# 6 Ακολουθίες

Έστω $E$ ένα μη κενό σύνολο. Ακολουθία είναι κάθε απεικόνιση $f : \mathbb{N}^* \to E$ και συμβολίζεται ως $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ή πιο απλά ως $(f_n)$. Ειδικά αν $E \subseteq \mathbb{R}$, τότε η ακολουθία ονομάζεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.

**Παρατηρήσεις**

- Η ακολουθίες αποτελούν μια ειδική κατηγορία απεικονίσεων (συναρτήσεων), στις οποίες το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών. Για το λόγο αυτό, η ανεξάρτητη μεταβλητή συνήθως συμβολίζεται με $n$ αντί για $x$. Επιπλέον, η εικόνα του προτύπου $n$ συμβολίζεται συνήθως, χάριν απλότητας, με $f_n$ αντί για $f(n)$, και ονομάζεται $n$-οστός όρος της ακολουθίας.
- Πολλές φορές ως πεδίο ορισμού μιας ακολουθίας ορίζεται το $\mathbb{N}$ αντί για το $\mathbb{N}^*$.

**Αναδρομικός (ή αναγωγικός) τύπος** μιας ακολουθίας $(a_n)$ ονομάζεται ένας τύπος ο οποίος καθορίζει την τιμή του γενικού όρου $a_n$ συναρτήσει ενός ή και περισσότερων προηγούμενων όρων της ακολουθίας. Για παράδειγμα, η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = n!$ μπορεί να οριστεί ισοδύναμα μέσω του αναδρομικού τύπου

$$a_n = na_{n-1},$$

με αρχική συνθήκη $a_1 = 1$. Τονίζεται ότι η αρχική συνθήκη είναι απαραίτητη για τον πλήρη καθορισμό της ακολουθίας, ενώ οποιαδήποτε αλλαγή αυτής αλλάζει τελείως και την ακολουθία που προκύπτει.

**Αριθμητική πρόοδος**: Ονομάζεται κάθε ακολουθία που ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = a_n + \lambda$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Τελικά, προκύπτει ότι $a_n = a_1 + (n-1)\lambda$.

**Γεωμετρική πρόοδος**: Ονομάζεται κάθε ακολουθία που ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = \lambda a_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda \neq 1$. Τελικά, προκύπτει ότι $a_n = a_1\lambda^{n-1}$.

**Βασικά αθροίσματα όρων προόδων**: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda^k = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}, \lambda \neq 1.$

**Άλλα βασικά αθροίσματα**: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$

**Μονοτονία**: Η ακολουθία $(a_n)$ είναι:

- *Αύξουσα*, αν $a_{n+1} - a_n \geq 0$ (ή $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ και $a_n > 0$), για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

  (Γνησίως αύξουσα, αν οι ανισότητες είναι γνήσιες).
- *Φθίνουσα*, αν $a_{n+1} - a_n \leq 0$ (ή $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ και $a_n > 0$), για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

  (Γνησίως φθίνουσα, αν οι ανισότητες είναι γνήσιες).

**Όριο ακολουθίας**: Η ακολουθία $(a_n)$ *συγκλίνει* στο $a \in \mathbb{R}$, οπότε γράφουμε $a_n \to a$ ή $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ή $\lim a_n = a$, αν και μόνο αν

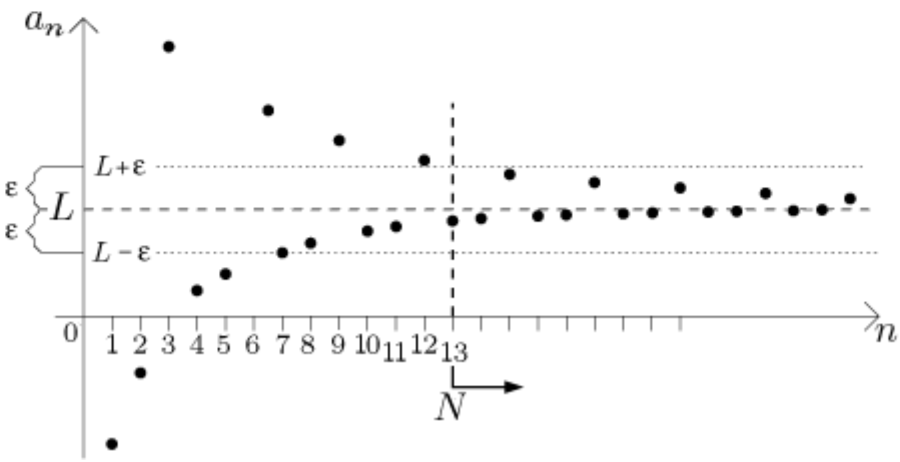
$$\boxed{\text{για κάθε } \varepsilon > 0, \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N}^*, \text{ τέτοιο ώστε, για κάθε } n \geq n_0, \text{ ισχύει } |a_n - a| < \varepsilon.}$$

Η ακολουθία $(a_n)$ *δεν συγκλίνει* στο $a \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν

$$\boxed{\text{υπάρχει } \varepsilon > 0 \text{ τέτοιο ώστε, για κάθε } n_0 \in \mathbb{N}^*, \text{ υπάρχει } n \geq n_0, \text{ τέτοιο ώστε } |a_n - a| \geq \varepsilon.}$$

**Παρατηρήσεις**:

- Μια ακολουθία που συγκλίνει στο 0 ονομάζεται **μηδενική ακολουθία**.
- Ερμηνεύοντας τον ορισμό της σύγκλισης, μια ακολουθία συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν η απόσταση των όρων της από το $a$ (δηλαδή η ποσότητα $|a_n - a|$) γίνεται τελικά (δηλαδή από κάποιο $n_0$ και μετά) οσοδήποτε μικρή (το $\varepsilon$ μπορεί να είναι ένας θετικός αριθμός οσοδήποτε κοντά στο 0).
- Γενικά λέμε ότι μια σχέση ως προς τη μεταβλητή $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει **τελικά**, όταν ισχύει για κάθε $n$ με $n \geq n_0$, όπου $n_0$ είναι ένας σταθερός προκαθορισμένος φυσικός αριθμός.
- Σημειώνεται ότι στην εφαρμογή του παραπάνω ορισμού της σύγκλισης η επιλογή του $n_0$ συνήθως εξαρτάται από την τιμή του $\varepsilon$, για το λόγο αυτό πολλές φορές γράφουμε $n_0 = n_0(\varepsilon)$, τονίζοντας αυτή την εξάρτηση.



**Ιδιότητες ορίου ακολουθίας**: Αν υπάρχουν τα $\lim a_n$, $\lim b_n$, $\lim c_n$ στο $\mathbb{R}$, τότε

- $\lim |a_n| = |\lim a_n|$.
- $\lim (a_n)^k = (\lim a_n)^k$, για κάθε $k \neq 0$.
- $\lim(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim a_n + \mu \lim b_n$.
- $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n$.
- (Κριτήριο παρεμβολής.) Αν $\lim b_n = \lim c_n = a$ και $b_n \leq a_n \leq c_n$, για κάθε $n \geq n_0$, τότε $\lim a_n = a$.

  Ειδική περίπτωση κριτήριου παρεμβολής: Αν $\lim b_n = 0$ και $|a_n| \leq b_n$, για κάθε $n \geq n_0$, τότε $\lim a_n = 0$.

  Εφαρμογές: $\sqrt[n]{2n^3 + 3n^2 + 5}$, $\sqrt[n]{4^n + 3^n}$, $\dfrac{\sin n}{n}$, $\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$.

**Κατ΄ εκδοχή σύγκλιση**: Η ακολουθία $(a_n)$ συγκλίνει στο $+\infty$ αν και μόνο αν

$$\boxed{\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ τέτοιος ώστε } n \geq n_0 \Rightarrow a_n > \varepsilon.}$$

Η ακολουθία $(a_n)$ συγκλίνει στο $-\infty$ αν και μόνο αν

$$\boxed{\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ τέτοιος ώστε } n \geq n_0 \Rightarrow a_n < -\varepsilon.}$$

**Βασικά όρια**:

- $\lim \dfrac{1}{n^p} = 0$, για κάθε $p > 0$.
- $\lim a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$. (Επιπλέον, αν $a < -1$ τότε το όριο δεν υπάρχει.)
- $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, για κάθε $a > 0$.
- $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.
- $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

  (Αποδεικνύεται ότι $\lim \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.)

**Υπακολουθία**: Για κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(k_n)$, η $(a_{k_n})$ ονομάζεται *υπακολουθία* της $(a_n)$. (Δηλαδή η $a_{k_n} = a(k(n))$ είναι η σύνθεση των ακολουθιών $k : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ και $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.) Μια χρήσιμη ιδιότητα της ακολουθίας δεικτών $(k_n)$ είναι η εξής: $k_n \geq n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ (αποδεικνύεται με επαγωγή).

Από τον ορισμό του ορίου προκύπτει ότι $\lim a_n = a \Rightarrow \lim a_{k_n} = a$.

**Σημείο συσσώρευσης**: Το $a \in \mathbb{R}$ είναι *σημείο συσσώρευσης* της $(a_n)$, αν και μόνο αν

$$\boxed{\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ και για κάθε } n \in \mathbb{N}^*, \text{ υπάρχει } m \in \mathbb{N}^*, \text{ με } m \geq n, \text{ τέτοιος ώστε } |a_m - a| < \varepsilon.}$$

Δηλαδή, υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας σε κάθε οσοδήποτε μικρή περιοχή του σημείου συσσώρευσης $a$.

**Πρόταση**. *Ο $a \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης της $(a_n)$, αν και μόνο αν υπάρχει υπακολουθία $(a_{k_n})$ με $\lim a_{k_n} = a$.*

**Φράγμα ακολουθίας**: Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι *φραγμένη* (ισοδύναμα *απολύτως φραγμένη*), αν υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $m \leq a_n \leq M$ (ισοδύναμα, αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $|a_n| \leq m$), για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

- Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.
- Έστω $(a_n)$ μια (τελικά) αύξουσα ακολουθία. Αν είναι άνω φραγμένη, τότε $\lim a_n = \sup a_n$, αλλιώς $\lim a_n = +\infty$. (Εφαρμογές: $a_{n+1} = \sqrt{18 + 7a_n}, a_1 = 1$.)
- Έστω $(a_n)$ μια (τελικά) φθίνουσα ακολουθία. Αν είναι κάτω φραγμένη, τότε $\lim a_n = \inf a_n$, αλλιώς $\lim a_n = -\infty$.
- Αν $(a_n)$ φραγμένη και $(b_n)$ μηδενική, τότε $\lim(a_n b_n) = 0$.
  Εφαρμογές: $\dfrac{\sin n}{n}, \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Αν $(a_n)$ είναι μια φραγμένη ακολουθία, τότε ορίζονται οι ακολουθίες

$$\beta_n = \sup_{m\geq n} a_m = \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} \quad \text{και} \quad \gamma_n = \inf_{m\geq n} a_m = \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}.$$

Άμεσα προκύπτει ότι οι $(\beta_n)$ και $(\gamma_n)$ είναι φραγμένες και μονότονες (η $(\beta_n)$ είναι φθίνουσα, ενώ η $(\gamma_n)$ είναι αύξουσα) και επιπλέον ισχύει ότι $\gamma_n \leq a_n \leq \beta_n$. Επομένως υπάρχουν τα όρια $\lim \beta_n$ και $\lim \gamma_n$, τα οποία συμβολίζονται αντίστοιχα με $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$.

Αν $(a_n)$ είναι μια μη φραγμένη ακολουθία, τότε τα $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$ ορίζονται με τον ίδιο τρόπο, αλλά δεν είναι απαραίτητα πραγματικοί αριθμοί.

**Πρόταση**. *Τα $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$ μιας ακολουθίας $(a_n)$ αποτελούν αντίστοιχα το μέγιστο και το ελάχιστο σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας.*

**Πόρισμα**. *Το όριο μιας ακολουθίας $(a_n)$ υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$ αν και μόνο αν $\limsup a_n = \liminf a_n$. Στην περίπτωση αυτή είναι $\lim a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$.*

**Πρόταση**. *Για κάθε ακολουθία θετικών όρων ισχύει ότι*

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

**Πρόταση** (Bolzano-Weierstrass). *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει σημείο συσσώρευσης.*

**Βασική ακολουθία:** Η ακολουθία $(a_n)$, ονομάζεται *βασική* αν και μόνο αν

$$\boxed{\text{για κάθε } \varepsilon > 0, \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ τέτοιος ώστε, για κάθε } m, n \geq n_0, \text{ ισχύει } |a_n - a_m| < \varepsilon.}$$

**Πρόταση** (Cauchy). *Μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν είναι βασική.*

Η προηγούμενη πρόταση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την απόδειξη της μη σύγκλισης μιας ακολουθίας, ή για την απόδειξη της σύγκλισής της, όταν το όριό της είναι άγνωστο.

**Κριτήρια σύγκλισης:**

- Αν $a_n \neq 0$ και $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda < 1$, τότε $\lim a_n = 0$.

  Εφαρμογές: $\frac{4^n}{n!}$, $\frac{(-1)^n n^3}{2^n}$

- Αν $a_n \neq 0$ και $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$.

  Εφαρμογές: $\sqrt[n]{2n^3 + 3n^2 + 5}$, $\sqrt[n]{4^n + 3^n}$, $\sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}}$.

- (Stoltz) Αν $(A_n)$ μια γνησίως αύξουσα, όχι άνω φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών και $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{A_{n+1} - A_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim \frac{a_n}{A_n} = \ell$.

  Εφαρμογές: $\frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n}$.

# Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 5). *Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι ακολουθίες:*

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \beta_n = \frac{3n+2}{4^n}, \qquad \gamma_n = \frac{(-1)^n}{n^2+5n+2}.$$

*Λύση.* Είναι

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{n+1}{n}\left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Bernoulli: $n \in \mathbb{N}, \theta > -1 \Rightarrow (1+\theta)^n \geq 1 + n\theta$, για $\theta = \dfrac{-1}{(n+1)^2} > -1$, προκύπτει ότι

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \geq \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1} = 1$$

άρα η $(\alpha_n)$ είναι αύξουσα.

Η ακολουθία $(\beta_n)$ είναι γνησίως φθίνουσα, διότι

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{3n+5}{4^{n+1}}\frac{4^n}{3n+2} = \frac{1}{4}\frac{3n+5}{3n+2} \leq \frac{1}{4}\frac{3n+5n}{3n} = \frac{1}{4}\frac{8}{3} = \frac{2}{3} < 1$$

Η ακολουθία $(\gamma_n)$ δεν μπορεί να είναι αύξουσα, ούτε φθίνουσα γιατί κάθε 2 διαδοχικοί όροι έχουν αντίθετο πρόσημο, δηλαδή ισχύει $\gamma_1 < \gamma_2 > \gamma_3 < \gamma_4 > \cdots$. □

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 6). *Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι φραγμένες:*

$$\alpha_n = \frac{2n}{n^2+1}\cos(n+1), \qquad \beta_n = n2^{-n}, \qquad \gamma_n = (-1)^n \frac{n^2 \sin n + 2n}{2n^2+3}.$$

*Λύση.* Θα χρησιμοποιηθούν οι γνωστές ανισότητες

$$|\cos x| \le 1, \qquad |\sin x| \le 1, \qquad \frac{2x}{1+x^2} \le 1, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η τελευταία προκύπτει ως εξής:

$$(x-1)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \ge 0 \Rightarrow 2x \le x^2 + 1 \Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} \le 1.$$

Βάσει των παραπάνω, είναι

$$|\alpha_n| = \frac{2n}{n^2+1}|\cos(n+1)| \le \frac{2n}{n^2+1} \le 1$$

και

$$|\gamma_n| = \frac{|n^2 \sin n + 2n|}{2n^2+3} \le \frac{n^2|\sin n| + 2n}{2n^2+3} \le \frac{n^2+2n}{2n^2+3} \le \frac{n^2+2n^2}{2n^2} = \frac{3}{2},$$

άρα οι $(\alpha_n)$, $(\gamma_n)$ είναι φραγμένες.

Για την $(\beta_n)$ είναι

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} \le \frac{n+n}{2n} = 1,$$

άρα η $(\beta_n)$ είναι φθίνουσα, οπότε $0 < b_n \le b_1 = 1/2$, δηλαδή είναι φραγμένη.

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα (αλλά με μεγαλύτερο άνω φράγμα) ως εξής:

$$|\beta_n| = \frac{n}{2^n} \le \frac{n}{(1+1/2)^n} \le \frac{n}{1+n/2} \le \frac{n}{n/2} = 2.$$

□

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 9). *Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό.*

*Απόδειξη.* Έστω ακολουθία $(a_n)$, με $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Αν η $(a_n)$ συγκλίνει και σε κάποιον άλλον αριθμό $b \neq a$, τότε εφαρμόζοντας δύο φορές τον ορισμό της σύγκλισης, προκύπτει ότι για $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2} > 0$, υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, τέτοια ώστε

$$n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{και} \qquad n \geq n_2 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon.$$

Επιλέγοντας $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, οι δύο παραπάνω ανισότητες ισχύουν για $n \geq n_0$. Επομένως, για $n \geq n_0$, έχουμε

$$|a-b| = |a_n - b - (a_n - a)| \leq |a_n - b| + |a_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = |a-b|,$$

δηλαδή $|a-b| < |a-b|$, το οποίο είναι άτοπο. □

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 11.1). *Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει στο ίδιο όριο με την ακολουθία αυτή.*

*Απόδειξη.* Έστω ακολουθία $(a_n)$, με $\lim a_n = a$. Βάσει του ορισμού της σύγκλισης, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.

Αν $(a_{k_n})$ είναι μια υπακολουθία της $(a_n)$, τότε η $(k_n)$ είναι εξ ορισμού μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, οπότε είναι $k_n \geq n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Επομένως,

$$n \geq n_0 \Rightarrow k_n \geq k_{n_0} \geq n_0 \Rightarrow |a_{k_n} - a| < \varepsilon,$$

δηλαδή η $(a_{k_n})$ ικανοποιεί τον ορισμό της σύγκλισης, οπότε $\lim a_{k_n} = a$. □

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 11.2). *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

*Απόδειξη.* Έστω ακολουθία $(a_n)$, με $\lim a_n = a$. Τότε, για $\varepsilon = 1$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε $|a_n - a| < 1$, για κάθε $n \geq n_0$. Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

προκύπτει ότι

$$|a_n| - |a| \leq ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < 1,$$

άρα $|a_n| < 1 + |a|$, για κάθε $n \geq n_0$. Αν ληφθεί

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\}$$

(το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένο, άρα έχει μέγιστο), τότε είναι $|a_n| \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, δηλαδή η $(a_n)$ είναι φραγμένη. □

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 12). *Να βρεθούν τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:*

$$\alpha_n = \frac{8n^3 + 4n^2 - 5n + 7}{4n^3 + 10n^2 - 6n + 3}, \qquad \beta_n = \frac{3n^3 + 5n^2 + 6n - 2}{2n^4 + 3n^3 - 6n^2 + 11}, \qquad \gamma_n = \frac{2n^3 + 4n^2 - 7n + 3}{n^2 - 5n + 12}.$$

*Λύση.* Έχουμε ρητές παραστάσεις ως προς τη μεταβλητή $n$, οπότε σε κάθε περίπτωση διαιρούμε με τον μεγιστοβάθμιο όρο του παρονομαστή.

$$\lim \alpha_n \overset{/n^3}{=} \lim \frac{8 + 4/n - 5/n^2 + 7/n^3}{4 + 10/n - 6/n^2 + 3/n^3} = \frac{8 + \lim(4/n) - \lim(5/n^2) + \lim(7/n^3)}{4 + \lim(10/n) - \lim(6/n^2) + \lim(3/n^3)} = \frac{8}{4}$$

$$\lim \beta_n \overset{/n^4}{=} \lim \frac{3/n + 5/n^2 + 6/n^3 - 2/n^4}{2 + 3/n - 6/n^2 + 11/n^4} = \frac{\lim(3/n) + \lim(5/n^2) + \lim(6/n^3) - \lim(2/n^4)}{2 + \lim(3/n) - \lim(6/n^2) + \lim(11/n^4)} = 0$$

$$\lim \gamma_n \overset{/n^2}{=} \frac{2n + 4 - 7/n + 3/n^2}{1 - 5/n + 12/n^2} = \frac{2\lim n + 4 - \lim(7/n) + \lim(3/n^2)}{1 - \lim(5/n) + \lim(12/n^2)} = +\infty$$

□

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 17). *Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία* $(a_n)$, *με*

$$a_1 = 1 \qquad \text{και} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{5}{2a_n}, \quad \text{για } n \in \mathbb{N}^*,$$

*συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.*

*Λύση.* Αν υπάρχει το όριο της ακολουθίας, δηλαδή αν $\lim a_n = x \in \mathbb{R}$, τότε θα είναι

$$x = \lim a_{n+1} = \lim \frac{a_n^2 + 5}{2a_n} = \frac{x^2 + 5}{2x}$$

δηλαδή θα πρέπει να είναι $x^2 = 5$, οπότε $x = \sqrt{5}$ (η αρνητική ρίζα απορρίπτεται διότι $a_n > 0$).

Παρατηρούμε ότι $a_1 = 1 < a_2 = 3 > a_3 = 14/6 > \cdots$. Εικάζουμε λοιπόν ότι, για $n \geq 2$, η $(a_n)$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το $x = \sqrt{5}$, και στη συνέχεια το αποδεικνύουμε. Πράγματι,

$$a_{n+1} - x = \frac{a_n^2 + 5}{2a_n} - x = \frac{a_n^2 + x^2 - 2xa_n}{2a_n} = \frac{(a_n - x)^2}{2a_n} \geq 0, \qquad n \geq 1,$$

άρα η $(a_{n+1})$ είναι κάτω φραγμένη (από το $x$), καθώς επίσης και

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 5}{2a_n} - a_n = \frac{a_n^2 + x^2 - 2a_n^2}{2a_n} = -\frac{a_n^2 - x^2}{2a_n} = -\frac{(a_n - x)(a_n + x)}{2a_n} \leq 0, \quad n \geq 2,$$

άρα η $(a_{n+1})$ είναι φθίνουσα.

Κατόπιν τούτων, η $(a_{n+1})$ είναι συγκλίνουσα, οπότε το όριό της είναι αναγκαστικά το $x = \sqrt{5}$, σύμφωνα με τα προηγούμενα, δηλαδή $\lim a_n = \lim a_{n+1} = \sqrt{5}$. □

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 18). *Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία* $(a_n)$, *με*

$$a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}, \quad \textit{πλήθος ριζικών } n, \quad a > 0,$$

*συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.*

*Λύση.* Ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι ο εξής:

$$a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}, \qquad a_1 = \sqrt{a}.$$

Η ακολουθία προφανώς αποτελείται από θετικούς όρους. Αν υπάρχει το όριο, δηλαδή αν $\lim a_n = x \in \mathbb{R}$, τότε θα πρέπει να είναι

$$x = \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{a + a_n} = \sqrt{a + \lim a_n} = \sqrt{a + x}.$$

Επομένως,

$$x^2 - x - a = 0,$$

οπότε $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ (Η αρνητική ρίζα $\overline{x} = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$ απορρίπτεται διότι $a_n > 0$).

Παρατηρούμε ότι $a_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a + \sqrt{a}} < \cdots$, οπότε εικάζουμε ότι η $(a_n)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το $x$ και στη συνέχεια το αποδεικνύουμε με επαγωγή.

Προφανώς, $a_1 < x$. Έστω ότι η σχέση $a_n < x$ ισχύει για κάποιο $n \geq 1$. Τότε,

$$x - a_{n+1} = x - \sqrt{a + a_n} = \frac{x^2 - a - a_n}{x + \sqrt{a + a_n}} = \frac{x - a_n}{x + \sqrt{a + a_n}} > 0.$$

Επομένως ισχύει $a_n < x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η $(a_n)$ είναι άνω φραγμένη.

Επιπλέον,

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a + a_n} - a_n = \frac{a + a_n - a_n^2}{\sqrt{a + a_n} + a_n} = \frac{-(a_n - x)(a_n - \overline{x})}{\sqrt{a + a_n} + a_n} > 0$$

άρα η $(a_n)$ είναι και (γνησίως) αύξουσα.

Για την τελευταία ισότητα, υπενθυμίζεται ότι η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, όταν $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, έχει 2 πραγματικές ρίζες, τις $\rho_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, και τότε ισχύει ότι

$$ax^2 + bx + c = a(x - \rho_1)(x - \rho_2).$$

Επομένως, η παράσταση $a + a_n - a_n^2$ του αριθμητή παραγοντοποιείται ως

$$a + a_n - a_n^2 = -(a_n^2 - a_n - 2) = -(a_n - x)(a_n - \overline{x}).$$

Κατόπιν τούτων, η ακολουθία είναι συγκλίνουσα, οπότε $\lim a_n = x$. □

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 21). *Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:*

$$\alpha_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2+1}, \qquad \beta_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

*Λύση.* Για την ακολουθία $(\alpha_n)$, παρατηρούμε ότι ο αριθμητής είναι μια φραγμένη παράσταση, ενώ ο παρονομαστής τείνει στο $+\infty$. Επομένως, εκτιμάμε ότι το όριό της θα είναι το 0 και θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της παρεμβολής για να το αποδείξουμε. Πράγματι, είναι

$$|\alpha_n| = \frac{|\sin\frac{n\pi}{2}|}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \to 0,$$

επομένως, $\alpha_n \to 0$.

Για την $(\beta_n)$, με ανάλυση σε απλά κλάσματα, βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}, \qquad \text{όπου } A = 1/2 = -B.$$

Κατόπιν τούτου, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\beta_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1/2}{2k-1} - \frac{1/2}{2k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1/2}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1/2}{2k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1/2}{2k-1} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1/2}{2k-1} = \frac{1}{2} - \frac{1/2}{2n+1} \to \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 26). *Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας:*

$$\alpha_n = \frac{9\alpha^n - 5\beta^{n+1}}{3\alpha^n + \beta^n}, \qquad \alpha, \beta \neq 0.$$

*Λύση.* Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $|\alpha| < |\beta|$, τότε $\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = 0$, οπότε

$$\alpha_n = \frac{9(\alpha/\beta)^n - 5\beta}{3(\alpha/\beta)^n + 1} \to -5\beta.$$

Αν $|\alpha| > |\beta|$, τότε $\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$, οπότε

$$\alpha_n = \frac{9 - 5\beta(\beta/\alpha)^n}{3 + (\beta/\alpha)^n} \to 3.$$

Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha_n = \dfrac{9-5\beta}{4}$.

Αν $\alpha = -\beta$, τότε $\alpha_n = \dfrac{9-5\beta(-1)^n}{3+(-1)^n}$ και το όριο δεν υπάρχει. □

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 30). *Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:*

$$\alpha_n = \sqrt[n]{4n^3 + 3n^2 + 5n + 3}, \qquad \beta_n = \sqrt[n]{4^n + 7^n}.$$

*Λύση.* Θα χρησιμοποιήσουμε τα γνωστά όρια $\lim \sqrt[n]{n} = \lim \sqrt[n]{a} = 1$, όπου $a > 0$, καθώς επίσης και το κριτήριο παρεμβολής. Είναι

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{3} \le \alpha_n = \sqrt[n]{4n^3 + 3n^2 + 5n + 3} \le \sqrt[n]{4n^3 + 3n^3 + 5n^3 + 3n^3} = \sqrt[n]{15n^3} = \sqrt[n]{15}(\sqrt[n]{n})^3 \to 1,$$

άρα $\lim \alpha_n = 1$.

Ομοίως,

$$7 = \sqrt[n]{7^n} \le \beta_n = \sqrt[n]{4^n + 7^n} \le \sqrt[n]{7^n + 7^n} = 7\sqrt[n]{2} \to 7,$$

άρα $\lim \beta_n = 7$. □

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 34). *Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:*

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \beta_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n, \qquad \gamma_n = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^n.$$

*Λύση.* Θα χρησιμοποιηθεί το βασικό όριο $\lim e_n = e$, όπου $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

$$\alpha_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1-n} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{e_{n-1}} \frac{n-1}{n} \to \frac{1}{e}$$

$$\begin{aligned}
\beta_n = \left(\frac{n-3}{n}\right)^n &= \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^n \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\
&= \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^{n-2} \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^2 \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-1} \left(\frac{n-2}{n-1}\right) \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\
&= \alpha_{n-2} \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^2 \alpha_{n-1} \left(\frac{n-2}{n-1}\right) \alpha_n \to e^{-1} \cdot 1 \cdot e^{-1} \cdot 1 \cdot e^{-1} = e^{-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_n = \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^n &= \left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^n \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^n = \sqrt[3]{\left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^{3n} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{3n}} \\
&= \sqrt[3]{\left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^{3n-1} \frac{3n-2}{3n-1} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{3n}} = \sqrt[3]{\alpha_{3n-1} \frac{3n-2}{3n-1} \alpha_{3n}} \to \sqrt[3]{e^{-1} \cdot 1 \cdot e^{-1}} = e^{-2/3}.
\end{aligned}$$

□

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 41). *Να βρεθούν τα σημεία συσσώρευσης της ακολουθίας:*

$$\alpha_n = \begin{cases} \sqrt[n]{n}, & n = 3k, k \in \mathbb{N}^*, \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, & n = 3k+1, k \in \mathbb{N}, \\ \frac{n+1}{2n}, & n = 3k+2, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

*και στη συνέχεια να βρεθούν τα* $\limsup a_n$ *και* $\liminf a_n$.

*Λύση.* Επειδή κάθε υπακολουθία μιας ακολουθίας έχει το ίδιο όριο με την ακολουθία αυτή, έπεται ότι

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[3k]{3k} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3k+1}\right)^{3k+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{3k+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k+3}{2(3k+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Τέλος, αφού δεν υπάρχουν άλλα σημεία συσσωρεύσεως, διότι οι 3 αυτές υπακολουθίες διαμερίζουν την $(a_n)$, έπεται ότι

$$\limsup a_n = \max\{1, e, 1/2\} = e \qquad \text{και} \qquad \liminf a_n = \min\{1, e, 1/2\} = 1/2.$$

□

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 47). *Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:*

$$\alpha_n = \frac{4^n}{n!}, \qquad \beta_n = (-1)^n \frac{n^3}{2^n}, \qquad \gamma_n = \frac{n!}{n^n}.$$

*Λύση.* Θα χρησιμοποιηθεί το κριτήριο μηδενικής ακολουθίας: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \lambda < 1 \Rightarrow a_n \to 0$.

Είναι

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \frac{4^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{4^n} = \frac{4}{n+1} \to 0 < 1,$$

επομένως $\alpha_n \to 0$.

$$\left|\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right| = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{2} < 1,$$

επομένως $\beta_n \to 0$.

$$\left|\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1,$$

επομένως $\gamma_n \to 0$.

□

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 48). *Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:*

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}}, \qquad b_n = \sqrt[n]{\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}}.$$

*Λύση.* Θα χρησιμοποιηθεί το κριτήριο της ρίζας: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \lambda \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \to \lambda$.

Θέτουμε $c_n = \frac{(n+1)^n}{n!}$. Είναι

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{(n+1)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \to e,$$

οπότε $a_n = \sqrt[n]{c_n} \to e$.

Θέτουμε $d_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}$. Είναι

$$\left|\frac{d_{n+1}}{d_n}\right| = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)(3n+2)}\cdot\frac{2\cdot 5\cdots(3n-1)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)} = \frac{2n+1}{3n+2} \to \frac{2}{3}$$

οπότε $b_n = \sqrt[n]{d_n} \to 2/3$. □

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 50). *Αν $(x_n)$ είναι μια ακολουθία θετικών αριθμών η οποία συγκλίνει στο $x$, να αποδειχθεί ότι*

$$\lim \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = x.$$

*Λύση.* Θέτουμε $a_n = x_1x_2\cdots x_n > 0$. Είναι

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x_1x_2\cdots x_nx_{n+1}}{x_1x_2\cdots x_n} = x_{n+1} \to x,$$

επομένως $\lim \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = x$. □

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 52). *Να αποδειχθεί ότι*

$$\lim \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

*Λύση.* Θα χρησιμοποιηθεί η πρόταση Stolz:

Αν $(b_n)$ γνησίως αύξουσα, θετική και όχι άνω φραγμένη, τότε

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = x \Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = x.$$

Θέτοντας $a_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}$ και $b_n = n$, έχουμε ότι

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{n+1-n} = \sqrt[n+1]{n+1} \to 1,$$

επομένως $a_n/b_n \to 1$. □

**Άσκηση** (Λυμένη άσκηση 53). *Να αποδειχθεί ότι*

$$\lim \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n}{n^n} = 1.$$

*Λύση.* Θα χρησιμοποιηθεί η πρόταση Stolz.

Θέτοντας $a_n = 1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$ και $b_n = n^n$, έχουμε ότι

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1} - n^n} = \frac{1}{1 - \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}} \to 1,$$

διότι

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 0 \cdot \frac{1}{e} = 0,$$

επομένως $a_n/b_n \to 1$. □

**Άσκηση** (Άλυτη άσκηση 36). *Να υπολογισθούν τα όρια των ακολουθιών:*

$$\alpha_n = \left(\frac{4n+3}{4n}\right)^n, \qquad \beta_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}, \qquad \gamma_n = \left(3+\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^{2n}.$$

**Άσκηση** (Άλυτη άσκηση 53). *Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας* $(a_n)$, *με*

$$a_1 = 1 \qquad \textit{και} \qquad a_{n+1} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} a_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

**Άσκηση** (Άλυτη άσκηση 54). *Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία* $(a_n)$, *με*

$$a_n = \frac{1}{1+x^{n+1}} + \frac{1}{x+x^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{x^n+x^{n+1}}, \quad x > 1,$$

*είναι μηδενική.*

**Άσκηση** (Άλυτη άσκηση 59). *Να υπολογισθούν τα όρια των ακολουθιών:*

$$\alpha_n = \sqrt[n]{x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n + 1}, \quad x > 0, \qquad \beta_n = \sqrt{n+3} - 2\sqrt{n+4} + \sqrt{n+5}.$$