

7 Σειρές ακολουθιών

Για κάθε ακολουθία (a_n) ορίζεται η ακολουθία μερικών αθροισμάτων (s_n) με

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{ή αναδρομικά} \quad s_n = s_{n-1} + a_n, s_1 = a_1.$$

Ορισμός. Σειρά της ακολουθίας (a_n) ονομάζεται το άθροισμα $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim s_n$.

Αν $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$, λέμε ότι η σειρά συγκλίνει (στο s), αλλιώς η σειρά αποκλίνει. Αν $\lim s_n = +\infty$ (αντ. $-\infty$), τότε λέμε ότι η σειρά απειρίζεται θετικά (αντ. αρνητικά).

Βασικές σειρές:

- **Γεωμετρική σειρά:** $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & |x| < 1 \\ +\infty, & x > 1. \end{cases}$ (Αν $x < -1$, το όριο δεν υπάρχει.)

Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{5^n}.$

- **Εκθετική σειρά:** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n!}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}.$

- **Αρμονική σειρά p -τάξης:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$, αν $p \leq 1$, αλλιώς συγκλίνει.

Εφαρμογές: Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$, όπου $p(n), q(n)$ πολυώνυμα βαθμού k και λ αντίστοιχα, συγκλίνει αν και μόνο αν $\lambda - k > 1$.

- **Τηλεσκοπική σειρά:** Σειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$. Ο υπολογισμός μιας τέτοιας σειράς γίνεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα, π.χ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Ιδιότητες σειρών:

- Αν $\lim a_n \neq 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.

- (Γραμμικότητα) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} (ka_n + lb_n) = ka + lb$.

- (Συνέλιξη σειρών) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}$.

Σύγκριση σειρών (με θετικούς όρους):

- **Κριτήριο σύγκρισης I:** Αν ισχύουν τελικά οι ανισότητες $0 \leq a_n \leq b_n$, τότε

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty.$$

$$ii) \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin^2 n}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{3^n + n}$.

- **Κριτήριο σύγκρισης II:** Αν ισχύουν τελικά οι ανισότητες $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ και $\lim \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε:

i) Αν $\ell \neq 0, +\infty$, οι σειρές είναι της αυτής φύσης.

$$ii) \text{ Αν } \ell = 0, \text{ τότε } \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

$$iii) \text{ Αν } \ell = +\infty, \text{ τότε } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg\left(\frac{1}{2n+1}\right)$, σύγκλιση τηλεσκοπικής σειράς.

Κριτήρια σύγκλισης σειρών:

1. **Κριτήριο συμπίκνωσης Cauchy:** Αν (a_n) φθίνουσα και $a_n \geq 0$, τότε

$$n \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ συγκλίνει αν και μόνο αν } n \sum_{n=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ συγκλίνει.}$$

Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, σύγκλιση της αρμονικής p -σειράς.

2. **Leibniz:** Αν (a_n) φθίνουσα με $a_n \geq 0$ και $\lim a_n = 0$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = S \in \mathbb{R}$, με

$$\left| \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_i - S \right| \leq a_{n+1}.$$

Το μερικό άθροισμα $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_i$ αποτελεί προσέγγιση της τιμής S του αθροίσματος της σειράς, ενώ η απόλυτη διαφορά είναι το σφάλμα της προσέγγισης. Έτσι, αν για παράδειγμα ζητείται προσέγγιση με σφάλμα μικρότερο του 0.001, τότε επιλέγεται n τέτοιο ώστε $a_{n+1} < 0.001$.

3. **Απόλυτη σύγκλιση:** Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και λέμε ότι

συγκλίνει απολύτως. Επιπλέον, τότε ισχύει ότι $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Μια σειρά που συγκλίνει αλλά όχι απολύτως, λέμε ότι συγκλίνει υπό συνθήκη.

4. **Cauchy:** Έστω $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$. Αν $\ell < 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Αν $\ell > 1$, τότε

η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.

Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^n$.

5. **D' Alembert:** Έστω $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$. Αν $\ell < 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Αν $\ell > 1$,

τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.

Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{4n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n - 7}{5^n}$.

6. **Raabe:** Έστω $\lim n \left(1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) = \ell$. Αν $\ell > 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Αν $\ell < 1$,

τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$.

Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}$.

7. **Λογαριθμικό κριτήριο:** Έστω $\lim \frac{\ln |a_n|}{\ln(1/n)} = \ell$. Αν $\ell > 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

Αν $\ell < 1$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$.

Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n + 1)^{\ln a}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}(n+1)}{\sqrt{n^2+4}(n^2+3)}$.

8. **Abel:** Αν $\sum_{k=1}^n a_k$ φραγμένη και (b_n) φθίνουσα και μηδενική, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 5n}{n}$.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 3

Άσκηση (Άλυτες ασκήσεις 1-2). Να ευρεθούν τα αθροίσματα των σειρών:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2(n+2)^2}, \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right).$$

Λύση. (Τηλεσκοπικές σειρές.)

i) Θέτουμε $a_n = \frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$ και $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Παρατηρούμε ότι $(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 = n^2 + 4(n+1)$, οπότε $4(n+1) = (n+2)^2 - n^2$ και

$$\begin{aligned} 4s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{4(k+1)}{k^2(k+2)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{(k+2)^2 - k^2}{k^2(k+2)^2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+2)^2} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+2)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \rightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n = \frac{5}{16}$.

ii) Θέτουμε $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ και $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ και εφαρμόζουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{(n+1)(n+2)A + n(n+2)B + n(n+1)C}{n(n+1)(n+2)} \\ \Leftrightarrow 1 &= (n+1)(n+2)A + n(n+2)B + n(n+1)C \end{aligned}$$

Θέτοντας $n = 0, -1, -2$, βρίσκουμε αντίστοιχα ότι $A = 1/2, B = -1, C = 1/2$, οπότε

$$2s_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n = \frac{1}{4}$.

iii) Θέτουμε $a_n = \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)$ και $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, οπότε

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \left(\ln \frac{k+1}{k} + \ln \frac{k+1}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} - \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+2}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \ln \frac{k+1}{k} = \ln 2 - \ln \frac{n+2}{n+1} \rightarrow \ln 2 \end{aligned}$$

Επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n = \ln 2$. □

Άσκηση (Άλυτες ασκήσεις 10-11). Να ευρεθούν τα αθροίσματα των σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+2)},$$

Λύση. Υπενθυμίζονται οι τύποι της γεωμετρικής και της εκθετικής σειράς:

$$k \in \mathbb{N}, |x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} x^n = x^k + x^{k+1} + \dots = \frac{x^k}{1-x}, \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = e^x$$

Βάσει αυτών έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} = \frac{2/4}{1-2/4} + \frac{3/4}{1-3/4} = \frac{2}{2} + \frac{3}{4-3} = 1 + 3 = 4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} + e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + e = 2e$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-2)(n-1)}{n!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{n!} - 3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n!} + 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= 2e - 1 - 2 - 3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} + 2(e - 1 - 1 - 1/2) \\ &= 2e - 3 - 3(e - 2) + 2e - 5 = e - 2 \end{aligned}$$

(Απάντηση.)

□

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 13). Να γραφούν σε ρητή μορφή οι αριθμοί:

$$1.1\overline{43}, \quad 2.3\overline{9}.$$

Λύση.

$$1.1\overline{43} = \frac{11.4\overline{3}}{10} = \frac{11}{10} + \frac{43}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100^n} = \frac{11}{10} + \frac{43}{10} \frac{1/100}{1-1/100} = \frac{11}{10} + \frac{43}{10} \frac{1}{99} = \frac{11 \cdot 99 + 43}{10 \cdot 99} = \frac{1132}{990}$$

$$2.3\overline{9} = \frac{23.\overline{9}}{10} = \frac{23}{10} + \frac{9}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{23}{10} + \frac{9}{10} \frac{1/10}{1-1/10} = \frac{23}{10} + \frac{9}{10} \frac{1}{9} = \frac{24}{10}$$

□

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 17). Να υπολογισθεί μια προσέγγιση για το άθροισμα

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

με σφάλμα μικρότερο του 0.001.

Λύση. (Πρόταση Leibniz) Θέτουμε $a_n = \frac{1}{(2n)!}$ και $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$, με $\lim s_n = S$ το ζητούμενο άθροισμα. Επειδή η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα και μηδενική, εφαρμόζοντας την πρόταση Leibniz, προκύπτει ότι

$$|s_n - S| \leq a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)!}$$

Επομένως, προκειμένου να είναι $|s_n - S| < 0.001$ αρκεί να επιλεξουμε n τέτοιο ώστε

$$a_{n+1} < 0.001 \Leftrightarrow \frac{1}{(2n+2)!} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow (2n+2)! > 1000 \Leftrightarrow 2n+2 > 6 \Leftrightarrow n > 2$$

Οπότε, για $n = 3$, η ζητούμενη προσέγγιση είναι $S \simeq s_3 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}$. □

Άσκηση (Αλυτη άσκηση 25). Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^{3/2} - 3n + 5}{2n^2 + 3n^{5/3} + 4n - 3}, \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}, \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n - 2n}.$$

Λύση. (1ο-2ο κριτήριο σύγκρισης)

i) Θέτουμε $a_n = \frac{4n^{3/2} - 3n + 5}{2n^2 + 3n^{5/3} + 4n - 3}$. Η ακολουθία είναι θετικών όρων (τελικά). Συγκρίνοντας τους εκθέτες των μεγιστοβάθμιων όρων αριθμητή και παρονομαστή, παρατηρούμε ότι $p = 2 - 3/2 = 1/2 \leq 1$, οπότε αναμένουμε η σειρά να απειριζέται, οπότε προσπαθούμε να φράξουμε τον a_n από μια μικρότερη παράσταση του n , που ξέρουμε ότι η σειρά της απειριζέται.

$$a_n = \frac{4n^{3/2} - 3n + 5}{2n^2 + 3n^{5/3} + 4n - 3} \geq \frac{4n^{3/2} - 3n^{3/2}}{2n^2 + 3n^2 + 4n^2} = \frac{n^{3/2}}{9n^2} = \frac{1}{9n^{1/2}}$$

Ως γνωστό είναι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$ άρα και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, βάσει του 1ου κριτηρίου σύγκρισης.

(Εναλλακτικά, μπορεί να γίνει σύγκριση με την ακολουθία $b_n = \frac{1}{n^p}$, οπότε $\lim \frac{a_n}{b_n} = 2$, και χρησιμοποιηθεί το 2ο κριτήριο σύγκρισης.)

ii) Θέτουμε $a_n = n \operatorname{tg}(1/n^2)$, και συγκρίνουμε με την $b_n = 1/n$.

$$\lim \frac{n \operatorname{tg}(1/n^2)}{1/n} = \lim \frac{\sin(1/n^2)}{1/n^2} \lim \frac{1}{\cos(1/n^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim \frac{1}{\cos(1/n^2)} = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

Επομένως, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

iii) Θέτουμε $a_n = \frac{1}{4^n - 2n}$ και συγκρίνουμε με την $b_n = \frac{1}{4^n}$.

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{4^n}{4^n - 2n} = \lim \frac{1}{1 - 2n/4^n} = 1,$$

διότι $c_n = n/4^n \rightarrow 0$. Πράγματι, $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{n+1}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n} = \frac{n+1}{4n} \rightarrow \frac{1}{4} < 1$. Επομένως, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n - 2n} < +\infty$. \square

Παρατήρηση: Η λύση του iii) μέσω του 1ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι πιο δύσκολη. Θα δείξουμε ότι ο όρος $2n$ είναι αμελητέος σε σχέση με τον 4^n , φράσσοντας τελικά την ποσότητα $4^n - 2n$ από π.χ. το 4^{n-1} .

$$4^n - 2n \geq 4^{n-1} \Leftrightarrow 1 - \frac{2n}{4^n} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{2n}{4^n} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{n}{4^n} \leq \frac{3}{8}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει τελικά, δηλαδή από κάποιο n_0 και μετά, αφού $\frac{n}{4^n} \rightarrow 0$.

Επομένως $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{4^n - 2n} \leq \frac{1}{4^{n-1}}$, οπότε, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n - 2n} < +\infty.$$

Άσκηση (Αλυτη άσκηση 26). Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όταν

$$i) a_n = \frac{\ln n}{n^{4/3}}, \quad ii) a_n = \frac{\ln n}{n^{3/4}}, \quad iii) a_n = \arctg\left(\frac{n+1}{n^3+n+1}\right).$$

Λύση. (2ο κριτήριο σύγκρισης.)

i) Επειδή $4/3 > 1$, αναμένουμε ότι η εν λόγω σειρά θα συγκλίνει. Επιλέγουμε p , με $1 < p < 4/3$ (π.χ. $p = 5/4$) και συγκρίνουμε με την $b_n = \frac{1}{n^p}$.

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\ln n}{n^{4/3-p}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{4/3-p}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{(4/3-p)x^{4/3-p-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(4/3-p)x^{4/3-p}} = 0$$

οπότε, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

ii) Επειδή $3/4 < 1$, αναμένουμε ότι η εν λόγω σειρά θα απειρίζεται. Επιλέγουμε p , με $3/4 < p < 1$ (π.χ. $p = 4/5$) και συγκρίνουμε με την $b_n = \frac{1}{n^p}$.

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim n^{p-3/4} \ln n = +\infty$$

οπότε, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

ii) Επειδή για την παράσταση $c_n = \frac{n+1}{n^3+n+1}$ είναι βαθμός παρονομαστή - βαθμός αριθμητή = 2, συγκρίνουμε με την $b_n = \frac{1}{n^2}$.

$$\begin{aligned} \lim \frac{a_n}{b_n} &= \lim \frac{\arctg(c_n)}{c_n} \cdot \frac{c_n}{b_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} \cdot \lim \frac{c_n}{b_n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctg x)'}{x'} \cdot \lim \frac{c_n}{b_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} \cdot \lim \frac{n^2(n+1)}{n^3+n+1} = 1 \end{aligned}$$

Επομένως, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. \square

Παρατήρηση: Για την απόδειξη του i), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το 1ο κριτήριο σύγκρισης ως εξής: Έστω σταθερά $c > 0$ της οποίας την τιμή θα υπολογίσουμε εκ των υστέρων. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $x > 0 \Rightarrow \ln x \leq x - 1 < x$, έχουμε ότι

$$\frac{\ln n}{n^{4/3}} = \frac{\ln(n^c)^{1/c}}{n^{4/3}} = \frac{\ln(n^c)}{cn^{4/3}} < \frac{n^c}{cn^{4/3}} = \frac{1}{cn^{4/3-c}}$$

Αρκεί λοιπόν να επιλέξουμε $4/3 - c > 1 \Leftrightarrow c < 4/3 - 1 = 1/3$ και να θέσουμε $b_n = \frac{1}{n^{4/3-c}}$.

Τότε, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, επομένως θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Άσκηση (Αλυτη άσκηση 29). Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όταν

$$i) a_n = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{n^2}, \quad ii) a_n = \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{n^2 + 1}\right)^n, \quad iii) a_n = (-1)^n \frac{100^n}{n^n}.$$

Λύση. (Κριτήριο Cauchy.)

i) Είναι

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \left(1 - \frac{2}{3n}\right) = e^{-2/3} < 1$$

άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως.

ii) Είναι

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \operatorname{arctg} \frac{n}{n^2 + 1} = \operatorname{arctg} 0 = 0 < 1$$

άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως.

iii) Είναι

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{100}{n} = 0 < 1$$

άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως. □

Άσκηση (Αλυτη άσκηση 30). Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όταν

$$a_n = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}, & n = 3k, k \in \mathbb{N}^*, \\ 2^n, & n = 3k + 1, k \in \mathbb{N}, \\ n^2 + 1, & n = 3k + 2, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Λύση. (Κριτήριο Cauchy.)

Έστω $b_n = \sqrt[n]{|a_n|}$. Είναι

$$\lim b_{3n} = \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{e},$$

$$\lim b_{3n+1} = \lim \sqrt[n]{2^n} = 2,$$

$$\lim b_{3n+2} = \lim \sqrt[n]{n^2 + 1} = 1.$$

Επομένως, $\limsup b_n = \max\{1/e, 2, 1\} = 2 > 1$ και άρα η σειρά δεν συγκλίνει. □

Άσκηση (Αλυτη άσκηση 32). Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \frac{x^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Λύση. (Κριτήριο D' Alembert.)

Θέτοντας $a_n = n(n+1) \frac{x^n}{n!}$, έχουμε ότι

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{(n+1)(n+2)|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n(n+1)|x|^n} = |x| \lim \frac{(n+2)}{(n+1)n} = 0 < 1,$$

άρα η πρώτη σειρά συγκλίνει απολύτως.

Θέτοντας $b_n = \frac{x^n}{n(n+1)}$, έχουμε ότι

$$\lim \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \frac{n(n+1)}{|x|^n} = |x| \lim \frac{n}{n+2} = |x|.$$

άρα η δεύτερη σειρά συγκλίνει απολύτως όταν $|x| < 1$ και δεν συγκλίνει όταν $|x| > 1$. Η περίπτωση όπου $|x| = 1$ αντιμετωπίζεται ξεχωριστά. Στην περίπτωση αυτή, η σειρά συγκλίνει απολύτως ως τηλεσκοπική σειρά. \square

Άσκηση (Αλυτη άσκηση 33). Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όταν

$$i) a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)}{n!}, \quad ii) a_n = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}, \quad iii) a_n = \frac{n^{100}}{2^n}.$$

Λύση. (Κριτήριο D' Alembert.)

i)

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+2)}{(n+1)!} \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)} = \lim \frac{2n+2}{n+1} = 2 > 1$$

άρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

ii)

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!} \frac{(3n)!}{n!(2n)!} = \lim \frac{(n+1)(2n+1)(2n+2)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{4}{27} < 1$$

άρα η εν λόγω σειρά συγκλίνει απολύτως.

iii)

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^{100}} = \frac{1}{2} \lim \left(\frac{n+1}{n} \right)^{100} = \frac{1}{2} < 1$$

άρα η εν λόγω σειρά συγκλίνει απολύτως. \square

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 35). Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{7 \cdot 11 \cdots (4n+3)} 2^n.$$

Λύση. (Κριτήριο Raabe.) Θέτοντας $a_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{7 \cdot 11 \cdots (4n+3)} 2^n$, έχουμε ότι

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+2)}{7 \cdot 11 \cdots (4n+3)(4n+7)} 2^{n+1} \frac{7 \cdot 11 \cdots (4n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{1}{2^n} = 2 \frac{2n+2}{4n+7} = \frac{4n+4}{4n+7} \rightarrow 1,$$

οπότε δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα από το κριτήριο D' Alembert και, για τον λόγο αυτόν, χρησιμοποιούμε το κριτήριο Raabe.

$$n \left(1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) = n \left(1 - \frac{4n+4}{4n+7} \right) = n \frac{4n+7 - (4n+4)}{4n+7} = \frac{3n}{4n+7} \rightarrow \frac{3}{4} < 1,$$

επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 40). Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2) \sqrt{2n+5}}{(n^2+1) \sqrt{n^2+2}},$$

Λύση. (Λογαριθμικό κριτήριο) Θέτοντας $a_n = \frac{(n+2) \sqrt{2n+5}}{(n^2+1) \sqrt{n^2+2}}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim \frac{\ln |a_n|}{\ln(1/n)} &= \lim \frac{\ln((n+2) \sqrt{2n+5}) - \ln((n^2+1) \sqrt{n^2+2})}{-\ln n} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2) + \frac{1}{2} \ln(2x+5) - \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \ln(x^2+2)}{-\ln x} \end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό, εφαρμόζουμε τον κανόνα L' Hopital, διότι προφανώς $a_n \rightarrow 0$, οπότε $\ln |a_n| \rightarrow -\infty$, δηλαδή ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος απειρίζονται.

Κατόπιν τούτου, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim \frac{\ln |a_n|}{\ln(1/n)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+2} + \frac{1}{2x+5} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+2}}{-\frac{1}{x}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+2} + \frac{x}{2x+5} - \frac{2x^2}{x^2+1} - \frac{x^2}{x^2+2} \right) = -(1 + 1/2 - 2 - 1) = 3/2 > 1, \end{aligned}$$

οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως. □

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 50). Να ευρεθεί ποιες από τις παρακάτω σειρές είναι απολύτως συγκλίνουσες και ποιες συγκλίνουσες υπό συνθήκη.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^2+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right)^3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2n+1} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+40}{5n+20} \right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2 \cosh n)}.$$

Λύση.

$$n \leq \ln e^n \leq \ln(2 \cosh n) = \ln(e^n + e^{-n}) \leq \ln(2e^n) = n + \ln 2 \leq 2n \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{\ln(e^n + e^{-n})} \leq \frac{1}{n}$$

□

Άσκηση. Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όταν

$$i) a_n = \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}}, \quad ii) a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}, \quad iii) a_n = \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}, \quad iv) a_n = \frac{1}{n \sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}.$$

Λύση. i) Είναι

$$\lim \frac{\ln |a_n|}{\ln(1/n)} = \lim \frac{2 \ln n - \sqrt{n} \ln e}{-\ln n} = -2 + \lim \frac{\sqrt{n}}{\ln n} = +\infty$$

άρα η σειρά συγκλίνει.

ii) $1 \leq \sqrt[n]{\ln n} < \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, άρα $a_n \rightarrow 1$, οπότε η σειρά δεν συγκλίνει.

iii) Ο αριθμητής της παράστασης $a_n = \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}$ απειρίζεται, ενώ ο παρονομαστής τείνει στο e , άρα $a_n \rightarrow +\infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

iv)

$$a_n = \frac{1}{n^{4/3} - n^{1/2}} = \frac{1}{n^{4/3}(1 - n^{-5/6})} \leq \frac{2}{n^{4/3}} = b_n$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει τελικά επειδή $\lim(1 - n^{-5/6}) = 1$, οπότε τελικά $1 - n^{-5/6} \geq 1/2$.

Η σειρά της (b_n) συγκλίνει ως p -σειρά με $p = 4/3 > 1$, άρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. □

Άσκηση. Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, όπου

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Λύση. Η πρώτη σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη, βάσει του κριτηρίου Leibniz, διότι η (a_n) είναι φθίνουσα και μηδενική, ενώ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$ ως p -σειρά με $p = 1/2 < 1$.

Για τη δεύτερη σειρά, έχουμε ότι

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{1}{\sqrt{4n}} + \frac{1}{\sqrt{4n}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4n}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4n}} = c_n > 0.$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty$, έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$. □

Παρατήρηση : Οι δύο σειρές έχουν τους ίδιους ακριβώς όρους, αλλά σε διαφορετική διάταξη. Εν τούτοις, η πρώτη συγκλίνει ενώ η δεύτερη όχι. Αυτό είναι ένα γενικότερο αποτέλεσμα (Θεώρημα Riemann), σύμφωνα με το οποίο, όταν μια σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη, τότε για κάθε $x \in \overline{\mathbb{R}}$ υπάρχει αναδιάταξη των όρων της σειράς που να αθροίζει στο x .

Άσκηση (Αλυτη άσκηση 54). Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots = +\infty.$$

Λύση. Ο γενικός όρος της σειράς είναι ο $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor} + (-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Έστω $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ η ακολουθία μερικών αθροισμάτων. Είναι

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \rightarrow +\infty$$

και

$$s_{2n-1} = s_{2n-2} + a_{2n-1} = s_{2n-2} + \frac{1}{\sqrt{n}-1} \rightarrow +\infty + 0 = +\infty.$$

Επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n = +\infty$. □