11 Σειρές Taylor

Θεώρημα (Taylor). *Έστω συνάρτηση $f(t)$, n+1 για την οποία υπάρχουν και είναι συνεχείς οι παράγωγοι $f', \dots, f^{(n)}/[a,b]$ και υπάρχει και η $f^{(n+1)}/(a,b)$. Τότε, για κάθε $x, x_0 \in [a,b]$ και για κάθε $\nu \in [n+1]$, υπάρχει ξ μεταξύ των x, x_0 τέτοιο ώστε*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n(x) \\ &= R_n(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0), \end{aligned}$$

όπου $R_n(x) = \dfrac{(x-x_0)^\nu (x-\xi)^{n-\nu+1}}{\nu n!} f^{(n+1)}(\xi)$.

Για $\nu = 1$, η $R_n(x)$ ονομάζεται *υπόλοιπο Cauchy*, ενώ για $\nu = n+1$, ονομάζεται *υπόλοιπο Lagrange*.

Αν $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ και μόνο τότε είναι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Η έκφραση αυτή ονομάζεται *σειρά Taylor* της συνάρτησης f γύρω από το σημείο $x = x_0$. Ειδικά για $x_0 = 0$ προκύπτει η *σειρά Maclaurin* της συνάρτησης f, δηλαδή

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Βασικές σειρές Maclaurin:

- $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} x^n$, $x \in (-1,1)$.
- $e^x = \displaystyle\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\sin x = \displaystyle\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ και $\cos x = \displaystyle\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\sinh x = \displaystyle\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ και $\cosh x = \displaystyle\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.
- $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{\mathrm{n=1}}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-1,1]$.
- $(1+x)^r = \displaystyle\sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n$, $x \in (-1,1)$ και $r \in \mathbb{R}$.

Σειρές Taylor και διωνυμικοί συντελεστές

Οι διωνυμικοί συντελεστές ορίζονται από τον τύπο

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \dfrac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}.$$

όπου το γινόμενο $r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)$ ορίζεται ίσο με 1, όταν $k = 0$.

Μια σημαντική ταυτότητα των διωνυμικών συντελεστών είναι η ακόλουθη:

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}, \qquad k \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}. \tag{11.1}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \binom{r}{k} &= \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{(-r)(1-r)(2-r)\cdots(k-r-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(k-r-1)(k-r-1-1)\cdots((k-r-1)-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}. \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, εφαρμόζοντας την (11.1), για $r = -1$, έχουμε

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k \binom{k-(-1)-1}{k} = (-1)^k \binom{k}{k} = (-1)^k.$$

Βάσει του παραπάνω αποτελέσματος, προκύπτει ο τύπος της γεωμετρικής σειράς ως μια ειδική περίπτωση της διωνυμικής σειράς:

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Σε ορισμένες περιπτώσεις, όπου ο r δεν είναι ακέραιος, ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{r}{k}$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει απλούστερων διωνυμικών συντελεστών. Για παράδειγμα,

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k} \qquad \text{και} \qquad \binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k}.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \binom{-\frac{1}{2}}{k} &= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2k-1}{2})}{k!} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{(1)(3)\cdots(2k-1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k (2k)!}{2^k k! 2 \cdot 4 \cdots (2k)} = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^k k! 2^k k!} = \frac{(-1)^k (2k)!}{4^k k! k!} = \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \binom{\frac{1}{2}}{k} &= \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})\cdots(-\frac{2k-3}{2})}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^k} \frac{(1)(1)\cdots(2k-3)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^k k! 2 \cdot 4 \cdots (2k)(2k-1)} = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^k k! 2^k k! (2k-1)} = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{4^k k! k! (2k-1)} = \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} \end{aligned}$$

12 Ασκήσεις

Άσκηση. *Να αναπτυχθούν σε σειρές MacLaurin οι συναρτήσεις*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}, \quad x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \qquad g(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad x \in (-1,1)\,.$$

Λύση. Βάσει των προηγούμενων σχέσεων

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k} \qquad \text{και} \qquad \binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\binom{2k}{k},$$

καθώς και του τύπου της διωνυμικής σειράς, έχουμε ότι

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-4x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}x^k$$

και

$$g(x) = \sqrt{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\binom{2k}{k}x^{2k}.$$

□

Άσκηση (Άλυτη άσκηση 85). *Να αποδειχθεί ο τύπος*

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Λύση. Αρχικά θα αποδειχθεί με επαγωγή ότι

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2}), \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Για $n = 1$ ισχύει, αφού

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \sin x \sin\frac{\pi}{2} = -\sin x = (\cos x)'$$

αν ισχύει για $n \geq 1$, τότε

$$\begin{aligned}\cos(x + (n+1)\frac{\pi}{2}) &= \cos(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})\cos\frac{\pi}{2} - \sin(x + n\frac{\pi}{2})\sin\frac{\pi}{2} \\ &= -\sin(x + n\frac{\pi}{2}) = (\cos(x + n\frac{\pi}{2}))' = (\cos^{(n)} x)' = \cos^{(n+1)} x.\end{aligned}$$

Επομένως, το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor για τη συνάρτηση $f(t) = \cos t$ στο διάστημα $[-a, a]$, για $a > 0$ και για $x_0 = 0$, προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [-a, a]$ και $\nu \in [n+1]$ υπάρχει ξ μεταξύ των 0 και x τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^\nu (x-\xi)^{n-\nu+1}}{\nu n!} f^{(n+1)}(\xi) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\pi/2)}{k!} x^k + \frac{x^\nu (x-\xi)^{n-\nu+1}}{\nu n!} \cos(\xi + (n+1)\pi/2)\end{aligned}$$

Θέτοντας $\nu = n+1$, έχουμε ότι $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\xi + (n+1)\pi/2)$, οπότε $|R_n(x)| \leq \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Με το κριτήριο της μηδενικής ακολουθίας, προκύπτει άμεσα ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Επιπλέον, για $k, n \in \mathbb{N}$, είναι

$$\cos(k\pi/2) = \begin{cases} 0, & k = 2n-1 \\ \cos(n\pi), & k = 2n \end{cases} = \begin{cases} 0, & k = 2n-1 \\ (-1)^n, & k = 2n \end{cases}$$

Κατόπιν τούτων, έχουμε ότι

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi/2)}{k!} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 65). *Να αναπτυχθούν σε σειρές οι συναρτήσεις*

$$f(x) = \sin^3 x/\mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{1}{(4-x^2)^2}/(-2,2), \qquad h(x) = \ln\frac{2+x}{1-x}/(-1,1).$$

Λύση. Θα εκφράσουμε το $\sin^3 x$ συναρτήσει του $\sin(3x)$. Είναι

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(x+2x) = \sin x\cos(2x) + \cos x\sin(2x) = \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos x(2\sin x\cos x)\\ &= \sin x(1-2\sin^2 x) + 2\cos^2 x\sin x = (1-2\sin^2 x)\sin x + 2(1-\sin^2 x)\sin x\\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x,\end{aligned}$$

επομένως $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin(3x)$.

Χρησιμοποιώντας τον γνωστό τύπο της σειράς του ημιτόνου

$$\sin y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}y^{2n+1}, \qquad y \in \mathbb{R},$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x) = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(3x)^{2n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{3}{4} - \frac{3^{2n+1}}{4}\right)x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n(1-9^n)}{4(2n+1)!}x^{2n+1}\end{aligned}$$

Για τη συνάρτηση g, έχουμε ότι

$$g(x) = (4-x^2)^{-2} = 4^{-2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{-2}.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο της διωνυμικής σειράς για $y = -x^2/4 \in (-1,1)$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{1}{16}(1+y)^{-2} = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}y^n = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+1}{n}\frac{(-x^2)^n}{4^n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4^{n+2}}x^{2n}, \qquad x \in (-2,2).\end{aligned}$$

(Απάντηση.)

Για την συνάρτηση h θα χρησιμοποιηθεί ο τύπος της λογαριθμικής σειράς

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}y^n, \qquad y \in (-1,1].$$

$$\begin{aligned}h(x) &= \ln(2+x) - \ln(1-x) = \ln 2 + \ln(1+x/2) - \ln(1-x)\\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x/2)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(-x)^n = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)x^n.\end{aligned}$$

□

Άσκηση (ΣΕΠ. 2020). *Να ευρεθούν οι συντελεστές της σειράς Taylor της συνάρτησης* $f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$, *γύρω από το σημείο* $x_0 = 1$.

Λύση. Θα χρησιμοποιηθεί ο τύπος της γεωμετρικής σειράς

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad x \in (-1,1).$$

Θέτουμε $y = x - x_0 = x - 1$, οπότε

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{2-x} = \frac{(y+1)+1}{2-(y+1)} = \frac{y+2}{1-y} = \frac{y-1+3}{1-y} \\ &= -1 + \frac{3}{1-y} = -1 + 3\sum_{n=0}^{\infty} y^n = -1 + 3 + 3\sum_{n=1}^{\infty} y^n = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 3(x-1)^n. \end{aligned}$$

Άρα, ο συντελεστής της σειράς είναι ο

$$a_n = \begin{cases} 3, & n > 0, \\ 2, & n = 0. \end{cases}$$

□

Άσκηση (βλ. Λυμένη άσκηση 66). *Να ευρεθεί η σειρά Taylor των συναρτήσεων*

i) $f(x) = \cos x$, *γύρω από το σημείο* $x_0 = \pi$.

ii) $g(x) = \ln(4 - x)$, *γύρω από το σημείο* $x_0 = 2$.

iii) $h(x) = \dfrac{x-1}{(3x-5)^2}$, *γύρω από το σημείο* $x_0 = 1$.

Λύση. *i*) Θέτοντας $y = x - \pi$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x = \cos(y+\pi) = \cos y \cos \pi - \sin y \sin \pi = -\cos y \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} (x-\pi)^{2n} \end{aligned}$$

ii) Θέτοντας $y = x - 2$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(4-x) = \ln(4-(y+2)) = \ln(2-y) = \ln(2(1-y/2)) = \ln 2 + \ln(1-y/2) \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-y/2)^n = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} y^n = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} (x-2)^n \end{aligned}$$

όταν $-y/2 \in (-1, 1)$, ή ισοδύναμα $x \in (0, 4)$.

iii) Θέτοντας $y = x - 1$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x-1}{(3x-5)^2} = \frac{y}{(3(y+1)-5)^2} = \frac{y}{(3y-2)^2} = \frac{y}{4(1-3y/2)^2} = \frac{y}{4}(1-3y/2)^{-2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-3/2)^n y^{n+1} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2-1}{n} (-1^n)(-3/2)^n y^{n+1} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)3^n}{2^n} y^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)3^n}{2^{n+2}} (x-1)^{n+1} \end{aligned}$$

όταν $-3y/2 \in (-1, 1)$, ή ισοδύναμα $x \in (1/3, 5/3)$. □

Άσκηση (βλ. Άλυτη άσκηση 88). *Να ευρεθεί με τη βοήθεια ενός πολυωνύμου Taylor μια κατά προσέγγιση τιμή του αριθμού* $\cos 1$ *με ακρίβεια* 10^{-4}.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \cos x$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Taylor για $x = 1$ και $x_0 = 0$. Αναπτύσσοντας την $f(x)$ γύρω από το 0, έχουμε ότι

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos(\xi + (n+1)\pi/2) = p_n(x) + R_n(x)$$

όπου

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} (x)^n, \qquad R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos(\xi + (n+1)\pi/2)$$

Για $x = 1$, έχουμε

$$|R_n(1)| = \frac{|\cos(\xi + (n+1)\pi/2)|}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

Επειδή

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{10000} \Leftrightarrow (n+1)! \geq 10^4 \Leftrightarrow n \geq 7,$$

προκύπτει ότι, για $n \geq 7$, είναι $|\cos 1 - p_7(1)| = |R_7(1)| \leq 10^{-4}$, δηλαδή η προσέγγιση

$$\cos 1 \approx p_7(1) = \sum_{k=0}^{7} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}$$

έχει την απαιτούμενη ακρίβεια. □

Σύμφωνα με τον παρακάτω κώδικα, είναι

$$\cos(1) \approx 0.5403023058681397174, \qquad p_7(1) \approx 0.540277777777778$$

```
from sympy import Symbol, cos, series
x = Symbol('x')
N = 7
point = 1
f = series(cos(x), x, x0 = 0, n = N)
poly = f.removeO() #remove O() term
val = poly.subs(x,point) #evaluate at x = point
val2 = cos(point).evalf(22)
print("cos(x) =", f, "(Maclaurin series)")
print("p(x) = ", poly, "(Taylor polynomial of degree %d)"%N)
print("p(%d) = %0.22f"%(point, val), "(Approximation of cos(%d))"%point)
print("cos(%d) ="%1, val2, "(Higher order approximation)")
print("Error =", val2-val)
```

Ouput:

```
cos(x) = 1 - x**2/2 + x**4/24 - x**6/720 + O(x**7) (MacLaurin series)
p(x) =  -x**6/720 + x**4/24 - x**2/2 + 1 (Taylor polynomial of degree 7)
p(1) = 0.5402777777777777457047 (Approximation of cos(1))
cos(1) = 0.5403023058681397174009 (Higher order approximation)
Error = 0.00002452809036193962314881
```

13 Αόριστο Ολοκλήρωμα

Ορισμός: Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων $F(x)+c$, όπου $c \in \mathbb{R}$ και $F'(x) = f(x)$. δηλαδή είναι

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Η συνάρτηση F ονομάζεται παράγουσα της f.

Από τον ορισμό προκύπτουν οι ιδιότητες:

- $\int f'(x)dx = f(x) + c$
- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
- $\int (kf(x) + \lambda g(x))dx = k\int f(x)dx + \lambda \int g(x)dx$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

Στις επόμενες περιπτώσεις εφαρμόζεται ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

1. $\int e^{ax+b}p(x)dx$, όπου $p(x)$ πολυώνυμο. Θέτουμε $e^{ax+b} = (\frac{1}{a}e^{ax+b})'$.

   Εφαρμογές: $\int x^2e^xdx$, $\int (x^2 + 6x - 1)e^xdx$.

2. $\int \sin(ax + b)p(x)dx$ και $\int \cos(ax + b)p(x)dx$, όπου $p(x)$ πολυώνυμο. Θέτουμε αντίστοιχα $\sin(ax + b) = (\frac{-1}{a}\cos(ax + b))'$ και $\cos(ax + b) = (\frac{1}{a}\sin(ax + b))'$.

   Εφαρμογές: $\int x\sin(3x - 1)dx$, $\int x^2\cos(-2x + 3)dx$, $\int (2x^2 - 3x + 5)\cos 4xdx$.

3. $\int e^{ax+b}\sin(cx + d)dx$ και $\int e^{ax+b}\cos(cx + d)dx$. Θέτουμε $e^{ax+b} = (\frac{1}{a}e^{ax+b})'$ και εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση 2 φορές.

   Εφαρμογές: $\int e^{2x}\sin xdx$, $\int e^x\cos 3xdx$, $\int xe^x\cos 3xdx$.

4. $\int f(x)\ln(g(x))dx$, $\int f(x)\arctan(g(x))dx$ και $\int f(x)\arcsin(g(x))dx$, όπου $f(x)$ ρητή συνάρτηση. Βρίσκουμε μια $F(x)$ ώστε $F'(x) = f(x)$.

   Εφαρμογές: $\int (3x^2 + 4x + 1)\ln(\frac{x^2+1}{x})dx$, $\int (4x^3 + x)\arctan(x^2 - 1)dx$, $\int \arcsin xdx$.

5. Αναγωγικοί τύποι, δηλαδή ολοκληρώματα της μορφής $I_n = \int A(x, n)dx$.

   Εφαρμογές: $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$, $\int \sin^n xdx$, $\int \cos^n xdx$, $\int x^ne^{-x}dx$.

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση: $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy$

Θέτουμε $y = g(x)$, οπότε[2] $dy = g'(x)dx$ και αντικαθιστώντας στο πρώτο μέλος παίρνουμε το δεύτερο.

Στις επόμενες περιπτώσεις εφαρμόζεται ολοκλήρωση με αντικατάσταση:

1. $\int A(\cos x, \sin x)$. Διακρίνουμε 4 περιπτώσεις:

   - Αν η A είναι περιττή ως προς $\cos x$ (δηλαδή είναι $A(-\cos x, \sin x) = -A(\cos x, \sin x)$), τότε θέτουμε $y = \sin x$.
   - Αν η A είναι περιττή ως προς $\sin x$ (δηλαδή είναι $A(\cos x, -\sin x) = -A(\cos x, \sin x)$), τότε θέτουμε $y = \cos x$.
   - Αν η A είναι άρτια ως προς $\sin x$ και $\cos x$ (δηλαδή είναι $A(-\cos x, -\sin x) = A(\cos x, \sin x)$), τότε θέτουμε $y = \tan x$. Από τον τριγωνομετρικό τύπο $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ έχουμε ότι $dx = \frac{dy}{1+y^2}$.
   - Αν δεν ισχύει τίποτα από τα προηγούμενα, τότε θέτουμε $y = \tan\frac{x}{2}$. Ομοίως βρίσκουμε ότι $dx = \frac{2dy}{1+y^2}$. Επίσης, κατά την αντικατάσταση χρησιμοποιούνται και οι τύποι $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ και $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$.

   Εφαρμογές: $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$, $\int \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$, $\int \frac{1}{5+3\cos x}dx$.

2. $\int A(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$. Θέτουμε $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Αν το κλάσμα $\frac{ax+b}{cx+d}$ εμφανίζεται σε περισσότερα από ένα ριζικά, τότε θέτουμε $y = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, όπου k το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δεικτών των ριζικών.

   Εφαρμογές: $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$, $\int \frac{x+\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2}}dx$.

3. $\int A(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Αν η A είναι ρητή συνάρτηση διακρίνουμε περιπτώσεις:

   - Αν $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, τότε θέτουμε $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\rho)y$, όπου ρ είναι μια ρίζα του τριωνύμου.
   - Αν $\Delta < 0$, τότε θέτουμε $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(x-y)$. Ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί γενικά όταν $a > 0$.

   Εφαρμογές: $\int \frac{x-3}{\sqrt{-x^2-2x+3}}dx$, $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx$, $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+2x-1}}dx$.

4. $\int A(x, \sqrt{a^2-b^2x^2})dx$. Θέτουμε $bx = a\sin y$

5. $\int A(x, \sqrt{b^2x^2-a^2})dx$. Θέτουμε $bx = a\cosh y$ (επειδή $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$). Μπορεί επίσης να τεθεί $bx = \frac{a}{\cos^2 y}$ (επειδή $\tan^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}$).

6. $\int A(x, \sqrt{b^2x^2+a^2})dx$. Θέτουμε $bx = a\sinh y$. Μπορεί επίσης να τεθεί $bx = a\tan y$.

7. $\int x^k(ax^\lambda + b)^\mu dx$. Αν μ ακέραιος, τότε θέτουμε $x = y^\rho$, όπου ρ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των k, λ. Διαφορετικά, θέτουμε $ax^\lambda + \beta = y^\delta$, ή $ax^\lambda + \beta = y^\delta x^\lambda$, όπου δ είναι ο παρονομαστής του μ σε ανάγωγη μορφή.

[2]Γενικά, για τον μετασχηματισμό $f(y) = g(x)$, η σχέση μεταξύ dy και dx προκύπτει παραγωγίζοντας ως προς x, οπότε είναι $f(y) = g(x) \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \Rightarrow \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dx} \Rightarrow f'(y)dy = g'(x)dx$.

Η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$

Για την επίλυση της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, με $a \neq 0$, αρχικά δημιουργούμε ένα τέλειο τετράγωνο (το άθροισμα των τετραγώνων δύο ποσοτήτων και του διπλάσιου γινομένου τους):

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right), \end{aligned} \tag{13.1}$$

όπου η παράσταση $\Delta = b^2 - 4ac$ ονομάζεται διακρίνουσα της εξίσωσης. Στο σημείο αυτό διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\Delta = 0$, τότε $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, οπότε η εξίσωση έχει μία (διπλή) ρίζα, την $\rho = -\frac{b}{2a}$.
- Αν $\Delta < 0$, τότε $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$, οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες και επιπλέον η παράσταση $ax^2 + bx + c$ είναι ομόσημη του a, για κάθε x.
- Αν $\Delta > 0$, τότε

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a(x - \rho_1)(x - \rho_2), \end{aligned} \tag{13.2}$$

όπου $\rho_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ και $\rho_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης.

Επιπλέον, εύκολα επαληθεύεται με πράξεις ότι

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{b}{a}, \qquad \rho_1\rho_2 = \frac{c}{a}. \tag{13.3}$$

Η μορφή $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$, με $b^2 - 4ac < 0$

Έστω $p(x) = ax^2 + bx + c$, με $a \neq 0$ και $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Ως γνωστό, όταν η διακρίνουσα Δ είναι αρνητική, τότε το $p(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και επιπλέον είναι ομόσημο του a, για κάθε x.

Η επίλυση του ολοκληρώματος

$$I = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c}dx$$

γίνεται με τη βοήθεια της συνάρτησης arctg, για την οποία ως γνωστό ισχύει

$$\frac{d(\mathrm{arctg}\, y)}{dy} = \frac{1}{1 + y^2}, \qquad \text{ή, ισοδύναμα,} \qquad c + \mathrm{arctg}\, y = \int \frac{1}{1 + y^2}dy, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Προσπαθούμε λοιπόν να μετατρέψουμε το $ax^2 + bx + c$ στη μορφή $y^2 + 1$, για κάποιο y το οποίο είναι συνάρτηση του x. Η διαδικασία μετατροπής έχει ως εξής: αρχικά δημιουργούμε ένα τέλειο τετράγωνο (το άθροισμα των τετραγώνων δύο ποσοτήτων και του διπλάσιου γινομένου τους) και στη συνέχεια βγάζουμε κοινό παράγοντα τον σταθερό όρο. Από τη σχέση (13.1), έχουμε

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k^2\right).$$

Επειδή $\Delta < 0$, για απλότητα στις πράξεις, τέθηκε $k = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}$. Θέτοντας

$$ky = x + \frac{b}{2a}, \qquad \text{οπότε} \qquad kdy = dx,$$

έχουμε ότι $ax^2 + bx + c = a(k^2y^2 + k^2) = ak^2(y^2 + 1)$, επομένως

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{ax^2 + bx + c}dx = \int \frac{1}{ak^2(y^2 + 1)}kdy = \frac{1}{ak}\int \frac{1}{y^2 + 1}dy = \frac{1}{ak}(c + \operatorname{arctg} y) \\ &= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left(c + \operatorname{arctg}\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}\right)\right) \end{aligned}$$

Η μορφή $\int \frac{kx+\lambda}{ax^2+bx+c}dx$, με $b^2 - 4ac < 0$

Έστω $p(x) = ax^2 + bx + c$, με $a \neq 0$ και $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Για την επίλυση του ολοκληρώματος

$$I = \int \frac{kx + \lambda}{ax^2 + bx + c}dx,$$

αρχικά προσπαθούμε να εμφανίσουμε την παράγωγο $p'(x) = 2ax + b$ του παρονομαστή στον αριθμητή ως εξής:

$$kx + \lambda = \frac{k}{2a}(2ax + b) - \frac{k}{2a}b + \lambda,$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{kx + \lambda}{ax^2 + bx + c}dx = \int \frac{\frac{k}{2a}(2ax + b) - \frac{k}{2a}b + \lambda}{ax^2 + bx + c}dx \\ &= \frac{k}{2a}\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}dx + \left(\lambda - \frac{k}{2a}b\right)\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}dx \\ &= \frac{k}{2a}\int \frac{p'(x)}{p(x)}dx + \left(\lambda - \frac{k}{2a}b\right)\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}dx \\ &= \frac{k}{2a}\ln|p(x)| + \left(\lambda - \frac{k}{2a}b\right)\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}dx. \end{aligned}$$

Τέλος, λύνουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα, σύμφωνα με τη μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου.

Άσκηση. *Να λυθεί το αόριστο ολοκλήρωμα* $I = \int \frac{3-5x}{6x^2-2x+4}dx.$

Λύση. Είναι $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 6\cdot 4 < 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{3-5x}{6x^2-2x+4}dx = \int \frac{\frac{-5}{12}(12x-2) - 2\frac{5}{12} + 3}{6x^2-2x+4}dx \\
&= \frac{-5}{12}\ln|6x^2-2x+4| + \frac{13}{6}\int \frac{1}{6x^2-2x+4}dx \\
&= \frac{-5}{12}\ln(6x^2-2x+4) + \frac{13}{36}\int \frac{1}{x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}dx
\end{aligned}$$

Για την επίλυση του τελευταίου ολοκληρώματος, έχουμε

$$x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = x^2 - 2\frac{1}{6}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{2}{3} = \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{36},$$

άρα, θέτοντας

$$\frac{\sqrt{23}}{6}y = x - \frac{1}{6}, \qquad \text{οπότε} \quad \frac{\sqrt{23}}{6}dy = dx,$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{1}{x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}dx = \int \frac{1}{(x-\frac{1}{6})^2+\frac{23}{36}}dx = \int \frac{1}{\frac{23}{36}y^2+\frac{23}{36}}\frac{\sqrt{23}}{6}dy = \frac{6}{\sqrt{23}}\int \frac{1}{y^2+1}dy \\
&= \frac{6}{\sqrt{23}}(c_1 + \operatorname{arctg} y) = c_2 + \frac{6}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6}{\sqrt{23}}\left(x-\frac{1}{6}\right)\right) = c_2 + \frac{6}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6x-1}{\sqrt{23}}\right)
\end{aligned}$$

οπότε τελικά

$$\begin{aligned}
I &= \frac{-5}{12}\ln(6x^2-2x+4) + \frac{13}{36}\left(c_2 + \frac{6}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6x-1}{\sqrt{23}}\right)\right) \\
&= c - \frac{5}{12}\ln(6x^2-2x+4) + \frac{13}{6\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\left(\frac{6x-1}{\sqrt{23}}\right)
\end{aligned}$$

□

Η μορφή $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}dx$, με $b^2 - 4ac < 0$

Έστω $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n}dx$, με $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Η επίλυση του ολοκληρώματος αυτού ανάγεται, με τη διαδικασία που περιγράφτηκε στα προηγούμενα, στην επίλυση του ολοκληρώματος $J_n = \displaystyle\int \frac{1}{(y^2 + 1)^n}dx$. Πράγματι, για $k = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}$, θέτοντας

$$ky = x + \frac{b}{2a}, \qquad \text{οπότε} \qquad kdy = dx,$$

έχουμε ότι $ax^2 + bx + c = ak^2(y^2 + 1)$, επομένως

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \int \frac{kdy}{(ak^2(y^2 + 1))^n} = \frac{1}{a^n k^{2n-1}} \int \frac{dy}{(y^2 + 1)^n} = \frac{2^{2n-1}a^{n-1}}{(-\Delta)^{n-\frac{1}{2}}} \int \frac{1}{(y^2 + 1)^n}dy$$

Για την επίλυση του J_n, δημιουργούμε έναν αναγωγικό τύπο (ως προς n), χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση (βλ. λυμένη άσκηση 16 Κεφ. 6):

$$\begin{aligned}
J_n &= \int \frac{1}{(y^2 + 1)^n}dy = \int \frac{y^2 + 1 - y^2}{(y^2 + 1)^n}dy = \int \frac{1}{(y^2 + 1)^{n-1}}dy - \int \frac{y^2}{(y^2 + 1)^n}dy \\
&\overset{n>1}{=} J_{n-1} - \int y\left(\frac{(y^2 + 1)^{1-n}}{2(1 - n)}\right)' dy = J_{n-1} + \frac{y}{2(n - 1)(y^2 + 1)^{n-1}} - \int \frac{(y^2 + 1)^{1-n}}{2(n - 1)}dy \\
&= J_{n-1} + \frac{y}{2(n - 1)(y^2 + 1)^{n-1}} - \frac{1}{2n - 2}J_{n-1} = \frac{y}{2(n - 1)(y^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2n - 2}J_{n-1}.
\end{aligned}$$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει για $n > 1$, ενώ, για $n = 1$, προφανώς είναι $J_1 = \operatorname{arctg} y + c$.

Παράδειγμα. Για το ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$, έχουμε

$$x^2+x+1 = x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},$$

άρα, θέτοντας $\dfrac{\sqrt{3}}{2}y = x+\dfrac{1}{2}$, προκύπτει ότι

$$I = \int \frac{1}{\left(\frac{3}{4}(y^2+1)\right)^2}\frac{\sqrt{3}}{2}dy = \frac{8}{3\sqrt{3}}\int \frac{1}{(y^2+1)^2}dy$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int \frac{1}{(y^2+1)^2}dy = \int \frac{y^2+1-y^2}{(y^2+1)^2}dy = \int \frac{1}{y^2+1}dy - \frac{1}{2}\int y\frac{2y}{(y^2+1)^2}dy \\
&= \operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\int y\left(\frac{1}{y^2+1}\right)' dy = \operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\frac{y}{y^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+1}dy \\
&= \operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\frac{y}{y^2+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y + c_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\frac{y}{y^2+1} + c_1
\end{aligned}$$

επομένως, και δεδομένου ότι $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}(x+\dfrac{1}{2}) = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ και $y^2+1 = \frac{4}{3}(x^2+x+1)$, είναι

$$\begin{aligned}
I &= \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg} y + \frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{y}{y^2+1} + c = \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}(x^2+x+1)} + c \\
&= \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + c
\end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι, για την επίλυση του J_2, δεν χρησιμοποιήθηκε ο αναγωγικός τύπος για το J_n, για να τονιστεί ότι δεν έχει τόσο σημασία η απομνημόνευση αυτού του τύπου, όσο η τεχνική της παραγοντικής ολοκλήρωσης, με την οποία προκύπτει.

Η μορφή $\int R(\cos x, \sin x)dx$

Για την επίλυση ολοκληρωμάτων της μορφής $\int R(\cos x, \sin x)dx$, όπου $R(x, y)$ είναι μια ρητή συνάρτηση (δηλαδή είναι πηλίκο δύο πολυωνύμων), ως προς τις μεταβλητές x, y, απαιτείται η γνώση ορισμένων τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.

Συνίσταται η απομνημόνευση των στοιχειωδών τύπων

$$i) \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad ii) \cos(-x) = \cos x, \qquad iii) \sin(-x) = -\sin x$$

καθώς και των

$$iv) \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \qquad v) \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Με τη βοήθεια αυτών, μπορούν να προκύψουν εύκολα οι υπόλοιπες τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Για παράδειγμα, θέτοντας $x = y$ στους δύο τελευταίους, λαμβάνουμε αντίστοιχα

$$vi) \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad vii) \sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

Η vi) επεκτείνεται, βάσει της i) στην

$$vi) \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

Επίσης, διαιρώντας την i) με $\cos^2 x$, προκύπτει η πολύ βασική ταυτότητα

$$viii) 1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Αντικαθιστώντας στην vi), προκύπτει ότι

$$\cos(2x) = \frac{2}{1+\mathrm{tg}^2 x} - 1 = \frac{2-(1+\mathrm{tg}^2 x)}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$$

Επίσης, από τις vii) και $viii$), έχουμε

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x = 2\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x = \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$$

Συνοψίζοντας, έχουμε

$$\cos(2x) = \frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}, \qquad \sin(2x) = \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}^2 x},$$

Οι δύο παραπάνω τύποι χρησιμοποιούνται κατά την αντικατάσταση $y = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$.

Τέλος, από την $viii$), προκύπτει

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}, \qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$$

Οι δύο παραπάνω τύποι χρησιμοποιούνται κατά την αντικατάσταση $y = \mathrm{tg}\, x$.

Γενικά, τα ολοκληρώματα της μορφής $\int R(\cos x, \sin x)dx$ λύνονται (ανάγονται σε ρητή μορφή ως προς y) με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \qquad \sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+y^2}dy$$

Οι επόμενες τρεις περιπτώσεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες αντικαταστάσεις, οι οποίες οδηγούν συνήθως σε απλούστερες πράξεις:

- Αν $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (δηλαδή, η R είναι περιττή ως προς το $\sin x$), τότε τίθεται $y = \cos x$.
- Αν $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (δηλαδή, η R είναι περιττή ως προς το $\cos x$), τότε τίθεται $y = \sin x$.
- Αν $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ (δηλαδή, η R είναι άρτια ως προς τα $\sin x$ και $\cos x$), τότε τίθεται $y = \operatorname{tg} x$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}, \qquad \sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}, \qquad dx = \frac{1}{1+y^2}dy$$

Συνοψίζοντας, για την επίλυση ολοκληρωμάτων με τριγωνομετρικές συναρτήσεις, αρκεί η απομνημόνευση των τύπων

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \text{για την αντικατάσταση } y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

και

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \qquad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \qquad \text{για την αντικατάσταση } y = \operatorname{tg} x.$$

Σημειώνεται ότι οι δύο τελευταίοι τύποι προκύπτουν άμεσα από την $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Η σχέση μεταξύ των dx, dy μπορεί να προκύψει εύκολα με τη βοήθεια της συνάρτησης arctg. Για παράδειγμα είναι $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \operatorname{arctg} y = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{2}{1+y^2}dy = dx$.

Παρατήρηση: Οι παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad t \in (-\infty, +\infty),$$

περιγράφουν το σύνολο όλων των σημείων (x, y) του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$, εκτός του $(-1, 0)$.

Αντίστοιχα, οι παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad y(t) = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad t \in (-1, 1),$$

περιγράφουν το σύνολο όλων των σημείων (x, y), με $x > 0$, της υπερβολής με εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$.

Άσκηση. *Να λυθούν τα ολοκληρώματα*

$$\int \frac{1}{1+\cos x+\sin x}dx, \qquad \int \frac{1}{\cos x}dx, \qquad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx.$$

Λύση. Για το πρώτο ολοκλήρωμα, θέτουμε $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, οπότε είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\cos x+\sin x}dx &= \int \frac{1}{1+\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{2y}{1+y^2}}\frac{2}{1+y^2}dy = \int \frac{2}{1+y^2+1-y^2+2y}dy \\ &= \int \frac{1}{1+y}dy = \ln|1+y|+c = \ln|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+c\end{aligned}$$

Για το δεύτερο, θέτουμε $y = \sin x$ (διότι η παράσταση είναι περιττή ως προς το $\cos x$), οπότε είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\cos x dx = \int \frac{1}{1-y^2}dy = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}\right)dy \\ &= \frac{1}{2}(\ln|1+y|-\ln|1-y|)+c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|+c = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+y)^2}{|1-y^2|}+c \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin x^2}+c = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}+c = \ln\frac{1+\sin x}{|\cos x|}+c\end{aligned}$$

Για το τρίτο ολοκλήρωμα, η παράσταση είναι και περιττή ως προς το $\sin x$, και περιττή ως προς το $\cos x$, και άρτια ως προς τα $\cos x, \sin x$, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε από τις διαθέσιμες αντικαταστάσεις. Αν επιλέξουμε την αντικατάσταση $y = \operatorname{tg} x$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx &= \int \frac{y^3}{1+y^2}dy = \int \frac{y^3+y-y}{1+y^2}dy = \int \frac{y^3+y}{1+y^2}dy - \int \frac{y}{1+y^2}dy \\ &= \int y dy - \frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}dy \\ &= \frac{y^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+c = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)+c \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\cos^2 x}+c = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+c\end{aligned}$$

□

Η μορφή $\int R(\cosh x, \sinh x)dx$

Για την επίλυση ολοκληρωμάτων της μορφής $\int R(\cosh x, \sinh x)dx$, όπου $R(x, y)$ είναι μια ρητή συνάρτηση, ως προς τις μεταβλητές x, y, χρησιμοποιούνται ταυτότητες με υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις, ανάλογες με αυτές της προηγούμενης ενότητας. Οι ταυτότητες αυτές μπορούν να προκύψουν άμεσα με τη βοήθεια του κανόνα του Osborn (βλ. Κεφ. 1, σελ. 52). Έτσι, έχουμε την ταυτότητα $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, από την οποία προκύπτει η

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}, \tag{13.4}$$

καθώς επίσης και τις

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x, \qquad \sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x.$$

Από την πρώτη και την (13.4), προκύπτει ότι

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = \frac{\cosh^2 x + \sinh^2 x}{\cosh^2 x}\cosh^2 x = (1 + \operatorname{tgh}^2 x)\cosh^2 x = \frac{1 + \operatorname{tgh}^2 x}{1 - \operatorname{tgh}^2 x},$$

ενώ από τη δεύτερη και την (13.4), προκύπτει ότι

$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x = \frac{2\sinh x \cosh x}{\cosh^2 x}\cosh^2 x = (2\operatorname{tgh} x)\cosh^2 x = \frac{2\operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh}^2 x},$$

Οι δύο παραπάνω τύποι χρησιμοποιούνται κατά την αντικατάσταση $y = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$.

Τέλος, από την (13.4), προκύπτουν οι τύποι

$$\cosh^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \qquad \sinh^2 x = \cosh^2 x - 1 = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - 1 = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

οι οποίοι χρησιμοποιούνται κατά την αντικατάσταση $y = \operatorname{tgh} x$.

Γενικά, τα ολοκληρώματα της μορφής $\int R(\cosh x, \sinh x)dx$ λύνονται (ανάγονται σε ρητή μορφή ως προς y) με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y = \operatorname{tgh}\frac{x}{2}$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cosh x = \frac{1 + y^2}{1 - y^2}, \qquad \sinh x = \frac{2y}{1 - y^2}, \qquad dx = \frac{2}{1 - y^2}dy$$

Ο τελευταίος τύπος προκύπτει άμεσα, είτε παραγωγίζοντας τη σχέση $x = 2\operatorname{arctgh} y$, είτε με τη βοήθεια της (13.4).

Οι επόμενες τρεις περιπτώσεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες αντικαταστάσεις, οι οποίες οδηγούν συνήθως σε απλούστερες πράξεις:

- Αν $R(\cosh x, -\sinh x) = -R(\cosh x, \sinh x)$ (δηλαδή, η R είναι περιττή ως προς το $\sinh x$), τότε τίθεται $y = \cosh x$.

- Αν $R(-\cosh x, \sinh x) = -R(\cosh x, \sinh x)$ (δηλαδή, η R είναι περιττή ως προς το $\cosh x$), τότε τίθεται $y = \sinh x$.

- Αν $R(-\cosh x, -\sinh x) = R(\cosh x, \sinh x)$ (δηλαδή, η R είναι άρτια ως προς τα $\sinh x$ και $\cosh x$), τότε τίθεται $y = \operatorname{tgh} x$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cosh^2 x = \frac{1}{1 - y^2}, \qquad \sinh^2 x = \frac{y^2}{1 - y^2}, \qquad dx = \frac{1}{1 - y^2}dy.$$

Οι μορφές $\int \sqrt{b^2-a^2x^2}dx,\ \int \sqrt{a^2x^2+b^2}dx,\ \int \sqrt{a^2x^2-b^2}dx$

Για τους επόμενους μετασχηματισμούς, προαπαιτείται η γνώση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad \sin(2x) = 2\sin x\cos x,$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$

καθώς και των αντίστοιχων υπερβολικών ταυτοτήτων

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad \sinh(2x) = 2\sinh x\cosh x,$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x.$$

1η μορφή. Να λυθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sqrt{b^2-a^2x^2}dx$, όπου $a, b > 0$.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα έχει νόημα όταν

$$b^2 - a^2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2x^2}{b^2} \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{ax}{b}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{ax}{b} \leq 1.$$

Στην περίπτωση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

Θέτουμε $ax = b\sin t$ (οπότε $adx = b\cos tdt$), ώστε να είναι

$$\sqrt{b^2-a^2x^2} = \sqrt{b^2 - b^2\sin^2 t} = b\sqrt{1-\sin^2 t} = b\sqrt{\cos^2 t} = b|\cos t|.$$

Επιπλέον, θεωρούμε $t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε είναι $\cos t \geq 0$ και

$$-1 \leq \sin t \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{ax}{b} \leq 1.$$

Μάλιστα, επειδή ο περιορισμός της $\sin t$ στο συγκεκριμένο διάστημα είναι ένα προς ένα και επί, έπεται ότι κάθε δυνατή τιμή του x προκύπτει από ακριβώς μία τιμή του t.

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{b^2-a^2x^2}dx = \int b|\cos t|\frac{b}{a}\cos tdt = \int \frac{b^2}{a}\cos^2 tdt = \int \frac{b^2}{2a}(1+\cos(2t))dt \\ &= \int \left(\frac{b^2}{2a}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right)\right)' dt = \frac{b^2}{2a}t + \frac{b^2}{4a}\sin(2t) + c = \frac{b^2}{2a}t + \frac{b^2}{2a}\sin t\cos t + c \end{aligned}$$

Τελικά, εκφράζοντας το I συναρτήσει του x, έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{b^2}{2a}t + \frac{b^2}{2a}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + c = \frac{b^2}{2a}\arcsin\frac{ax}{b} + \frac{b^2}{2a}\frac{ax}{b}\sqrt{1-\frac{a^2x^2}{b^2}} + c \\ &= \frac{b^2}{2a}\arcsin\frac{ax}{b} + \frac{x}{2}\sqrt{b^2-a^2x^2} + c \end{aligned}$$

2η μορφή. Να λυθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sqrt{a^2x^2+b^2}dx$, όπου $a,b>0$.

Στην περίπτωση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα

$$\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x,$$

θέτουμε $ax = b\sinh t$ (οπότε $adx = b\cosh t dt$), ώστε να είναι

$$\sqrt{a^2x^2+b^2} = \sqrt{b^2\sinh^2 t + b^2} = b\sqrt{\sinh^2 t + 1} = b\sqrt{\cosh^2 t} = b\cosh t.$$

Μάλιστα, επειδή η $\sinh t/\mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα και επί, έπεται ότι κάθε δυνατή τιμή του x προκύπτει από ακριβώς μία τιμή του t.

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{a^2x^2+b^2}dx = \int b\cosh t\frac{b}{a}\cosh t dt = \int \frac{b^2}{a}\cosh^2 t dt = \int \frac{b^2}{2a}(\cosh(2t)+1)dt \\ &= \int \left(\frac{b^2}{2a}\left(\frac{\sinh(2t)}{2}+t\right)\right)' dt = \frac{b^2}{4a}\sinh(2t) + \frac{b^2}{2a}t + c = \frac{b^2}{2a}\sinh t\cosh t + \frac{b^2}{2a}t + c \end{aligned}$$

Τελικά, εκφράζοντας το I συναρτήσει του x, έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{b^2}{2a}\sinh t\sqrt{\sinh^2 t+1} + \frac{b^2}{2a}t + c = \frac{b^2}{2a}\frac{ax}{b}\sqrt{\frac{a^2x^2}{b^2}+1} + \frac{b^2}{2a}\operatorname{arcsinh}\frac{ax}{b} + c \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2+b^2} + \frac{b^2}{2a}\operatorname{arcsinh}\frac{ax}{b} + c \end{aligned}$$

3η μορφή. Να λυθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sqrt{a^2x^2-b^2}dx$, όπου $a,b>0$.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα έχει νόημα όταν

$$a^2x^2 - b^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2x^2}{b^2} \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{ax}{b}\right| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{ax}{b} \geq 1 \text{ ή } \frac{ax}{b} \leq -1.$$

Στην περίπτωση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα

$$\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x,$$

διακρίνουμε 2 περιπτώσεις: *i*) Αν $\frac{ax}{b} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{b}{a}$, τότε θέτουμε $ax = b\cosh t$, όπου $t>0$, (οπότε $adx = b\sinh t dt$), ώστε να είναι

$$\sqrt{a^2x^2-b^2} = \sqrt{b^2\cosh^2 t - b^2} = b\sqrt{\cosh^2 t - 1} = b\sqrt{\sinh^2 t} = b|\sinh t| = b\sinh t.$$

Το απόλυτο στην τελευταία ισότητα μπορεί να παραληφθεί, διότι είναι

$$\sinh t \geq 0 \Leftrightarrow e^t - e^{-t} \geq 0 \Leftrightarrow e^t \geq e^{-t} \Leftrightarrow e^{2t} \geq 1 \Leftrightarrow t \geq 0.$$

Μάλιστα, επειδή η $\cosh t$ είναι ένα προς ένα και επί στο συγκεκριμένο διάστημα, έπεται ότι κάθε δυνατή τιμή του x προκύπτει από ακριβώς μία τιμή του t.

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{a^2x^2-b^2}dx = \int b\sinh t\frac{b}{a}\sinh t dt = \int \frac{b^2}{a}\sinh^2 t dt = \int \frac{b^2}{2a}(\cosh(2t)-1)dt \\ &= \int \left(\frac{b^2}{2a}\left(\frac{\sinh(2t)}{2}-t\right)\right)' dt = \frac{b^2}{4a}\sinh(2t) - \frac{b^2}{2a}t + c = \frac{b^2}{2a}\sinh t\cosh t - \frac{b^2}{2a}t + c \end{aligned}$$

Τελικά, εκφράζοντας το I συναρτήσει του x, έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{b^2}{2a}\cosh t\sqrt{\cosh^2 t - 1} - \frac{b^2}{2a}t + c = \frac{b^2}{2a}\frac{ax}{b}\sqrt{\frac{a^2x^2}{b^2} - 1} - \frac{b^2}{2a}\operatorname{arccosh}\frac{ax}{b} + c \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{a^2x^2 - b^2} - \frac{b^2}{2a}\operatorname{arccosh}\frac{ax}{b} + c \end{aligned}$$

ii) Αν $\frac{ax}{b} \leq -1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$, τότε θέτουμε $ax = -b\cosh t$, όπου $t < 0$, (οπότε $adx = -b\sinh t dt$). Κατόπιν τούτων, και δεδομένου ότι $t < 0 \Rightarrow \sinh t < 0$, προκύπτει ότι

$$I = \int \sqrt{a^2x^2 - b^2}dx = \int b|\sinh t|\frac{-b}{a}\sinh t dt = \int b(-\sinh t)\frac{-b}{a}\sinh t dt = \int \frac{b^2}{a}\sinh^2 t dt$$

οπότε τελικά προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό της προηγούμενης περίπτωσης.

Παρατήρηση. Η συνάρτηση $\cosh x/[0, +\infty)$ είναι ένα προς ένα (ως γνησίως αύξουσα), επομένως αντιστρέψιμη. Η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση $\operatorname{arccosh} y/[1, +\infty)$, για την οποία ισχύει ότι

$$\operatorname{arccosh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \tag{13.5}$$

(βλ. Κεφ. 1, σελ. 53 και άλυτη άσκηση 79, Κεφ. 1).

Πράγματι, αν τεθεί $y = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, τότε είναι

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq \frac{x + 1 + (-x + 1)}{2} \geq 1$$

και

$$2y = e^x + e^{-x} \Rightarrow 2ye^x = e^{2x} + 1 \Rightarrow (e^x)^2 - 2y(e^x) + 1 = 0 \Rightarrow e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Η μικρότερη ρίζα απορρίπτεται, αφού είναι

$$e^x = y - \sqrt{y^2 - 1} \overset{x\geq 0}{\Rightarrow} y - \sqrt{y^2 - 1} \geq 1 \Rightarrow y - 1 \geq \sqrt{y^2 - 1} \overset{y\geq 1}{\Rightarrow} y^2 - 2y + 1 \geq y^2 - 1 \Rightarrow 2y \leq 2 \Rightarrow y \leq 1,$$

δηλαδή η σχέση $e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$ ισχύει μόνο για $y = 1$.

Άρα, $\operatorname{arccosh} y = x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

Ομοίως, για τη συνάρτηση $\operatorname{arcsinh} y/\mathbb{R}$, προκύπτει ότι $\operatorname{arcsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

Άσκηση. *Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα*

$$I_1 = \int \operatorname{arctg} x dx, \qquad I_2 = \int e^x \cos x dx$$

Λύση.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x' \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1} dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int (e^x)' \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int (e^x)' \sin x dx \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - I_2 + c \end{aligned}$$

Άρα

$$2I_2 = e^x(\cos x + \sin x) + c \Rightarrow I_2 = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + c$$

□

Άσκηση. *Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα*

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+x-2} dx, \qquad I_2 = \int \frac{1}{x^2+4x+8} dx$$

Λύση. Αφού $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, έχουμε ότι

$$I_1 = \int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx = \int \frac{A}{x-1} dx + \int \frac{B}{x+2} dx = A \ln|x-1| + B \ln|x+2| + c.$$

Τα A, B προσδιορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ \Leftrightarrow 1 &= A(x+2) + B(x-1) = (A+B)x + 2A - B = 1 \end{aligned}$$

Θέτοντας $x = 1$, βρίσκουμε $A = 1/3$. Θέτοντας $x = -2$, βρίσκουμε $B = -1/3$.

Για το I_2, έχουμε ότι

$$x^2 + 4x + 8 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4 + 4 = (x+2)^2 + 4.$$

Επομένως, θέτοντας $2y = x + 2$, έχουμε ότι

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \int \frac{2dy}{4y^2+4} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y + c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + c.$$ □

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 27). *Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα*

$$I_1 = \int \frac{x^2+3x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx, \qquad I_2 = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx, \qquad I_3 = \int \sqrt{3x^2+2}dx.$$

Λύση. Για το I_1, θέτοντας $x = 3\sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{x^2+3x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{9\sin^2 t + 9\sin t + 5}{\sqrt{9-9\sin^2 t}} 3\cos t dt = \int (9\sin^2 t + 9\sin t + 5)dt \\
&= \frac{9}{2}\int (1-\cos 2t)dt + 9\int \sin t dt + 5\int dt = \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\sin 2t - 9\cos t + 5t + c \\
&= \frac{19}{2}t - \frac{9}{2}\sin t \cos t - 9\cos t + c \\
&= \frac{19}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} - 3\sqrt{9-x^2} + c
\end{aligned}$$

Για το I_2, θέτοντας $x = 2\cosh t$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{8\cosh^3 t}{\sqrt{4\cosh^2 t - 4}} 2\sinh t dt = 8\int \cosh^3 t dt = 8\int (1+\sinh^2 t)d(\sinh t) \\
&= 8\sinh t + \frac{8}{3}\sinh^3 t + c = \frac{8}{3}(3+\sinh^2 t)\sinh t + c = \frac{8}{3}(2+\cosh^2 t)\sqrt{\cosh^2 - 1} + c \\
&= \frac{1}{3}(8+4\cosh^2 t)\sqrt{4\cosh^2 - 4} + c = \frac{1}{3}(8+x^2)\sqrt{x^2-4} + c
\end{aligned}$$

Για το I_3, θέτοντας $\sqrt{3}x = \sqrt{2}\sinh t$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int \sqrt{2\sinh^2 t + 2}\sqrt{2/3}\cosh t dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int (e^t + e^{-t})^2 dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\int (e^{2t} + e^{-2t} + 2)dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} + 2t) + c = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sinh(2t) + 2t) + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sinh t \cosh t + t) + c = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t} + t) + c \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{3}{2}x^2} + \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right)\right) + c = \frac{x}{2}\sqrt{2+3x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right) + c
\end{aligned}$$

□