$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Είναι η f επί του $\mathbb{R}$;

Δεν είναι διότι δεν υπάρχει
$x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = -5$.

Είναι η f επί του $[0, +\infty)$

Ναι, γιατί για κάθε $y \in [0, +\infty)$
υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = y$$

$$f(x) = x^2 \;/\; \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$

$$g(x) = 2x + 5 \;/\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(x^2)$$

$$= 2x^2 + 5$$

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f(2x+5)$$

$$= (2x+5)^2$$

Αντίστροφες κυκλικές + Ολοκληρώματα

$\arcsin x$ — τόξο ημιτόνου

$\arccos x$ — τόξο συνημιτόνου

$\operatorname{arctg} x$ — τόξο εφαπτομένης

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{άρα}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{άρα}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Υπερβολικές συναρτήσεις

$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$e^{x} = \underbrace{\sinh x}_{\text{περιττή}} + \underbrace{\cosh x}_{\text{άρτια}}$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

$$\operatorname{arccosh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^{2}-1}\right) \quad / [1,+\infty) \to [0,+\infty)$$

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right) \quad / \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arctgh} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad // (-1,1) \to \mathbb{R}$$

Βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$tg\, x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$ctg\, x$	—	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

$\cos(-x) = \cos x$ ($\cos x$ άρτια)

$\sin(-x) = -\sin x$ ($\sin x$ περιττή)

$$\underline{\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin x \leq x$$

Άσκηση 1

Να δειχθεί ότι

α) $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} + \sin x \sin\frac{\pi}{2}$$

$$= 0 + 1\cdot\sin x = \sin x$$

β) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\cos 2x = \cos(x-(-x))$$

$$= \cos x\cos(-x) + \sin x \sin(-x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

γ) $\cos(x+y) = ?$

$$\underline{\cos(x+y)} = \cos(x-(-y))$$

$$= \cos x\cos(-y) + \sin x\sin(-y)$$

$$= \underline{\cos x\cos y - \sin x\sin y}$$

δ) $2\cos x \cdot \cos y = ;$

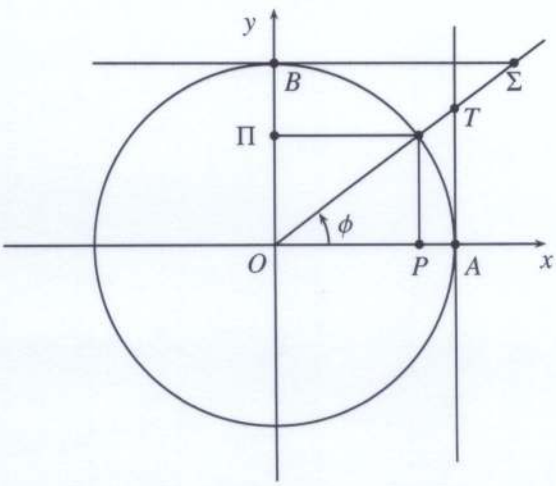
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$$

Βασική τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικοί αριθμοί

Έστω ο τριγωνομετρικός κύκλος, δηλαδή ο κύκλος ακτίνας 1, με κέντρο την αρχή των ορθογώνιων αξόνων (βλ. επόμενο σχήμα)



Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας (ή τόξου) ϕ ορίζονται ως εξής:

- **Ημίτονο:** $\sin\phi = O\Pi$
- **Συνημίτονο:** $\cos\phi = OP$
- **Εφαπτομένη:** $\operatorname{tg}\phi = AT$
- **Συνεφαπτομένη:** $\operatorname{ctg}\phi = B\Sigma$

Βασικοί τύποι

- $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$
- $\operatorname{tg}\phi = \dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}$, $\operatorname{ctg}\phi = \dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}$, $\operatorname{tg}\phi \cdot \operatorname{ctg}\phi = 1$
- $1 + \operatorname{tg}^2\phi = \dfrac{1}{\cos^2\phi}$
- $\cos(-\phi) = \cos\phi, \quad \sin(-\phi) = -\sin\phi$
- $\sin(\pi - \phi) = \sin\phi, \quad \cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$
- $\sin(\pi + \phi) = -\sin\phi, \quad \cos(\pi + \phi) = -\cos\phi$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - \phi) = \cos\phi, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = \sin\phi$
- $\sin(\frac{\pi}{2} + \phi) = \cos\phi, \quad \cos(\frac{\pi}{2} + \phi) = -\sin\phi$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

ϕ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\phi$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\phi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\operatorname{tg}\phi$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg}\phi$	–	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος

1. $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$
2. $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$
3. $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
4. $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
5. $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$
6. $\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}b}{1 + \operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$
7. $\operatorname{ctg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{ctg}a\operatorname{ctg}b - 1}{\operatorname{ctg}a + \operatorname{ctg}b}$
8. $\operatorname{ctg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{ctg}a\operatorname{ctg}b + 1}{\operatorname{ctg}a - \operatorname{ctg}b}$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιου τόξου

1. $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$
2. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
3. $\operatorname{tg}(2a) = \dfrac{2\operatorname{tg}a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$
4. $\operatorname{ctg}(2a) = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 a - 1}{2\operatorname{ctg}a}$

Έκφραση ημιτόνου και συνημιτόνου συναρτήσει της εφαπτομένης του μισού τόξου

1. $\sin\phi = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2}}$
2. $\cos\phi = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2}}$

Αθροίσματα και γινόμενα τριγωνομετρικών αριθμών

1. $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
2. $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$
3. $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
4. $\cos a - \cos b = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2}$
5. $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$
6. $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$
7. $2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

Βασικές ανισότητες

[1] Ανισότητα Bernoulli

Για κάθε $x > -1$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $n=1$ ή $x=0$.
Συνήθως χρησιμοποιείται όταν το x εξαρτάται από το n και $|x| \leq 1$.

[2] Ανισότητα Cauchy (AM-GM-HM)

Arithmetic Geometric / Harmonic Mean

Για κάθε $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0$

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$

[3] Ανισότητα Cauchy-Schwarz

Για κάθε $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ ισχυει ότι

$$(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n)^2 \leq (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Η ισότητα ισχύει μόνο ανν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε (για το ίδιο λ)

$$\alpha_1 = \lambda b_1, \ \alpha_2 = \lambda b_2, \ \ldots, \ \alpha_n = \lambda b_n$$

Ασκήσεις στις ανισότητες

Άσκηση 1. *Να δειχθεί ότι* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$, *για* $n \geqslant 1$.

Λύση. Για $n \geqslant 1$ ισχύει ότι $x = \frac{1}{n} > -1$, άρα από την ανισότητα Bernoulli έχουμε ότι

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2. \qquad \square$$

Άσκηση 2. *Να δειχθεί ότι* $\left(\frac{n+5}{n+10}\right)^n \geqslant 1 - \frac{5n}{n+10}$, *για* $n \geqslant 1$.

Λύση. Ισχύει ότι

$$\frac{n+5}{n+10} = \frac{n+10-5}{n+10} = 1 - \frac{5}{n+10}$$

Προκειμένου να εφαρμόσουμε την ανισότητα Bernoulli πρέπει να ελέγξουμε ότι

$$-\frac{5}{n+10} > -1 \Leftrightarrow 5 < n+10$$

το οποίο ισχύει.

Άρα, από την ανισότητα Bernoulli προκύπτει ότι

$$\left(1-\frac{5}{n+10}\right)^n \geqslant 1 + n\left(-\frac{5}{n+10}\right) = 1 - \frac{5n}{n+10}. \qquad \square$$

Άσκηση 3. *Να δειχθεί ότι* $n! \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$, *για κάθε* $n \geqslant 1$.

Λύση. Υπενθυμίζεται ότι $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1)n$.

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \leqslant \frac{n+1}{2}$$

Από την ανισότητα Cauchy για $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $\ldots$, $a_n = n$ προκύπτει ότι

$$\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \leqslant \frac{1+2+3+\cdots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \leqslant \frac{n+1}{2}. \qquad \square$$

Άσκηση 4. *Να δειχθεί ότι* $\sqrt[n]{1+x} \geqslant \dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{n(1+x)}}$.

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{1+x} &= \sqrt[n]{\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{n-1 \text{ όροι}}\cdot(1+x)}\\ &\geqslant \frac{n}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1}+\frac{1}{1+x}}\\ &= \frac{n}{n-1+\frac{1}{1+x}}\\ &= \frac{n}{n-\frac{x}{1+x}}\\ &= \frac{1}{1-\frac{x}{n(1+x)}}.\end{aligned}$$

□

Άσκηση 5. *Να δειχθεί ότι όταν $x>0$ και $n\geqslant 1$ τότε*

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

Λύση.

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \Leftrightarrow 1+x \geqslant \sqrt[n]{1+nx}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{1+nx} &= \sqrt[n]{1\cdot 1\cdots 1\cdot(1+nx)}\\ &\leqslant \frac{1+1+\cdots+1+(1+nx)}{n}\\ &= \frac{n-1+(1+nx)}{n} = \frac{n+nx}{n} = 1+x\end{aligned}$$

□