$, για κάποιο y το οποίο είναι συνάρτηση του x. Η διαδικασία μετατροπής έχει ως εξής: αρχικά δημιουργούμε ένα τέλειο τετράγωνο (το άθροισμα των τετραγώνων δύο ποσοτήτων και του διπλάσιου γινομένου τους) και στη συνέχεια βγάζουμε κοινό παράγοντα τον σταθερό όρο. Από τη σχέση (12.1), έχουμε

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k^2\right).$$

Επειδή $\Delta < 0$, για απλότητα στις πράξεις, τέθηκε $k = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}$. Θέτοντας

$$ky = x + \frac{b}{2a}, \qquad \text{οπότε} \qquad kdy = dx,$$

έχουμε ότι $ax^2 + bx + c = a(k^2y^2 + k^2) = ak^2(y^2 + 1)$, επομένως

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{1}{ak^2(y^2 + 1)} kdy = \frac{1}{ak} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \frac{1}{ak}(c + \operatorname{arctg} y) \\ &= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left(c + \operatorname{arctg}\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}\right)\right) \end{aligned}$$

Η μορφή $\int \frac{kx+\lambda}{ax^2+bx+c} dx$, με $b^2 - 4ac < 0$

Έστω $p(x) = ax^2 + bx + c$, με $a \neq 0$ και $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Για την επίλυση του ολοκληρώματος

$$I = \int \frac{kx + \lambda}{ax^2 + bx + c} dx,$$

αρχικά προσπαθούμε να εμφανίσουμε την παράγωγο $p'(x) = 2ax + b$ του παρονομαστή στον αριθμητή ως εξής:

$$kx + \lambda = \frac{k}{2a}(2ax + b) - \frac{k}{2a}b + \lambda,$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{kx + \lambda}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{k}{2a}(2ax + b) - \frac{k}{2a}b + \lambda}{ax^2 + bx + c} dx \\ &= \frac{k}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(\lambda - \frac{k}{2a}b\right) \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \\ &= \frac{k}{2a} \int \frac{p'(x)}{p(x)} dx + \left(\lambda - \frac{k}{2a}b\right) \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \\ &= \frac{k}{2a} \ln|p(x)| + \left(\lambda - \frac{k}{2a}b\right) \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx. \end{aligned}$$

Τέλος, λύνουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα, σύμφωνα με τη μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου.

Άσκηση. *Να λυθεί το αόριστο ολοκλήρωμα* $I = \int \frac{3-5x}{6x^2-2x+4}dx.$

Λύση. Είναι $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 6\cdot 4 < 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3-5x}{6x^2-2x+4}dx = \int \frac{\frac{-5}{12}(12x-2) - 2\frac{5}{12} + 3}{6x^2-2x+4}dx \\ &= \frac{-5}{12}\ln|6x^2-2x+4| + \frac{13}{6}\int \frac{1}{6x^2-2x+4}dx \\ &= \frac{-5}{12}\ln(6x^2-2x+4) + \frac{13}{36}\int \frac{1}{x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}dx \end{aligned}$$

Για την επίλυση του τελευταίου ολοκληρώματος, έχουμε

$$x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = x^2 - 2\frac{1}{6}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{2}{3} = \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{36},$$

άρα, θέτοντας

$$\frac{\sqrt{23}}{6}y = x - \frac{1}{6}, \qquad \text{οπότε} \quad \frac{\sqrt{23}}{6}dy = dx,$$

έχουμε

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}dx = \int \frac{1}{(x-\frac{1}{6})^2+\frac{23}{36}}dx = \int \frac{1}{\frac{23}{36}y^2+\frac{23}{36}}\frac{\sqrt{23}}{6}dy = \frac{6}{\sqrt{23}}\int \frac{1}{y^2+1}dy \\ &= \frac{6}{\sqrt{23}}(c_1 + \operatorname{arctg} y) = c_2 + \frac{6}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6}{\sqrt{23}}\left(x-\frac{1}{6}\right)\right) = c_2 + \frac{6}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6x-1}{\sqrt{23}}\right) \end{aligned}$$

οπότε τελικά

$$\begin{aligned} I &= \frac{-5}{12}\ln(6x^2-2x+4) + \frac{13}{36}\left(c_2 + \frac{6}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6x-1}{\sqrt{23}}\right)\right) \\ &= c - \frac{5}{12}\ln(6x^2-2x+4) + \frac{13}{6\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6x-1}{\sqrt{23}}\right) \end{aligned}$$

□

Η μορφή $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx$, με $b^2-4ac<0$

Έστω $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx$, με $\Delta = b^2-4ac<0$. Η επίλυση του ολοκληρώματος αυτού ανάγεται, με τη διαδικασία που περιγράφτηκε στα προηγούμενα, στην επίλυση του ολοκληρώματος $J_n = \displaystyle\int \frac{1}{(y^2+1)^n}dx$. Πράγματι, για $k = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}$, θέτοντας

$$ky = x + \frac{b}{2a}, \qquad \text{οπότε} \qquad kdy = dx,$$

έχουμε ότι $ax^2+bx+c = ak^2(y^2+1)$, επομένως

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \int \frac{kdy}{(ak^2(y^2+1))^n} = \frac{1}{a^n k^{2n-1}}\int \frac{dy}{(y^2+1)^n} = \frac{2^{2n-1}a^{n-1}}{(-\Delta)^{n-\frac{1}{2}}}\int \frac{1}{(y^2+1)^n}dy$$

Για την επίλυση του J_n, δημιουργούμε έναν αναγωγικό τύπο (ως προς n), χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση (βλ. λυμένη άσκηση 16 Κεφ. 6):

$$\begin{aligned}
J_n &= \int \frac{1}{(y^2+1)^n}dy = \int \frac{y^2+1-y^2}{(y^2+1)^n}dy = \int \frac{1}{(y^2+1)^{n-1}}dy - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^n}dy \\
&\overset{n>1}{=} J_{n-1} - \int y\left(\frac{(y^2+1)^{1-n}}{2(1-n)}\right)' dy = J_{n-1} + \frac{y}{2(n-1)(y^2+1)^{n-1}} - \int \frac{(y^2+1)^{1-n}}{2(n-1)}dy \\
&= J_{n-1} + \frac{y}{2(n-1)(y^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2}J_{n-1} = \frac{y}{2(n-1)(y^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1}.
\end{aligned}$$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει για $n>1$, ενώ, για $n=1$, προφανώς είναι $J_1 = \operatorname{arctg} y + c$.

Παράδειγμα. Για το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$, έχουμε

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

άρα, θέτοντας $\frac{\sqrt{3}}{2}y = x + \frac{1}{2}$, προκύπτει ότι

$$I = \int \frac{1}{\left(\frac{3}{4}(y^2+1)\right)^2}\frac{\sqrt{3}}{2}dy = \frac{8}{3\sqrt{3}}\int \frac{1}{(y^2+1)^2}dy$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int \frac{1}{(y^2+1)^2}dy = \int \frac{y^2+1-y^2}{(y^2+1)^2}dy = \int \frac{1}{y^2+1}dy - \frac{1}{2}\int y\frac{2y}{(y^2+1)^2}dy \\
&= \operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\int y\left(\frac{1}{y^2+1}\right)' dy = \operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\frac{y}{y^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+1}dy \\
&= \operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\frac{y}{y^2+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y + c_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\frac{y}{y^2+1} + c_1
\end{aligned}$$

επομένως, και δεδομένου ότι $y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x + \frac{1}{2}) = \frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ και $y^2 + 1 = \frac{4}{3}(x^2 + x + 1)$, είναι

$$\begin{aligned}
I &= \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg} y + \frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{y}{y^2+1} + c = \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}(x^2+x+1)} + c \\
&= \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + c
\end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι, για την επίλυση του J_2, δεν χρησιμοποιήθηκε ο αναγωγικός τύπος για το J_n, για να τονιστεί ότι δεν έχει τόσο σημασία η απομνημόνευση αυτού του τύπου, όσο η τεχνική της παραγοντικής ολοκλήρωσης, με την οποία προκύπτει.

Η μορφή $\int R(\cos x, \sin x)dx$

Για την επίλυση ολοκληρωμάτων της μορφής $\int R(\cos x, \sin x)dx$, όπου $R(x, y)$ είναι μια ρητή συνάρτηση (δηλαδή είναι πηλίκο δύο πολυωνύμων), ως προς τις μεταβλητές x, y, απαιτείται η γνώση ορισμένων τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.

Συνίσταται η απομνημόνευση των στοιχειωδών τύπων

$$i)\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad ii)\cos(-x) = \cos x, \qquad iii)\sin(-x) = -\sin x$$

καθώς και των

$$iv)\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \qquad v)\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Με τη βοήθεια αυτών, μπορούν να προκύψουν εύκολα οι υπόλοιπες τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Για παράδειγμα, θέτοντας $x = y$ στους δύο τελευταίους, λαμβάνουμε αντίστοιχα

$$vi)\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad vii)\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

Η *vi*) επεκτείνεται, βάσει της *i*) στην

$$vi)\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

Επίσης, διαιρώντας την *i*) με $\cos^2 x$, προκύπτει η πολύ βασική ταυτότητα

$$viii)1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Αντικαθιστώντας στην *vi*), προκύπτει ότι

$$\cos(2x) = \frac{2}{1 + \mathrm{tg}^2 x} - 1 = \frac{2 - (1 + \mathrm{tg}^2 x)}{1 + \mathrm{tg}^2 x} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$$

Επίσης, από τις *vii*) και *viii*), έχουμε

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x = 2\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x = \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$$

Συνοψίζοντας, έχουμε

$$\cos(2x) = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}, \qquad \sin(2x) = \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1 + \mathrm{tg}^2 x},$$

Οι δύο παραπάνω τύποι χρησιμοποιούνται κατά την αντικατάσταση $y = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$.

Τέλος, από την *viii*), προκύπτει

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x}, \qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x} = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$$

Οι δύο παραπάνω τύποι χρησιμοποιούνται κατά την αντικατάσταση $y = \mathrm{tg}\, x$.

Γενικά, τα ολοκληρώματα της μορφής $\int R(\cos x, \sin x)dx$ λύνονται (ανάγονται σε ρητή μορφή ως προς y) με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \qquad \sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+y^2}dy$$

Οι επόμενες τρεις περιπτώσεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες αντικαταστάσεις, οι οποίες οδηγούν συνήθως σε απλούστερες πράξεις:

- Αν $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (δηλαδή, η R είναι περιττή ως προς το $\sin x$), τότε τίθεται $y = \cos x$.
- Αν $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (δηλαδή, η R είναι περιττή ως προς το $\cos x$), τότε τίθεται $y = \sin x$.
- Αν $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ (δηλαδή, η R είναι άρτια ως προς τα $\sin x$ και $\cos x$), τότε τίθεται $y = \operatorname{tg} x$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}, \qquad \sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}, \qquad dx = \frac{1}{1+y^2}dy$$

Συνοψίζοντας, για την επίλυση ολοκληρωμάτων με τριγωνομετρικές συναρτήσεις, αρκεί η απομνημόνευση των τύπων

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \qquad \sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \qquad \text{για την αντικατάσταση } y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

και

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \qquad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \qquad \text{για την αντικατάσταση } y = \operatorname{tg} x.$$

Σημειώνεται ότι οι δύο τελευταίοι τύποι προκύπτουν άμεσα από την $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Η σχέση μεταξύ των dx, dy μπορεί να προκύψει εύκολα με τη βοήθεια της συνάρτησης arctg. Για παράδειγμα είναι $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Rightarrow \operatorname{arctg} y = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{2}{1+y^2}dy = dx$.

Παρατήρηση: Οι παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad t \in (-\infty, +\infty),$$

περιγράφουν το σύνολο όλων των σημείων (x, y) του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$, εκτός του $(-1, 0)$.

Αντίστοιχα, οι παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad y(t) = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad t \in (-1, 1),$$

περιγράφουν το σύνολο όλων των σημείων (x, y), με $x > 0$, της υπερβολής με εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$.

Άσκηση. *Να λυθούν τα ολοκληρώματα*

$$\int \frac{1}{1+\cos x+\sin x}dx, \qquad \int \frac{1}{\cos x}dx, \qquad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx.$$

Λύση. Για το πρώτο ολοκλήρωμα, θέτουμε $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, οπότε είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\cos x+\sin x}dx &= \int \frac{1}{1+\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{2y}{1+y^2}}\frac{2}{1+y^2}dy = \int \frac{2}{1+y^2+1-y^2+2y}dy\\ &= \int \frac{1}{1+y}dy = \ln|1+y|+c = \ln|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+c\end{aligned}$$

Για το δεύτερο, θέτουμε $y = \sin x$ (διότι η παράσταση είναι περιττή ως προς το $\cos x$), οπότε είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\cos x dx = \int \frac{1}{1-y^2}dy = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}\right)dy\\ &= \frac{1}{2}(\ln|1+y|-\ln|1-y|)+c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|+c = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+y)^2}{|1-y^2|}+c\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin x^2}+c = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}+c = \ln\frac{1+\sin x}{|\cos x|}+c\end{aligned}$$

Για το τρίτο ολοκλήρωμα, η παράσταση είναι και περιττή ως προς το $\sin x$, και περιττή ως προς το $\cos x$, και άρτια ως προς τα $\cos x, \sin x$, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε από τις διαθέσιμες αντικαταστάσεις. Αν επιλέξουμε την αντικατάσταση $y = \operatorname{tg} x$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx &= \int \frac{y^3}{1+y^2}dy = \int \frac{y^3+y-y}{1+y^2}dy = \int \frac{y^3+y}{1+y^2}dy - \int \frac{y}{1+y^2}dy\\ &= \int y dy - \frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}dy\\ &= \frac{y^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+c = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)+c\\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\cos^2 x}+c = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+c\end{aligned}$$

□

Η μορφή $\int R(\cosh x, \sinh x)dx$

Για την επίλυση ολοκληρωμάτων της μορφής $\int R(\cosh x, \sinh x)dx$, όπου $R(x, y)$ είναι μια ρητή συνάρτηση, ως προς τις μεταβλητές x, y, χρησιμοποιούνται ταυτότητες με υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις, ανάλογες με αυτές της προηγούμενης ενότητας. Οι ταυτότητες αυτές μπορούν να προκύψουν άμεσα με τη βοήθεια του κανόνα του Osborn (βλ. Κεφ. 1, σελ. 52). Έτσι, έχουμε την ταυτότητα $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, από την οποία προκύπτει η

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}, \tag{12.4}$$

καθώς επίσης και τις

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x, \qquad \sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x.$$

Από την πρώτη και την (12.4), προκύπτει ότι

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = \frac{\cosh^2 x + \sinh^2 x}{\cosh^2 x}\cosh^2 x = (1 + \operatorname{tgh}^2 x)\cosh^2 x = \frac{1 + \operatorname{tgh}^2 x}{1 - \operatorname{tgh}^2 x},$$

ενώ από τη δεύτερη και την (12.4), προκύπτει ότι

$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x = \frac{2\sinh x \cosh x}{\cosh^2 x}\cosh^2 x = (2\operatorname{tgh} x)\cosh^2 x = \frac{2\operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh}^2 x},$$

Οι δύο παραπάνω τύποι χρησιμοποιούνται κατά την αντικατάσταση $y = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$.

Τέλος, από την (12.4), προκύπτουν οι τύποι

$$\cosh^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \qquad \sinh^2 x = \cosh^2 x - 1 = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - 1 = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

οι οποίοι χρησιμοποιούνται κατά την αντικατάσταση $y = \operatorname{tgh} x$.

Γενικά, τα ολοκληρώματα της μορφής $\int R(\cosh x, \sinh x)dx$ λύνονται (ανάγονται σε ρητή μορφή ως προς y) με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cosh x = \frac{1 + y^2}{1 - y^2}, \qquad \sinh x = \frac{2y}{1 - y^2}, \qquad dx = \frac{2}{1 - y^2}dy$$

Ο τελευταίος τύπος προκύπτει άμεσα, είτε παραγωγίζοντας τη σχέση $x = 2\operatorname{arctgh} y$, είτε με τη βοήθεια της (12.4).

Οι επόμενες τρεις περιπτώσεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες αντικαταστάσεις, οι οποίες οδηγούν συνήθως σε απλούστερες πράξεις:

- Αν $R(\cosh x, -\sinh x) = -R(\cosh x, \sinh x)$ (δηλαδή, η R είναι περιττή ως προς το $\sinh x$), τότε τίθεται $y = \cosh x$.
- Αν $R(-\cosh x, \sinh x) = -R(\cosh x, \sinh x)$ (δηλαδή, η R είναι περιττή ως προς το $\cosh x$), τότε τίθεται $y = \sinh x$.
- Αν $R(-\cosh x, -\sinh x) = R(\cosh x, \sinh x)$ (δηλαδή, η R είναι άρτια ως προς τα $\sinh x$ και $\cosh x$), τότε τίθεται $y = \operatorname{tgh} x$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cosh^2 x = \frac{1}{1 - y^2}, \qquad \sinh^2 x = \frac{y^2}{1 - y^2}, \qquad dx = \frac{1}{1 - y^2}dy.$$

Οι μορφές $\int \sqrt{b^2 - a^2x^2}dx$, $\int \sqrt{a^2x^2 + b^2}dx$, $\int \sqrt{a^2x^2 - b^2}dx$

Για τους επόμενους μετασχηματισμούς, προαπαιτείται η γνώση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad \sin(2x) = 2\sin x \cos x,$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$

καθώς και των αντίστοιχων υπερβολικών ταυτοτήτων

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad \sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x,$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x.$$

1η μορφή. Να λυθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sqrt{b^2 - a^2x^2}dx$, όπου $a, b > 0$.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα έχει νόημα όταν

$$b^2 - a^2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2x^2}{b^2} \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{ax}{b}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{ax}{b} \leq 1.$$

Στην περίπτωση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

Θέτουμε $ax = b\sin t$ (οπότε $adx = b\cos tdt$), ώστε να είναι

$$\sqrt{b^2 - a^2x^2} = \sqrt{b^2 - b^2\sin^2 t} = b\sqrt{1 - \sin^2 t} = b\sqrt{\cos^2 t} = b|\cos t|.$$

Επιπλέον, θεωρούμε $t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε είναι $\cos t \geq 0$ και

$$-1 \leq \sin t \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{ax}{b} \leq 1.$$

Μάλιστα, επειδή ο περιορισμός της $\sin t$ στο συγκεκριμένο διάστημα είναι ένα προς ένα και επί, έπεται ότι κάθε δυνατή τιμή του x προκύπτει από ακριβώς μία τιμή του t.

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{b^2 - a^2x^2}dx = \int b|\cos t|\frac{b}{a}\cos tdt = \int \frac{b^2}{a}\cos^2 tdt = \int \frac{b^2}{2a}(1 + \cos(2t))dt \\ &= \int \left(\frac{b^2}{2a}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right)\right)' dt = \frac{b^2}{2a}t + \frac{b^2}{4a}\sin(2t) + c = \frac{b^2}{2a}t + \frac{b^2}{2a}\sin t\cos t + c \end{aligned}$$

Τελικά, εκφράζοντας το I συναρτήσει του x, έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{b^2}{2a}t + \frac{b^2}{2a}\sin t\sqrt{1 - \sin^2 t} + c = \frac{b^2}{2a}\arcsin\frac{ax}{b} + \frac{b^2}{2a}\frac{ax}{b}\sqrt{1 - \frac{a^2x^2}{b^2}} + c \\ &= \frac{b^2}{2a}\arcsin\frac{ax}{b} + \frac{x}{2}\sqrt{b^2 - a^2x^2} + c \end{aligned}$$

2η μορφή. Να λυθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sqrt{a^2x^2+b^2}dx$, όπου $a, b > 0$.

Στην περίπτωση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα

$$\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x,$$

θέτουμε $ax = b\sinh t$ (οπότε $adx = b\cosh t dt$), ώστε να είναι

$$\sqrt{a^2x^2+b^2} = \sqrt{b^2\sinh^2 t + b^2} = b\sqrt{\sinh^2 t + 1} = b\sqrt{\cosh^2 t} = b\cosh t.$$

Μάλιστα, επειδή η $\sinh t/\mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα και επί, έπεται ότι κάθε δυνατή τιμή του x προκύπτει από ακριβώς μία τιμή του t.

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{a^2x^2+b^2}dx = \int b\cosh t\frac{b}{a}\cosh t dt = \int \frac{b^2}{a}\cosh^2 t dt = \int \frac{b^2}{2a}(\cosh(2t)+1)dt \\ &= \int \left(\frac{b^2}{2a}\left(\frac{\sinh(2t)}{2}+t\right)\right)' dt = \frac{b^2}{4a}\sinh(2t) + \frac{b^2}{2a}t + c = \frac{b^2}{2a}\sinh t\cosh t + \frac{b^2}{2a}t + c \end{aligned}$$

Τελικά, εκφράζοντας το I συναρτήσει του x, έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{b^2}{2a}\sinh t\sqrt{\sinh^2 t+1} + \frac{b^2}{2a}t + c = \frac{b^2}{2a}\frac{ax}{b}\sqrt{\frac{a^2x^2}{b^2}+1} + \frac{b^2}{2a}\operatorname{arcsinh}\frac{ax}{b} + c \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2+b^2} + \frac{b^2}{2a}\operatorname{arcsinh}\frac{ax}{b} + c \end{aligned}$$

3η μορφή. Να λυθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sqrt{a^2x^2-b^2}dx$, όπου $a, b > 0$.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα έχει νόημα όταν

$$a^2x^2 - b^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2x^2}{b^2} \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{ax}{b}\right| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{ax}{b} \geq 1 \text{ ή } \frac{ax}{b} \leq -1.$$

Στην περίπτωση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα

$$\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x,$$

διακρίνουμε 2 περιπτώσεις: *i)* Αν $\frac{ax}{b} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{b}{a}$, τότε θέτουμε $ax = b\cosh t$, όπου $t > 0$, (οπότε $adx = b\sinh t dt$), ώστε να είναι

$$\sqrt{a^2x^2-b^2} = \sqrt{b^2\cosh^2 t - b^2} = b\sqrt{\cosh^2 t - 1} = b\sqrt{\sinh^2 t} = b|\sinh t| = b\sinh t.$$

Το απόλυτο στην τελευταία ισότητα μπορεί να παραληφθεί, διότι είναι

$$\sinh t \geq 0 \Leftrightarrow e^t - e^{-t} \geq 0 \Leftrightarrow e^t \geq e^{-t} \Leftrightarrow e^{2t} \geq 1 \Leftrightarrow t \geq 0.$$

Μάλιστα, επειδή η $\cosh t$ είναι ένα προς ένα και επί στο συγκεκριμένο διάστημα, έπεται ότι κάθε δυνατή τιμή του x προκύπτει από ακριβώς μία τιμή του t.

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{a^2x^2-b^2}dx = \int b\sinh t\frac{b}{a}\sinh t dt = \int \frac{b^2}{a}\sinh^2 t dt = \int \frac{b^2}{2a}(\cosh(2t)-1)dt \\ &= \int \left(\frac{b^2}{2a}\left(\frac{\sinh(2t)}{2}-t\right)\right)' dt = \frac{b^2}{4a}\sinh(2t) - \frac{b^2}{2a}t + c = \frac{b^2}{2a}\sinh t\cosh t - \frac{b^2}{2a}t + c \end{aligned}$$

Τελικά, εκφράζοντας το I συναρτήσει του x, έχουμε

$$I = \frac{b^2}{2a}\cosh t\sqrt{\cosh^2 t - 1} - \frac{b^2}{2a}t + c = \frac{b^2}{2a}\frac{ax}{b}\sqrt{\frac{a^2x^2}{b^2} - 1} - \frac{b^2}{2a}\operatorname{arccosh}\frac{ax}{b} + c$$
$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2 - b^2} - \frac{b^2}{2a}\operatorname{arccosh}\frac{ax}{b} + c$$

ii) Αν $\frac{ax}{b} \leq -1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$, τότε θέτουμε $ax = -b\cosh t$, όπου $t < 0$, (οπότε $adx = -b\sinh t dt$). Κατόπιν τούτων, και δεδομένου ότι $t < 0 \Rightarrow \sinh t < 0$, προκύπτει ότι

$$I = \int \sqrt{a^2x^2 - b^2}dx = \int b|\sinh t|\frac{-b}{a}\sinh t dt = \int b(-\sinh t)\frac{-b}{a}\sinh t dt = \int \frac{b^2}{a}\sinh^2 t dt$$

οπότε τελικά προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό της προηγούμενης περίπτωσης.

Παρατήρηση. Η συνάρτηση $\cosh x/[0, +\infty)$ είναι ένα προς ένα (ως γνησίως αύξουσα), επομένως αντιστρέψιμη. Η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση $\operatorname{arccosh} y/[1, +\infty)$, για την οποία ισχύει ότι

$$\operatorname{arccosh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \tag{12.5}$$

(βλ. Κεφ. 1, σελ. 53 και άλυτη άσκηση 79, Κεφ. 1).

Πράγματι, αν τεθεί $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, τότε είναι

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq \frac{x + 1 + (-x + 1)}{2} \geq 1$$

και

$$2y = e^x + e^{-x} \Rightarrow 2ye^x = e^{2x} + 1 \Rightarrow (e^x)^2 - 2y(e^x) + 1 = 0 \Rightarrow e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Η μικρότερη ρίζα απορρίπτεται, αφού είναι

$$e^x = y - \sqrt{y^2 - 1} \overset{x \geq 0}{\Rightarrow} y - \sqrt{y^2 - 1} \geq 1 \Rightarrow y - 1 \geq \sqrt{y^2 - 1} \overset{y \geq 1}{\Rightarrow} y^2 - 2y + 1 \geq y^2 - 1 \Rightarrow 2y \leq 2 \Rightarrow y \leq 1,$$

δηλαδή η σχέση $e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$ ισχύει μόνο για $y = 1$.

Άρα, $\operatorname{arccosh} y = x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

Ομοίως, για τη συνάρτηση $\operatorname{arcsinh} y/\mathbb{R}$, προκύπτει ότι $\operatorname{arcsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

Άσκηση. *Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα*

$$I_1 = \int \operatorname{arctg} x dx, \qquad I_2 = \int e^x \cos x dx$$

Λύση.

$$I_1 = \int x' \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1} dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$$

$$I_2 = \int (e^x)' \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int (e^x)' \sin x dx$$
$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - I_2 + c$$

Άρα

$$2I_2 = e^x(\cos x + \sin x) + c \Rightarrow I_2 = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + c$$

□

Άσκηση. *Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα*

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+x-2} dx, \qquad I_2 = \int \frac{1}{x^2+4x+8} dx$$

Λύση. Αφού $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, έχουμε ότι

$$I_1 = \int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx = \int \frac{A}{x-1} dx + \int \frac{B}{x+2} dx = A \ln|x-1| + B \ln|x+2| + c.$$

Τα A, B προσδιορίζονται ως εξής:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$
$$\Leftrightarrow 1 = A(x+2) + B(x-1) = (A+B)x + 2A - B = 1$$

Θέτοντας $x = 1$, βρίσκουμε $A = 1/3$. Θέτοντας $x = -2$, βρίσκουμε $B = -1/3$.

Για το I_2, έχουμε ότι

$$x^2 + 4x + 8 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4 + 4 = (x+2)^2 + 4.$$

Επομένως, θέτοντας $2y = x + 2$, έχουμε ότι

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \int \frac{2dy}{4y^2+4} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y + c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + c.$$ □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 27). *Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα*

$$I_1 = \int \frac{x^2+3x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx, \qquad I_2 = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx, \qquad I_3 = \int \sqrt{3x^2+2}dx.$$

Λύση. Για το I_1, θέτοντας $x = 3\sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{x^2+3x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{9\sin^2 t + 9\sin t + 5}{\sqrt{9-9\sin^2 t}} 3\cos t dt = \int (9\sin^2 t + 9\sin t + 5)dt \\
&= \frac{9}{2}\int (1-\cos 2t)dt + 9\int \sin t dt + 5\int dt = \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\sin 2t - 9\cos t + 5t + c \\
&= \frac{19}{2}t - \frac{9}{2}\sin t\cos t - 9\cos t + c \\
&= \frac{19}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} - 3\sqrt{9-x^2} + c
\end{aligned}$$

Για το I_2, θέτοντας $x = 2\cosh t$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{8\cosh^3 t}{\sqrt{4\cosh^2 t - 4}} 2\sinh t dt = 8\int \cosh^3 t dt = 8\int (1+\sinh^2 t) d(\sinh t) \\
&= 8\sinh t + \frac{8}{3}\sinh^3 t + c = \frac{8}{3}(3+\sinh^2 t)\sinh t + c = \frac{8}{3}(2+\cosh^2 t)\sqrt{\cosh^2 - 1} + c \\
&= \frac{1}{3}(8+4\cosh^2 t)\sqrt{4\cosh^2 - 4} + c = \frac{1}{3}(8+x^2)\sqrt{x^2-4} + c
\end{aligned}$$

Για το I_3, θέτοντας $\sqrt{3}x = \sqrt{2}\sinh t$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int \sqrt{2\sinh^2 t + 2}\sqrt{2/3}\cosh t dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int (e^t + e^{-t})^2 dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\int (e^{2t} + e^{-2t} + 2)dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} + 2t) + c = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sinh(2t) + 2t) + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sinh t\cosh t + t) + c = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t} + t) + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{3}{2}x^2} + \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right)\right) + c = \frac{x}{2}\sqrt{2+3x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right) + c
\end{aligned}$$

□

13 Διαφορικές εξισώσεις

Διαφορική εξίσωση (μίας μεταβλητής) (ΔΕ) είναι κάθε εξίσωση που περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή x, μια άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ και κάποιες παραγώγους της y.

Η μεγαλύτερη παράγωγος που εμφανίζεται σε αυτήν καθορίζει την τάξη της.

Ο μεγαλύτερος εκθέτης της μεγαλύτερης παραγώγου καθορίζει τον βαθμό της.

Λύση της εξίσωσης είναι κάθε συνάρτηση που την επαληθεύει.

Καμπύλη ολοκλήρωσης της εξίσωσης ονομάζεται η καμπύλη μιας λύσης της.

Χωριζομένων μεταβλητών: Είναι οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, \tag{13.1}$$

οπότε είναι $g(y)dy = f(x)dx$ και ολοκληρώνοντας έχουμε ότι $\int g(y)dy = \int f(x)dx$. Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα προκύπτει η μορφή των λύσεών τους.

Ομογενείς: Είναι οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}, \qquad \text{όπου} \quad \frac{f(tx,ty)}{g(tx,ty)} = \frac{t^k f(x,y)}{t^k g(x,y)} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}. \tag{13.2}$$

Μετατρέπονται σε χωριζομένων μεταβλητών, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $y = ux$.

Η μορφή:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \tag{13.3}$$

Οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής αυτής λύνονται ως εξής:

- Αν $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, τότε τίθεται $z = a_1x + b_1y$, οπότε είναι

  $$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1}\left(\frac{dz}{dx} - a_1\right)$$

  Επειδή $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$, έπεται ότι

  $$z = a_1x + b_1y = \frac{a_1}{a_2}(a_2x + b_2y),$$

  οπότε η διαφορική εξίσωση ανάγεται στην

  $$\frac{1}{b_1}\left(\frac{dz}{dx} - a_1\right) = \frac{z + c_1}{\frac{a_2}{a_1}z + c_2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{b_1z + b_1c_1}{\frac{a_2}{a_1}z + c_2} + a_1 = \frac{b_1z + b_1c_1 + a_2z + a_1c_2}{\frac{a_2}{a_1}z + c_2}$$

  και τελικά, στην

  $$\frac{\frac{a_2}{a_1}z + c_2}{(b_1 + a_2)z + b_1c_1 + a_1c_2}dz = dx,$$

  η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται σύμφωνα με τα προηγούμενα.

- Αν $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, τότε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση, έστω την (x_0, y_0), οπότε, θέτοντας $X = x - x_0$ και $Y = y - y_0$, η διαφορική εξίσωση ανάγεται στην

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1(X + x_0) + b_1(Y + y_0) + c_1}{a_2(X + x_0) + b_2(Y + y_0) + c_2} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}.$$

Η τελευταία είναι ομογενής, επομένως λύνεται με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $Y = UX$.

Γραμμικές: Είναι οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} + \phi(x)y = \sigma(x). \tag{13.4}$$

Έστω $\Phi = \Phi(x)$ μια παράγουσα της $\phi(x)$, δηλαδή $\Phi'(x) = \phi(x)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: 1) Αν $\sigma(x) = 0$, τότε η ΔΕ ονομάζεται **γραμμική ομογενής** και λύνεται άμεσα ως χωριζομένων μεταβλητών:

$$y' = -\phi(x)y \overset{y\neq 0}{\Rightarrow} \frac{y'}{y} = -\phi(x) \Rightarrow (\ln|y|)' = -\phi(x) \Rightarrow \ln|y| = k - \Phi(x) \Rightarrow |y| = e^k e^{-\Phi(x)}$$

οπότε τελικά η γενική λύση της γραμμικής ομογενούς είναι η

$$y = ce^{-\Phi(x)} = cy_0, \quad c \in \mathbb{R}, \qquad \text{όπου } y_0 = y_0(x) = e^{-\Phi(x)} \tag{13.5}$$

είναι η μερική λύση της γραμμικής ομογενούς, για $c = 1$, η οποία παίζει σημαντικό ρόλο και στην γενική περίπτωση, όπως φαίνεται παρακάτω.

Στη γενική περίπτωση, αναζητάμε μια θετική συνάρτηση $I = I(x)$, η οποία ονομάζεται **ολοκληρωτικός παράγοντας**, τέτοια ώστε $(Iy)' = (y' + \phi y)I$, έτσι ώστε, πολλαπλασιάζοντας την (13.4) με I, να προκύψει

$$(y' + \phi y)I = \sigma I \Rightarrow (Iy)' = \sigma I$$

Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $I(x) = e^{\Phi(x)} = \dfrac{1}{y_0(x)}$, αφού $I'(x) = \phi(x)e^{\Phi(x)} = \phi(x)I(x)$, οπότε

$$(y' + \phi y)I = y'I + \phi Iy = y'I + I'y = (Iy)'$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$(I(x)y)' = I(x)\sigma(x) \Rightarrow I(x)y = c + \int I(x)\sigma(x)dx \Rightarrow y = \frac{c + \int I(x)\sigma(x)dx}{I(x)}$$

οπότε, η γενική λύση της (13.4) είναι η

$$y = cy_0(x) + y_0(x)\int \frac{\sigma(x)}{y_0(x)}dx, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{13.6}$$

Εναλλακτικά, σύμφωνα με τη γενική θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, η γενική λύση της εξίσωσης (13.4) προκύπτει ως το άθροισμα της γενικής λύσης cy_0 της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης και μιας (οποιασδήποτε) μερικής λύσης ψ της (13.4), δηλαδή είναι

$$y = cy_0 + \psi,$$

οπότε το πρόβλημα της επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης ανάγεται στην εύρεση μιας μερικής λύσης ψ.

Για το σκοπό αυτό, ακολουθείται η **μέθοδος του Lagrange**, σύμφωνα με την οποία αναζητείται συνάρτηση ψ της μορφής $\psi = gy_0$. Αφού η ψ είναι λύση της (13.4), έπεται ότι

$$\psi' + \phi\psi = \sigma \Rightarrow g'y_0 + gy_0' + \phi g y_0 = \sigma \Rightarrow g'y_0 + g(y_0' + \phi y_0) = \sigma \Rightarrow g'y_0 = \sigma.$$

Η τελευταία σχέση προέκυψε διότι η y_0 είναι λύση της ομογενούς, δηλαδή $y_0' + \phi y_0 = 0$. Επομένως, είναι

$$g' = \frac{\sigma}{y_0},$$

οπότε, μια κατάλληλη συνάρτηση g είναι η

$$g = \int \frac{\sigma(x)}{y_0(x)} dx = \int \sigma(x) e^{\Phi(x)} dx,$$

ώστε η ζητούμενη γενική λύση είναι η

$$y = cy_0 + \psi = cy_0 + y_0 g = cy_0 + y_0 \int \frac{\sigma}{y_0} dx,$$

όπως προέκυψε και με την προηγούμενη μέθοδο (βλ. (13.6)).

Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli: Είναι της μορφής

$$\frac{dy}{dx} + \phi(x)y = \sigma(x)y^a.$$

Αν $a = 0$ ή $a = 1$, τότε η ΔΕ είναι γραμμική. Αλλιώς, θέτουμε $u = y^{1-a}$. Ο μετασχηματισμός αυτός μετατρέπει την εξίσωση σε γραμμική. Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με $(1-a)y^{-a}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&(1-a)y^{-a}\frac{dy}{dx} + (1-a)\phi(x)y^{1-a} = (1-a)\sigma(x) \\
\Leftrightarrow &(y^{1-a})' + (1-a)\phi(x)y^{1-a} = (1-a)\sigma(x) \\
\Leftrightarrow &u' + (1-a)\phi(x)u = (1-a)\sigma(x).
\end{aligned}$$

Άσκηση. *Να λυθεί η (γραμμική) διαφορική εξίσωση*

$$y' + \frac{1}{x}y = 3\sin(2x), \quad x > 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi} \tag{13.7}$$

1. *Με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα.*

2. *Σύμφωνα με τη γενική θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.*

Λύση. Η δοσμένη διαφορική εξίσωση είναι γραμμική, με $\phi(x) = \dfrac{1}{x}$ και $\sigma(x) = 3\sin(2x)$ (βλ. (13.4)). Μια παράγουσα της $\phi(x)$ είναι η $\Phi(x) = \ln x$.

1) Θέτοντας $I(x) = e^{\Phi(x)} = x$, έχουμε ότι

$$I(x)y' + I(x)\frac{1}{x}y = (I(x)y)'.$$

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας την (13.7) με $I(x)$, έχουμε

$$xy'+y = 3x\sin(2x) \Rightarrow (xy)' = 3x\sin(2x) \Rightarrow xy = c_1+\int 3x\sin(2x)dx \Rightarrow y = \frac{c_1}{x}+\frac{1}{x}\int 3x\sin(2x)dx$$

Στη συνέχεια, προσδιορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα $\int 3x\sin(2x)dx$ ως εξής

$$\begin{aligned}\int 3x\sin(2x)dx &= \int \frac{-3}{2}x\,(\cos(2x))'\,dx = \frac{-3}{2}x\cos(2x) - \int\left(\frac{-3}{2}x\right)'\cos(2x)dx \\ &= \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{2}\int\cos(2x)dx = \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{2}\int\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)' dx \\ &= c_2 + \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x)\end{aligned}$$

Άρα, η γενική λύση της (13.7) είναι η

$$y = \frac{c_1}{x} + \frac{1}{x}\left(c_2 + \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x)\right) = \frac{c}{x} + \frac{3}{2}\left(\frac{\sin(2x)}{2x} - \cos(2x)\right), \tag{13.8}$$

όπου $c = c_1 + c_2$.

Χρησιμοποιώντας την δοσμένη τιμή $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi}$, προσδιορίζουμε την τιμή της σταθεράς c, ως εξής

$$\frac{1}{\pi} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4c}{\pi} + \frac{3}{2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\pi} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4c}{\pi} + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\pi} - 0\right) = \frac{4c+3}{\pi}$$

Άρα, $\dfrac{4c+3}{\pi} = \dfrac{1}{\pi} \Rightarrow 4c+3 = 1 \Rightarrow c = -\dfrac{1}{2}$ και αντικαθιστώντας την τιμή της c στην (13.8), βρίσκουμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

2) Μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς:

$$y' + \frac{1}{x}y = 0.$$

είναι ως γνωστό η $y_0 = e^{-\Phi(x)} = \frac{1}{x}$. οπότε η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$y = \frac{c}{x}, \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{13.9}$$

Στη συνέχεια, αναζητούμε μερική λύση της (13.7), της μορφής $\psi = gy_0$. Ως γνωστό, μια κατάλληλη συνάρτηση g είναι μια παράγουσα της $\sigma(x)e^{\Phi(x)} = 3x\sin(2x)$, οπότε επιλύοντας το ολοκλήρωμα, επιλέγουμε την

$$g = \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x).$$

Τελικά, η γενική λύση της (13.7) είναι το άθροισμα της λύσης (13.9) της αντίστοιχης ομογενούς και της μερικής λύσης ψ, δηλαδή

$$y = \frac{c}{x}+\psi = \frac{c}{x}+y_0 g = \frac{c}{x}+\frac{1}{x}g = \frac{c}{x}+\frac{1}{x}\left(\frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x)\right) = \frac{c}{x}+\frac{3}{2}\left(\frac{\sin(2x)}{2x} - \cos(2x)\right),$$

όπως άλλωστε προέκυψε και στο προηγούμενο ερώτημα.

Η τιμή της σταθεράς c προσδιορίζεται όπως και πριν, θέτοντας $x = \frac{\pi}{4}$ στον παραπάνω τύπο. □

Άσκηση (ΦΕΒ 2019). *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{\sin x}{x^3}, \qquad y(\pi/2) = 1.$$

Λύση. Πολλαπλασιάζοντας την ΔΕ κατά μέλη με x^3, παίρνουμε τις ισοδύναμες σχέσεις

$$\begin{aligned} x^3y' + 3x^2y &= \sin x \\ (x^3y)' &= (-\cos x)' \\ x^3y &= c - \cos x, \qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

και τελικά η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = \frac{c - \cos x}{x^3}.$$

Θέτοντας $x = \pi/2$, έχουμε ότι

$$1 = y(\pi/2) = \frac{c-0}{(\pi/2)^3},$$

οπότε $c = (\pi/2)^3$ και η ζητούμενη μερική λύση είναι η

$$y = \frac{(\pi/2)^3 - \cos x}{x^3}.$$

□

Άσκηση. *Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις*

$$i)\ y'\cos^2 x = y(y-1), y(0) = 2, \qquad iii)\ y' = a - by, b \neq 0.$$

Λύση. *i*) Η δοσμένη ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, αφού γράφεται στη μορφή

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

όταν $y \neq 0, 1$. Επομένως, ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy = \int (\operatorname{tg} x)' dx \\
&\Leftrightarrow \ln|y-1| - \ln|y| = k + \operatorname{tg} x, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |(y-1)/y| = e^{k+\operatorname{tg} x} \Leftrightarrow 1 - 1/y = \pm e^k e^{\operatorname{tg} x} \\
&\Leftrightarrow 1/y = 1 - ce^{\operatorname{tg} x}, \quad c \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = (1 - ce^{\operatorname{tg} x})^{-1}, \quad c \in \mathbb{R}, \qquad \text{ή} \qquad y = 0.$$

Στη συνέχεια, βάσει της αρχικής συνθήκης $y(0) = 2$, υπολογίζουμε τη σταθερά c ως

$$2 = y(0) = (1-c)^{-1} \Leftrightarrow 1 - c = 1/2 \Leftrightarrow c = 1/2$$

οπότε η ειδική λύση με $y(0) = 2$ είναι η $y = (1 - e^{\operatorname{tg} x}/2)^{-1}$.

ii) Η δοσμένη ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, αφού γράφεται στη μορφή (για $y \neq a/b$, η οποία είναι λύση της ΔΕ)

$$\frac{dy}{a - by} = dx.$$

Επομένως, ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dy}{a-by} = \int dx \Leftrightarrow \frac{-1}{b} \ln|a-by| = k + x, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \ln|a-by| = -bk - bx \\
&\Leftrightarrow |a - by| = e^{-bk-bx} \Leftrightarrow a - by = \pm e^{-bk} e^{-bx} \Leftrightarrow a - by = c_1 e^{-bx}, c_1 \in \mathbb{R}^* \\
&\Leftrightarrow by = a - c_1 e^{-bx}, c_1 \in \mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτων, η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = \frac{a}{b} - ce^{-bx}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

□

Άσκηση. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y, x > 0$$

Λύση. Η ΔΕ γράφεται στη μορφή

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$$

και είναι ομογενής. Θέτοντας $y = ux$, έχουμε ότι $y' = u + u'x$ και

$$\begin{aligned} y' =& u + u'x = \frac{\sqrt{x^2(1-u^2)} + ux}{x} \Leftrightarrow u'x = \frac{x\sqrt{1-u^2} + ux}{x} - u = \sqrt{1-u^2} \\ \Leftrightarrow& \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$\arcsin u = c + \ln x, \qquad c \in \mathbb{R}^*$$

δηλαδή $u = \sin(c + \ln x)$ και τελικά η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = x\sin(c + \ln x), \qquad c \in \mathbb{R}^*.$$

□

Άσκηση. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' = \frac{x + 2y + 5}{2x + 4y + 6}.$$

Λύση. Θέτοντας $z = x + 2y$, οπότε $z' = 1 + 2y'$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} y' &= \frac{z'-1}{2} = \frac{z+5}{2z+6} \Rightarrow z' = \frac{2z+10}{2z+6} + 1 = \frac{4z+16}{2z+6} = \frac{2z+8}{z+3} \Rightarrow \frac{z+3}{2z+8}dz = dx \\ \Rightarrow& \frac{2z+6}{2z+8}dz = 2dx \Rightarrow \left(1 - \frac{2}{2z+8}\right)dz = 2dx \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε ότι

$$2x + c = \int 2dx = \int \left(1 - \frac{2}{2z+8}\right)dz = z - \ln|2z+8| = x + 2y - \ln|2x + 4y + 8|$$

οπότε η γενική λύση της ΔΕ σε πεπλεγμένη μορφή είναι η

$$2y = x + \ln|2x + 4y + 8| + c.$$

□

Άσκηση. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' = \frac{x+y-2}{-x+y-4}.$$

Λύση. Βάσει του ακόλουθου συστήματος

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ -x+y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ 2y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$$

θέτουμε $X = x+1$ και $Y = y-3$, οπότε $dY = dy$, $dX = dx$, $y' = dY/dX$ και η ΔΕ μετατρέπεται στην

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(X-1)+(Y+3)-2}{-(X-1)+(Y+3)-4} = \frac{X+Y}{-X+Y}.$$

Η νέα ΔΕ είναι ομογενής, οπότε θέτοντας $Y = UX$, μετατρέπεται στην

$$\frac{dU}{dX}X + U = \frac{X+UX}{-X+UX} = \frac{U+1}{U-1} \Rightarrow \frac{dU}{dX}X = \frac{U+1}{U-1} - U = \frac{2U+1-U^2}{U-1},$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών, αφού γράφεται ως

$$\frac{U-1}{2U+1-U^2}dU = \frac{dX}{X}.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη,

$$c_1 + \ln|X| = \int \frac{dX}{X} = -\int \frac{U-1}{U^2-2U-1}dU = \frac{-1}{2}\int \frac{(U^2-2U-1)'}{U^2-2U-1}dU = \frac{-1}{2}\ln|U^2-2U-1|,$$

όπου $c_1 \in \mathbb{R}$, και τελικά

$$\ln|U^2-2U-1| = -2c_1 - \ln X^2 \Rightarrow U^2-2U-1 = \frac{c_2}{X^2}, \quad c_2 \in \mathbb{R}^*$$

Αντικαθιστώντας, είναι $U = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{y-3}{x+1}$ και

$$\begin{aligned} U^2-2U-1 &= \left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2 - 2\frac{y-3}{x+1} + 1 = \left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2 - 2\frac{y+x-2}{x+1} = \frac{(y-3)^2+(y+x-2)(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{y^2+x^2+xy-x-5y+7}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

οπότε η γενική λύση σε πεπλεγμένη μορφή της αρχικής ΔΕ είναι η

$$y^2+x^2+xy-x-5y = c, \qquad c \in \mathbb{R} \setminus \{-7\}.$$

□

Άσκηση (ΦΕΒ 2015). *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' + \frac{4}{x}y = 12\sqrt{y}x^3, \qquad y(1) = 4.$$

Λύση. Επειδή $\sqrt{y} = y^{1/2}$, θέτουμε $a = 1/2$ και πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τη ΔΕ με $(1-a)y^{-a} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, παίρνοντας την

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{2}{x}\sqrt{y} = 6x^3.$$

Θέτοντας $u = y^{1-a} = \sqrt{y}$, οπότε $u' = \dfrac{y'}{2\sqrt{y}}$, η τελευταία ΔΕ μετατρέπεται στην

$$u' + \frac{2}{x}u = 6x^3.$$

Πολλαπλασιάζοντας με x^2 (ολοκληρωτικός παράγοντας), παίρνουμε τις ισοδύναμες σχέσεις

$$\begin{aligned} x^2u' + 2xu &= 6x^5 \\ (x^2u)' &= (x^6)' \\ x^2u &= x^6 + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\ x^2\sqrt{y} &= x^6 + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\ \sqrt{y} &= x^4 + \frac{c}{x^2}, \qquad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

οπότε η γενική λύση της αρχικής ΔΕ είναι η

$$y = \left(x^4 + \frac{c}{x^2}\right)^2, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Θέτοντας $x = 1$, έχουμε ότι

$$4 = y(1) = (1+c)^2 \Rightarrow 1 + c =\in \{-2, 2\} \Rightarrow c \in \{-3, 1\}$$

και έτσι προκύπτουν δύο μερικές λύσεις για την αρχική συνθήκη $y(1) = 4$, οι

$$y = \left(x^4 - \frac{3}{x^2}\right)^2, \qquad y = \left(x^4 + \frac{1}{x^2}\right)^2.$$

□

Παράρτημα 1 - Η μέθοδος του Euler

Πολλά φαινόμενα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις (ΔΕ), δηλαδή εξισώσεις που περιέχουν μια άγνωστη συνάρτηση $y = y(t)$ και κάποιες παραγώγους της. Για παράδειγμα η ποσότητα $y(t)$ ενός ραδιενεργού υλικού φθίνει συναρτήσει του χρόνου t, σύμφωνα με την εξίσωση

$$y'(t) = -cy(t) \tag{13.10}$$

όπου $c > 0$ κάποια σταθερά. Αν η αρχική ποσότητα είναι ίση με $y(0)$, ποια ποσότητα θα έχει απομείνει μετά από χρόνο t;

Διαφορικές εξισώσεις, όπως η παραπάνω ονομάζονται πρώτης τάξης, γιατί περιλαμβάνουν μόνο την πρώτη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης. Η γενική μορφή μιας ΔΕ πρώτης τάξης είναι η

$$y'(t) = f(t, y(t)), \tag{13.11}$$

όπου $f(x, y)$ κάποια γνωστή συνάρτηση δύο μεταβλητών. Στο προηγούμενο παράδειγμα είναι $f(x, y) = -cy$.

Συχνά, δεν μπορούμε να επιλύσουμε τη ΔΕ και να προσδιορίσουμε επακριβώς την άγνωστη συνάρτηση y, οπότε καταφεύγουμε σε προσεγγιστικές μεθόδους. Η πιο βασική από αυτές είναι η μέθοδος Euler, η οποία βασίζεται στον προσεγγιστικό τύπο

$$y(t + h) \approx y(t) + y'(t)h.$$

Αντικαθιστώντας τον όρο $y'(t)$ με το δεξί μέλος της ΔΕ, δηλαδή με $f(t, y)$, παίρνουμε τον τύπο

$$y(t + h) \approx y(t) + f(t, y(t))h. \tag{13.12}$$

Αυτό σημαίνει ότι αν γνωρίζουμε την f και μια αρχική τιμή $y(t_0)$, μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή $y(t_0 + h)$.

Στη συνέχεια, μπορούμε ομοίως να χρησιμοποιήσουμε την $y(t_0 + h)$, προκειμένου να προσεγγίσουμε την $y(t_0 + 2h)$, κ.ο.κ. Προφανώς, όσο επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία, το σφάλμα της προσέγγισης αυξάνεται.

Η ΔΕ (13.10) έχει απλή λύση: Για $y \neq 0$ είναι

$$\begin{aligned} y'(t) = -cy(t) &\Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = -c \Rightarrow (\ln|y(t)|)' = (-cx)' \\ &\Rightarrow \ln|y(t)| = k - cx, k \in \mathbb{R} \Rightarrow |y(t)| = e^{k-cx} \Rightarrow y(t) = \pm e^k e^{-cx} \end{aligned}$$

και τελικά

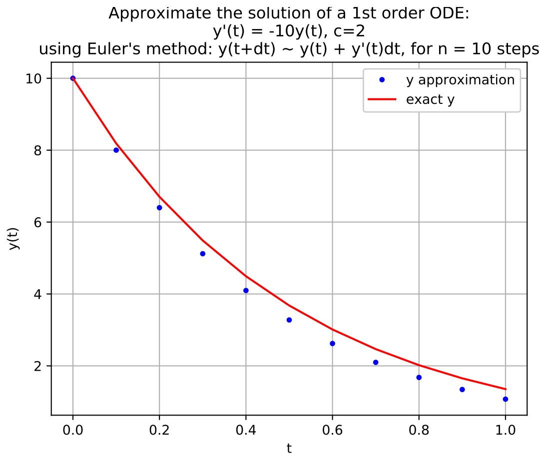
$$y(t) = y(0)e^{-cx},$$

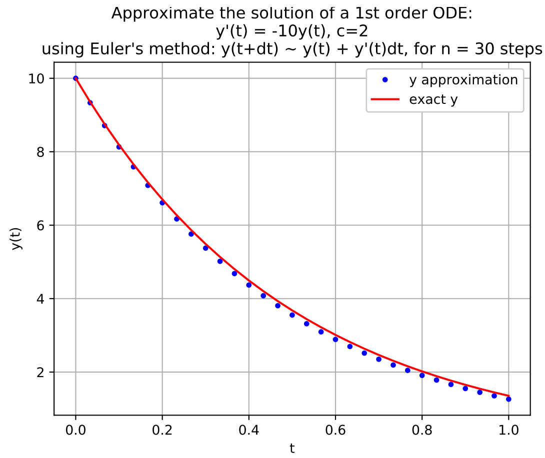
δηλαδή, η αρχική τιμή $y(0)$ και η σταθερά c καθορίζουν πλήρως τη συνάρτηση $y(t)$.

Ο κώδικας που ακολουθεί, προσεγγίζει την τιμή $y(1)$, όταν $c = 2$ και $y(0) = 10$, σε $n = 10$ βήματα, οπότε $h = (1 - 0)/n = 0.1$. Προφανώς, αύξηση του n σημαίνει μικρότερο h και μεγαλύτερη ακρίβεια.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#solve the ODE: y' = -c*y  (1)
#using Euler's method
t0, y0 = 0, 10  #initial values
tfinal = 1    #target: y(tfinal)
n = 10      #number of steps
c = 2

rhs = lambda t, y: -c*y  #right hand side of ODE: y' = rhs

def euler(rhs, y0, t0, tfinal, n):
    h = (1.0*(tfinal-t0))/n
    t=np.zeros((n+1,1))
    y=np.zeros((n+1,1))
    t[0], y[0] = t0, y0
    for i in range(n):
        y[i+1] = y[i] + h*rhs(t[i], y[i])
        t[i+1] = t[i] + h
    return (t,y)

t,y = euler(rhs, y0, t0, tfinal, n)
yreal = 10*np.exp(-c*t) #exact solution is y(t) = y(0)*exp(-c*t)

#plot
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(t,y, 'b.', label = 'y approximation')
ax.plot(t,yreal, 'r', label = 'exact y')
#ax.axis('equal') #x/y ratio = 1
plt.grid(True)
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('y(t)')
str = "Approximate the solution of a 1st order ODE:\n"
str += "y'(t) = -%dy(t), c=%d"%(y0,c)
str += "\nusing Euler's method: y(t+dt)   y(t) + y'(t)dt"
str += ", for n = %d steps"%n
plt.title(str)
plt.legend()
plt.show()
```

Όπως φαίνεται, στο επόμενο σχήμα, οι προσεγγιστικές τιμές αποκλίνουν από τις πραγματικές, καθώς αυξάνει το t. Η προσέγγιση μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά, αν αυξήσουμε το πλήθος βημάτων n.





i) $n = 10$ *ii*) $n = 30$

Αποδεικνύεται ότι το απόλυτο σφάλμα $|y(t) - \hat{y}(t)|$ μεταξύ της πραγματικής και της προσεγγιστικής τιμής είναι γραμμικά ανάλογο του h.

Ασκήσεις

1. Η ταχύτητα $s(t)$ ενός σώματος σε ελεύθερη πτώση ικανοποιεί την ΔΕ $s'(t) = g - ks(t)$, όπου $g = 9.81 m/s^2$ η επιτάχυνση λόγω βαρύτητας και $k > 0$ μια σταθερά.

   Αν $s(0) = 0$ και $k = 0.1$, προσεγγίστε την ταχύτητά του $s(t)$ τη χρονική στιγμή $t = 5$, υλοποιώντας τη μέθοδο Euler για διάφορες τιμές του n

   (Η ακριβής λύση της ΔΕ είναι η $s(t) = g/k(1 - e^{-kt})$.)

2. Να προσεγγισθεί, εφαρμόζοντας 2 βήματα της μεθόδου Euler, η τιμή $y(2)$, όταν $y'(t) = \frac{1}{t} - y^2(t)$ και $y(1) = 2$.

3. Η συνάρτηση $y(t) = e^{t^2}$ ικανοποιεί την εξίσωση $y'(t) = e^{t^2} 2t = 2ty(t)$. Προσεγγίστε τον αριθμό $y(2) = e^4$, εφαρμόζοντας τη μέθοδο Euler για την $y(t)$ με αρχική τιμή $y(0) = 1$.

4. Η μέθοδος του μεσαίου σημείου βελτιώνει το σφάλμα της μεθόδου Euler, χρησιμοποιώντας την καλύτερη προσέγγιση $\dfrac{y(t+h) - y(t)}{h} \approx y'(t + h/2)$ του λόγου, οπότε

$$y(t+h) - y(t) \approx hy'(t + \tfrac{h}{2}) = hf(t + \tfrac{h}{2}, y(t + \tfrac{h}{2})) \approx hf(t + \tfrac{h}{2}, y(t) + \tfrac{h}{2} f(t, y(t)))$$

   όπου χρησιμοποιήθηκε η προσέγγιση $y(t + \frac{h}{2}) \approx y(t) + \frac{h}{2} f(t, y(t))$ του άγνωστου όρου $y(t + \frac{h}{2})$.

   Υλοποιήστε τη μέθοδο, εφαρμόστε την για τις ασκήσεις 1, 2, 3 και συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

Παράρτημα 2 - Επίλυση διαφορικών εξισώσεων χωρίς μεθοδολογία

Η μελέτη αυτής της ενότητας είναι προαιρετική και δεν είναι απαραίτητη για την προετοιμασία για τις εξετάσεις. Παρουσιάζονται ορισμένες τεχνικές για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων, πέρα των γνωστών μεθοδολογιών που παρουσιάστηκαν στα πλαίσια του μαθήματος. Στόχος αυτής της ενότητας είναι η εξοικείωση με την έννοια της παράγουσας και την αναγνώρισή της σε σύνθετες παραστάσεις. Η ικανότητα αυτή οδηγεί πολλές φορές σε πιο γρήγορη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης ή ενός αόριστου ολοκληρώματος.

Κατά σύμβαση, σε όλες τις διαφορικές εξισώσεις που ακολουθούν, συμβολίζουμε με x την ανεξάρτητη μεταβλητή και με $y = y(x)$ την άγνωστη συνάρτηση. Όλες οι παραγωγίσεις θεωρούνται ως προς τη μεταβλητή x.

Η κεντρική ιδέα πίσω από τις τεχνικές αυτές είναι η μετατροπή της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης στη μορφή

$$(A(x,y))' = (B(x))' \tag{13.13}$$

όπου το πρώτο μέλος είναι μια παράσταση των x, y, οπότε θα είναι

$$A(x,y) = B(x) + c,$$

οπότε λύνοντας ως προς y, προσδιορίζουμε την άγνωστη συνάρτηση.

Το πρώτο βήμα, προκειμένου να φτάσουμε στη μορφή (13.13), είναι να αναγνωρίσουμε στη δοσμένη διαφορική εξίσωση την παράγουσα κάποιας σύνθετης συνάρτησης. Συνήθως αναζητούμε τις ακόλουθες μορφές

$$\begin{aligned}
f'(y)y' &= (f(y))' \\
y^a y' &= \left(\frac{1}{a+1}y^{a+1}\right)', \quad a \neq -1 \\
\frac{y'}{y} &= (\ln|y|)' \\
fy' + f'y &= (fy)' \\
\frac{fy' - f'y}{f^2} &= \left(\frac{y}{f}\right)'
\end{aligned}$$

οι οποίες είναι ουσιαστικά οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης. Η $f = f(x)$ είναι κάποια συνάρτηση του x. Αναγνωρίζοντας την παράσταση του πρώτου μέλους στη διαφορική εξίσωση, μπορούμε να την αντικαταστήσουμε από το δεύτερο μέλος, έχουμε δηλαδή προσδιορίσει μια παράγουσά της.

Πολλές φορές, χρειάζεται να πολλαπλασιάσουμε την αρχική εξίσωση με κάποια συνάρτηση, ώστε να εμφανίσουμε την επιθυμητή παράσταση. Για παράδειγμα, για τη διαφορική εξίσωση $y' + f'(x)y = g(x)$, πολλαπλασιάζοντας με $e^{f(x)}$, έχουμε

$$y' + f'(x)y = g(x) \Rightarrow e^{f(x)}y' + e^{f(x)}f'(x)y = e^{f(x)}g(x) \Rightarrow \left(e^{f(x)}y\right)' = e^{f(x)}g(x)$$

οπότε η επίλυση της εξίσωσης ανάγεται στην εύρεση μιας παράγουσας του δεύτερου μέλους. Σημειώνεται ότι στην ίδια ιδέα βασίζεται και η μέθοδος του ολοκληρωτικού παράγοντα, για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Παράδειγμα 1. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' = \frac{\sin 2x}{1+\cos x}(1+e^y).$$

Λύση. Είναι

$$y' = \frac{\sin 2x}{1+\cos x}(1+e^y) \Rightarrow \frac{1}{1+e^y}y' = \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos x}.$$

Στο σημείο αυτό, παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, οπότε λύνεται με ολοκλήρωση κατά μέλη.

Μπορούμε όμως να προσδιορίζουμε τις παράγουσες του πρώτου και του δεύτερου μέλους με το εξής τέχνασμα: στο πρώτο μέλος, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με e^{-y}, ενώ στο δεύτερο μέλος, προσθαφαιρούμε τη μονάδα από το $\cos x$. Οπότε, προκύπτει η ισοδύναμη διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{-y}}{e^{-y}+1}y' = \frac{2\sin x(1-1+\cos x)}{1+\cos x} = 2\sin x - \frac{2\sin x}{1+\cos x}\\
&\Rightarrow -(\ln(1+e^{-y}))' = -2(\cos x)' + 2(\ln(1+\cos x))'\\
&\Rightarrow (\ln(1+e^{-y}))' = (2\cos x - 2\ln(1+\cos x))'\\
&\Rightarrow \ln(1+e^{-y}) = k + 2\cos x - 2\ln(1+\cos x)\\
&\Rightarrow 1+e^{-y} = e^{k+2\cos x-2\ln(1+\cos x)}\\
&\Rightarrow e^{-y} = -1 + e^k e^{2\cos x} e^{-2\ln(1+\cos x)} = -1 + \frac{ce^{2\cos x}}{(1+\cos x)^2}\\
&\Rightarrow -y = \ln\left(\frac{ce^{2\cos x}}{(1+\cos x)^2} - 1\right)\\
&\Rightarrow y = -\ln\left(\frac{ce^{2\cos x}}{(1+\cos x)^2} - 1\right)
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x.$$

Λύση.

$$y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x \Rightarrow y' - e^x = (y-e^x)^2 \overset{y\neq e^x}{\Rightarrow} \frac{y'-e^x}{(y-e^x)^2} = 1 \Rightarrow \frac{-(e^x-y)'}{(e^x-y)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{e^x-y}\right)' = x' \Rightarrow \frac{1}{e^x-y} = x+c \Rightarrow e^x - y = \frac{1}{x+c} \Rightarrow y = e^x - \frac{1}{x+c}$$

Η $y = e^x$ που παραβλέφθηκε κατά τη διαδικασία, είναι επίσης λύση της εξίσωσης, η οποία δεν συμπεριλαμβάνεται στην πραπάνω γενική λύση. □

Παράδειγμα 3. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$2xyy' = x^2 + 3y^2$$

Λύση.

$$2xyy' = x^2 + 3y^2 \Rightarrow 2xyy' - 3y^2 = x^2 \Rightarrow x(y^2)' - 3y^2 = x^2 \Rightarrow x^3(y^2)' - 3x^2y^2 = x^4$$

$$\Rightarrow x^3(y^2)' - (x^3)'y^2 = x^4 \Rightarrow \frac{x^3(y^2)' - (x^3)'y^2}{x^6} = \frac{x^4}{x^6} \Rightarrow \left(\frac{y^2}{x^3}\right)' = \left(-\frac{1}{x}\right)'$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{x^3} = c - \frac{1}{x} \Rightarrow y^2 = cx^3 - x^2 = x^2(cx-1) \Rightarrow y = |x|\sqrt{cx-1}$$

Ο παραπάνω τύπος έχει νόημα, μόνο όταν $c \neq 0$ και $cx - 1 \geq 0$. □

Παράδειγμα 4. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 6x^3.$$

Λύση.

$$y' + \frac{2}{x}y = 6x^3 \Rightarrow xy' + 2y = 6x^4 \Rightarrow x^2y' + 2xy = 6x^5 \Rightarrow (x^2y)' = (x^6)' \Rightarrow x^2y = x^6 + c \Rightarrow y = x^4 + \frac{c}{x^2}$$

Ο πολλαπλασιασμός της εξίσωσης με x^2, που εφαρμόστηκε παραπάνω, ουσιαστικά ταυτίζεται με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα, για $I(x) = x^2$. □

Παράδειγμα 5. *Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις*

$$y' + y = \frac{1}{1+e^{2x}}, \qquad y' + \frac{3y}{x} = \frac{\sin x}{x^3}.$$

Λύση. Κι εδώ, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, για τις οποίες ο ολοκληρωτικός παράγοντας προκύπτει άμεσα, χωρίς να χρειαστεί επίλυση ολοκληρώματος.

Για την πρώτη, έχουμε

$$y' + y = \frac{1}{1+e^{2x}} \Rightarrow e^xy' + e^xy = \frac{e^x}{1+e^{2x}} \Rightarrow (e^xy)' = (\operatorname{arctg} e^x)' \Rightarrow y = \frac{c + \operatorname{arctg} e^x}{e^x}.$$

Για τη δεύτερη, έχουμε

$$y' + \frac{3y}{x} = \frac{\sin x}{x^3} \Rightarrow x^3y' + 3x^2y = \sin x \Rightarrow (x^3y)' = (-\cos x)' \Rightarrow y = \frac{c - \cos x}{x^3}.$$

□

Παράδειγμα 6. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^3}\ln x, \qquad x > 0.$$

Λύση.

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^3}\ln x \Rightarrow \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{y^2}{x^4}\ln x \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \frac{\ln x}{x^2}$$

Θέτοντας $\frac{y}{x} = u$, για απλότητα, έχουμε

$$u' = u^2\frac{\ln x}{x^2} \overset{y\neq 0}{\Rightarrow} \frac{u'}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

Παρατηρώντας ότι $\left(\dfrac{1+\ln x}{x}\right)' = \dfrac{\frac{1}{x}x-(1+\ln x)}{x^2} = \dfrac{-\ln x}{x^2}$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \left(\frac{1+\ln x}{x}\right)' \Rightarrow \frac{1}{u} = c + \frac{1+\ln x}{x} \Rightarrow u = \frac{x}{cx+1+\ln x},$$

οπότε, τελικά είναι $y = \dfrac{x^2}{cx+1+\ln x}$. Η $y=0$, που παραλήφθηκε, αποτελεί επίσης λύση της εξίσωσης. □

Παράδειγμα 7. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' + xy = \frac{x}{y^2}, \qquad y \neq 0.$$

Λύση. Πολλαπλασιάζοντας με y^2, προκύπτει ότι

$$y' + xy = \frac{x}{y^2} \Rightarrow y^2y' + xy^3 = x \Rightarrow 3y^2y' + 3xy^3 = 3x \Rightarrow (y^3)' + 3xy^3 = 3x.$$

Στο σημείο αυτό, αναζητούμε κατάλληλη συνάρτηση $f(x)$, με $f'(x) = 3xf(x)$. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $e^{\frac{3}{2}x^2}$, οπότε

$$e^{\frac{3}{2}x^2}(y^3)' + 3xe^{\frac{3}{2}x^2}y^3 = 3xe^{\frac{3}{2}x^2} \Rightarrow e^{\frac{3}{2}x^2}(y^3)' + (e^{\frac{3}{2}x^2})'y^3 = (e^{\frac{3}{2}x^2})' \Rightarrow (e^{\frac{3}{2}x^2}y^3)' = (e^{\frac{3}{2}x^2})'$$

και τελικά, $e^{\frac{3}{2}x^2}y^3 = e^{\frac{3}{2}x^2} + c \Rightarrow y^3 = 1 + ce^{-\frac{3}{2}x^2}$.

Σημειώνεται ότι, ουσιαστικά, ακολουθήθηκε η μεθοδολογία επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων Bernoulli. Ο πολλαπλασιασμός της εξίσωσης με $3y^2$ μετέτρεψε την εξίσωση σε γραμμική ως προς τη νέα συνάρτηση $u = y^3$, ενώ ο πολλαπλασιασμός με την $e^{\frac{3}{2}x^2}$ αντιστοιχεί στη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα. □

Παράδειγμα 8. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$y' = 1 + (x-y)^2.$$

Λύση.

$$y' = 1 + (x-y)^2 \Rightarrow y' - 1 = (x-y)^2 \Rightarrow (y-x)' = (y-x)^2 \overset{y\neq x}{\Rightarrow} \frac{-(y-x)'}{(y-x)^2} = -1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{y-x}\right)' = (-x)' \Rightarrow \frac{1}{y-x} = c - x \Rightarrow y - x = \frac{1}{c-x} \Rightarrow y = x + \frac{1}{c-x}$$

Η περίπτωση $y = x$ που παραλήφθηκε, αποτελεί επίσης λύση της εξίσωσης. □

Παράδειγμα 9. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$xy^2(y + xy') = 13.$$

Λύση.

$$xy^2(y+xy') = 13 \Rightarrow xy^3 + x^2y^2y' = 13 \Rightarrow 3xy^3 + x^2(y^3)' = 39 \Rightarrow 3x^2y^3 + x^3(y^3)' = 39x$$

$$\Rightarrow (x^3y^3)' = \left(\frac{39}{2}x^2\right)' \Rightarrow x^3y^3 = \frac{39}{2}x^2 + c \Rightarrow y^3 = \frac{39}{2x} + \frac{c}{x^3}$$

□

Παράδειγμα 10. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$yy' = 5$$

και στη συνέχεια, να βρεθεί η καμπύλη ολοκλήρωσής της, που διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

Λύση. Αναζητείται η λύση της εξίσωσης, με $y(1) = 2$.

$$yy' = 5 \Rightarrow 2yy' = 10 \Rightarrow (y^2)' = (10x)' \Rightarrow y^2 = 10x + c$$

Θέτοντας $x = 1$,

$$(y(1))^2 = 10 + c \Rightarrow 4 = 10 + c \Rightarrow c = -6.$$

Επομένως, είναι $y^2 = 10x - 6 \Rightarrow y = \sqrt{10x - 6}$. □

Παράδειγμα 11. *Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις*

$$y' = 2y(e^x + \ln y), \qquad x + y^3 + 6xy^2y' = 0.$$

Λύση. Για την πρώτη, αρχικά θέτουμε $y = e^u$, οπότε $y' = e^u u'$.

$$y' = 2y(e^x + \ln y) \Rightarrow e^u u' = 2e^u(e^x + u) \Rightarrow u' = 2(e^x + u) \Rightarrow u' - 2u = 2e^x \Rightarrow e^{2x}u' - 2e^{2x}u = 2e^{3x}$$
$$\Rightarrow \frac{e^{2x}u' - 2e^{2x}u}{e^{4x}} = 2e^{-x} \Rightarrow \left(\frac{u}{e^{2x}}\right)' = (-2e^{-x})' \Rightarrow \frac{u}{e^{2x}} = c - 2e^{-x} \Rightarrow u = ce^{2x} - 2e^x \Rightarrow y = e^{ce^{2x} - 2e^x}.$$

Για τη δεύτερη, είναι

$$x + y^3 + 6xy^2y' = 0 \Rightarrow y^3 + 2x(y^3)' = -x \Rightarrow e^{x^2}y^3 + 2xe^{x^2}(y^3)' = -xe^{x^2}$$
$$\Rightarrow (e^{x^2}y^3)' = \left(-\frac{1}{2}e^{x^2}\right)' \Rightarrow e^{x^2}y^3 = c - \frac{1}{2}e^{x^2} \Rightarrow y^3 = ce^{-x^2} - \frac{1}{2}.$$

□

Παράδειγμα 12. *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση*

$$(1 - 3xy)y' = y^2.$$

Λύση.

$$(1 - 3xy)y' = y^2 \Rightarrow y' = 3xyy' + y^2 \Rightarrow yy' = 3xy^2y' + y^3 \Rightarrow \left(\frac{y^2}{2}\right)' = (xy^3)' \Rightarrow \frac{y^2}{2} = xy^3 + c.$$

□