ΚΕΦ. 7: ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ
Σημειώσεις Φροντιστηρίου

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να υπολογισθούν με τη βοήθεια του πορίσματος 2.4 τα όρια των ακολουθιών (α_n), (β_n)και (γ_n), όταν:

(i) $\alpha_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$, (ii) $\beta_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{2n^2}$,

(iii) $\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n^2}}$.

ΛΥΣΗ

Θα εφαρμοσθεί ο τύπος

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta-\alpha}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{n} i\right).$$

Σε κάθε μια από τις δοσμένες ακολουθίες πρέπει να προσδιορισθεί η κατάλληλη συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ για την εφαρμογή του τύπου.

(i) $\alpha_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}}$,

οπότε στην περίπτωση αυτή ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x} / [0,1]$ και είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(0 + \frac{1-0}{n} i\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n .$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

(ii) $\beta_n = \dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{2n^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+i^2} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}$,

οπότε ορίζεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \,/\, [0,1]$$

και είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(0+\frac{1-0}{n}i\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty}\beta_n .$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

(iii) $\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n^2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+(i/n)^2}}$

οπότε ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} / [0,1]$ και είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(0 + \frac{1-0}{n} i\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+(i/n)^2}} = \lim_{n\to\infty} \gamma_n .$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, τίθεται $x = \sinh t$, οπότε θα είναι

$dx = \cosh t\, dt$, $\sqrt{1+x^2} = \cosh t$ και $t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, διότι

$$x = \sinh t \Leftrightarrow x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Leftrightarrow e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0 \overset{y=e^t}{\Leftrightarrow} y^2 - 2xy - 1 = 0, \quad y > 0$$

$$\Leftrightarrow y = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Επομένως, προκύπτει ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh t}{\cosh t} dt = [t]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

ΑΣΚΗΣΗ 19(β)

Να ευρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης G με $G(x)=\int_0^{\cos(3x^2+2x+5)}\frac{1}{\sqrt{2-t^2}}dt \,/\, \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x)=\cos(3x^2+2x+5)\,/\,\mathbb{R}$ και $F(x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{2-t^2}}dt\,/\,(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. Επειδή η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,/\,(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ είναι συνεχής, έπεται ότι η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ για κάθε $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. Εξάλλου, επειδή $R(g)\subset(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ορίζεται η σύνθεση των συναρτήσεων g, F και είναι $G=F\circ g$. Τότε, προκύπτει ότι

$$G'(x)=(F\circ g)'(x)=F'(g(x))g'(x)=\frac{-\sin(3x^2+2x+5)(3x^2+2x+5)'}{\sqrt{2-\cos^2(3x^2+2x+5)}}$$

$$=-\frac{6x+2}{\sqrt{1+\sin^2(3x^2+2x+5)}}\sin(3x^2+2x+5).$$

ΑΣΚΗΣΗ 21(α)

Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x \frac{t^3}{t^4+2}dt$,

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $F(x)=\int_0^x \frac{t^3}{t^4+2}dt\,/\,\mathbb{R}$ τότε επειδή η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{x^4+2}\,/\,\mathbb{R}$ είναι συνεχής, έπεται ότι η συνάρτηση $F\,/\,\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=\frac{x^3}{x^4+2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Κατόπιν τούτων, είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x \frac{t^3}{t^4+2}dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{\left(x^4\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{x^4+2}}{4x^3}=\frac{1}{8}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 26

α) Αν για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f/[0,\alpha]$, όπου $\alpha>0$, ισχύει η σχέση $f(\alpha-x)=f(x)$, για κάθε $x\in[0,\alpha]$, να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^\alpha xf(x)dx=\frac{1}{2}\alpha\int_0^\alpha f(x)dx.$$

β) Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $I=\int_0^\alpha xf(x)dx$, οπότε, για $y=\alpha-x$, προκύπτει ότι

$$I=-\int_\alpha^0(\alpha-y)f(\alpha-y)dy=\alpha\int_0^\alpha f(y)dy-\int_0^\alpha yf(y)dy=\alpha\int_0^\alpha f(x)dx-I.$$

Άρα,

$$2I=\alpha\int_0^\alpha f(x)dx$$

οπότε

$$I=\frac{1}{2}\alpha\int_0^\alpha f(x)dx.$$

β) Αν εφαρμοσθεί το α) για τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} / [0, \pi]$$

προκύπτει ότι

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx \qquad (1)$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος θέτουμε $z = \cos x$, οπότε $dz = -\sin x dx$ και άρα,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = -\int_1^{-1} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-1}^{1} \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 31

Να υπολογισθούν οι τιμές των ορισμένων ολοκληρωμάτων:

α) $\int_0^1 x\operatorname{arctg}x\,dx$, β) $\int_1^e x^2(\ln x)^2\,dx$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\int_0^1 x\operatorname{arctg}x\,dx = \int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)'\operatorname{arctg}x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x\right]_0^1 - \int_0^1\frac{x^2}{2}(\operatorname{arctg}x)'dx$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}1 - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[x]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[\operatorname{arctg}x]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(\pi - 2).$$

β) Είναι

$$\int_1^e x^2(\ln x)^2 dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)'(\ln x)^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\left((\ln x)^2\right)' dx$$

$$= \frac{e^3}{3}(\ln e)^2 - \frac{1}{3}(\ln 1)^2 - \frac{2}{3}\int_1^e x^3 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e + \frac{2}{3}\int_1^e \frac{x^3}{3}(\ln x)' dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\frac{e^3}{3}\ln e + \frac{2}{3}\frac{1}{3}\ln 1 + \frac{2}{9}\int_1^e x^3 \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{9}e^3 + \frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{9} + \frac{2}{27}\left(e^3 - 1\right)$$

$$= \frac{1}{27}\left(5e^3 - 2\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 32

Να υπολογισθεί το όριο της ακολουθίας $\left(\alpha_n\right)$ με $\alpha_n = \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x}dx$.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$\alpha_n = \int_0^1 \frac{\left(x^n\right)'}{1+x}dx = \left[\frac{x^n}{1+x}\right]_0^1 - \int_0^1 x^n\left(\frac{1}{1+x}\right)' dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx. \qquad (1)$$

Επειδή $0 \le \frac{x^n}{(1+x)^2} \le x^n$, για κάθε $x \in [0,1]$, προκύπτει ότι

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \le \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\frac{1}{2} \le \alpha_n \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και επομένως είναι $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ (ΦΕΒ 2019). Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $z \in (-2,2)$, για το οποίο ισχύει η σχέση $\frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin\left(4x^2-2\right)}{1+x^2}dx = \sin z$.

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με το Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, αν $f, g / [a,b]$ συνεχείς και η g δεν αλλάζει πρόσημο, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$, τέτοιο ώστε $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

Οι $f, g / [0,1]$, με $f(x) = \sin(4x^2-2)$ και $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος, οπότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$, ώστε

$$I = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin\left(4x^2-2\right)}{1+x^2}dx = \frac{4}{\pi}\int_0^1 f(x)g(x)dx = \frac{4}{\pi}f(\xi)\int_0^1 g(x)dx = \frac{4}{\pi}f(\xi)\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{4}{\pi}f(\xi)\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{4}{\pi}f(\xi)\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = f(\xi) = \sin(4\xi^2-2)$$

Τελικά, θέτοντας $z = 4\xi^2 - 2$, προκύπτει το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ (ΦΕΒ 2018). Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του ολοκληρώματος, να αποδειχθεί η ανισότητα $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3} \le \frac{1}{4} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2+3} / [1,+\infty)$, η οποία είναι φθίνουσα και μη αρνητική, οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος, ισχύει η σχέση

$$\lim_{n\to\infty} S_n \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le f(1) + \lim_{n\to\infty} S_n,$$

όπου

$$S_n = \int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{dx}{x^2+3} \overset{x=y\sqrt{3}}{=} \int_{1/\sqrt{3}}^{n/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}dy}{3y^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}[\text{arctg } y]_{1/\sqrt{3}}^{n/\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\text{arctg}\frac{n}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)$$

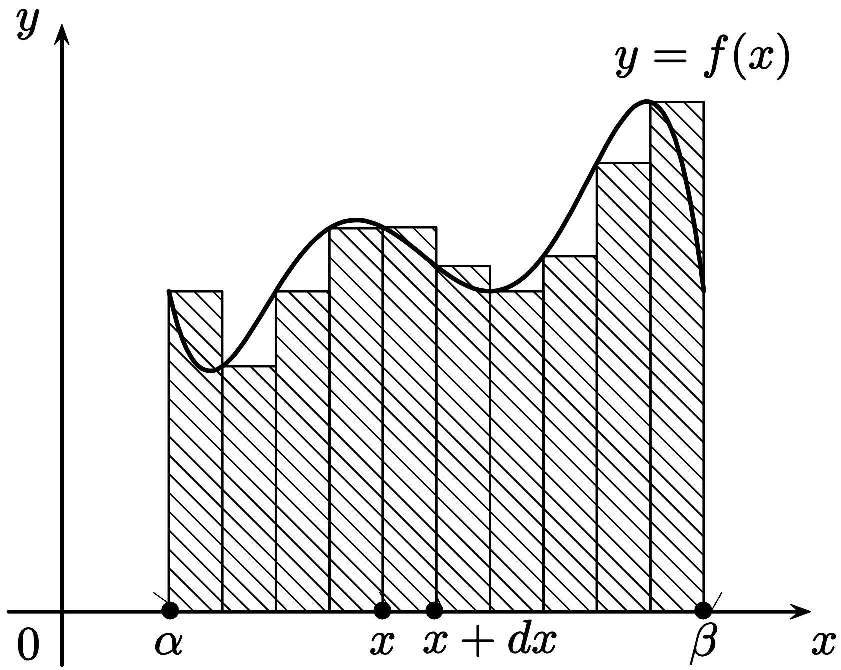
Επειδή $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\lim_{n\to\infty} \text{arctg}\frac{n}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, και $f(1) = \frac{1}{4}$, προκύπτει τελικά η ζητούμενη ανισότητα.

ΕΜΒΑΔΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

Έστω συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ και R το χωρίο του επιπέδου που ορίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν η συνάρτηση f είναι μη αρνητική στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδό Ε του χωρίου R μπορεί να θεωρηθεί ως το «άπειρο» άθροισμα των εμβαδών στοιχειωδών ορθογωνίων με βάση dx και ύψος $f(x)$ όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



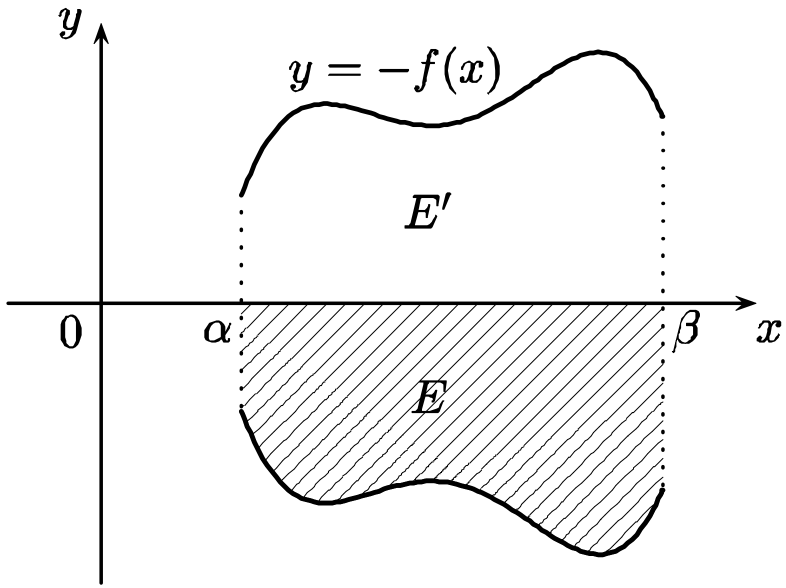
Με άλλα λόγια, το εμβαδό Ε θα είναι το όριο μιας ακολουθίας από ενδιάμεσα αθροίσματα, δηλαδή $\mathrm{E} = \lim_{n\to\infty} S\left(f, \delta_n, \gamma_n\right)$ όπου (δ_n) είναι μια ακολουθία διαμερίσεων του $[\alpha, \beta]$ με $\lambda(\delta_n) \to 0$ και γ_n μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων της δ_n.

Τότε όμως, από τη πρόταση 2.3 θα είναι

$$\mathrm{E} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

2. Αν η συνάρτηση f είναι μη θετική στο $[\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδό Ε του χωρίου R θα ισούται με το αντίστοιχο εμβαδό Ε′ της μη αρνητικής συνάρτησης $-f$, (όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα), οπότε

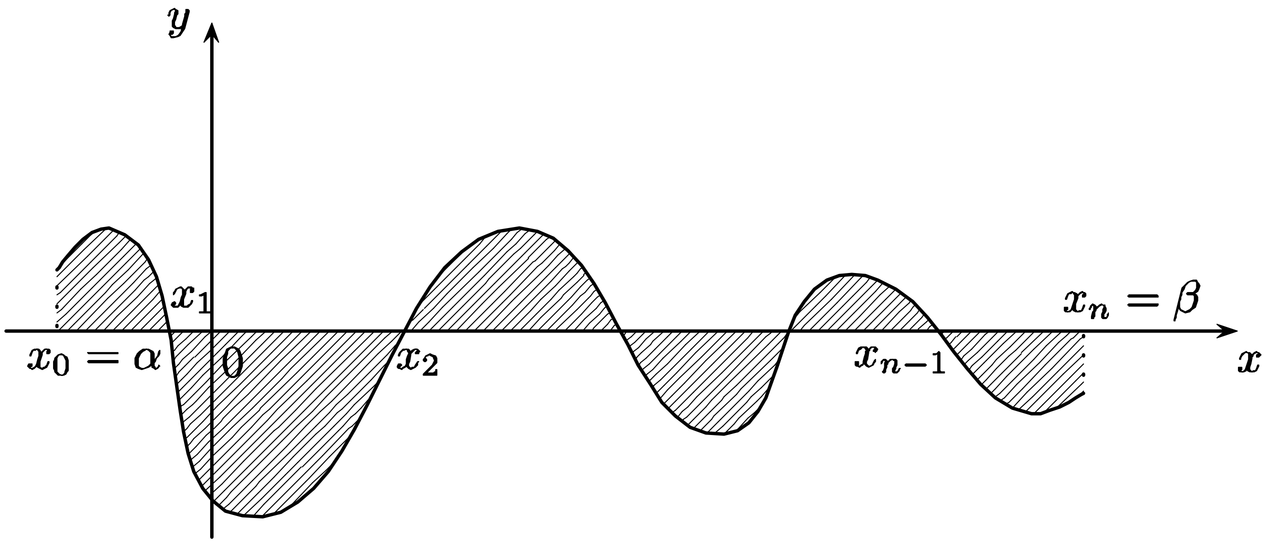
$$\mathrm{E} = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$



3. Αν η συνάρτηση f δεν έχει σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, τότε εφαρμόζοντας τα προηγούμενα στα υποδιαστήματα του $[\alpha,\beta]$ που η f διατηρεί σταθερό πρόσημο, προκύπτει ότι

$$\mathrm{E}=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)\right|dx$$

όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα.

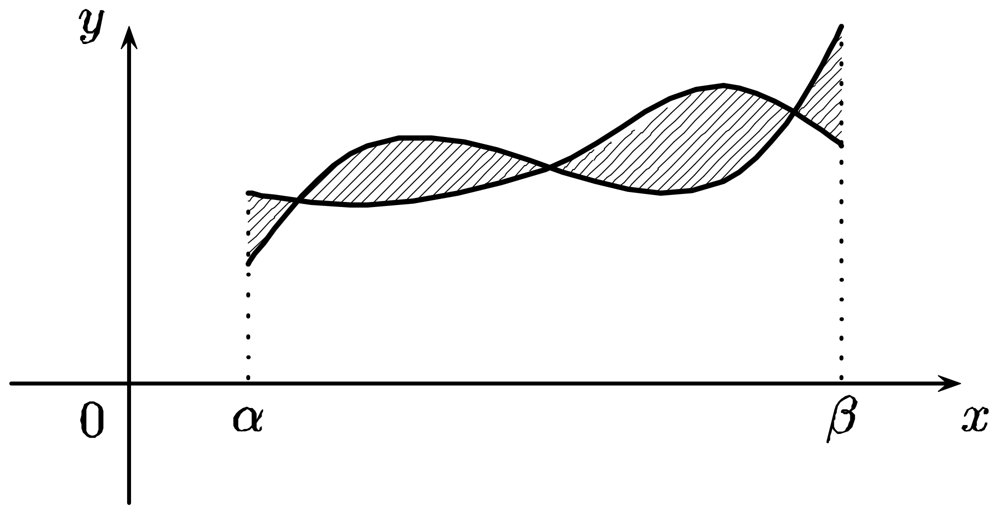


Εμβαδό μεταξύ των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων

Αν $f, g / [\alpha, \beta]$ είναι δυο συνεχείς συναρτήσεις, τότε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές τους παραστάσεις και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ δίδεται από τον τύπο

$$\mathrm{E} = \int_{\alpha}^{\beta} \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



ΑΣΚΗΣΗ 47

Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περιέχεται μεταξύ:

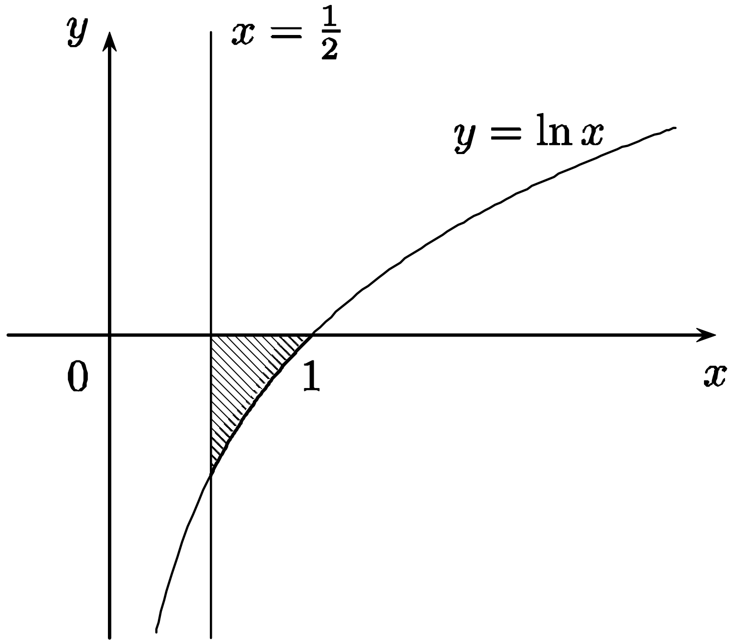
α) Της λογαριθμικής συνάρτησης και των ευθειών $x=\frac{1}{2}$ και $y=0$.

β) Της άνω ημιπεριφέρειας με εξίσωση $x^2+y^2=4$ και της παραβολής $y=\frac{1}{3}x^2$.

γ)Της ημιτονοειδούς καμπύλης, της συνημιτονοειδούς καμπύλης και των ευθειών $x=0$ και $x=\frac{\pi}{2}$.

ΛΥΣΗ

α)

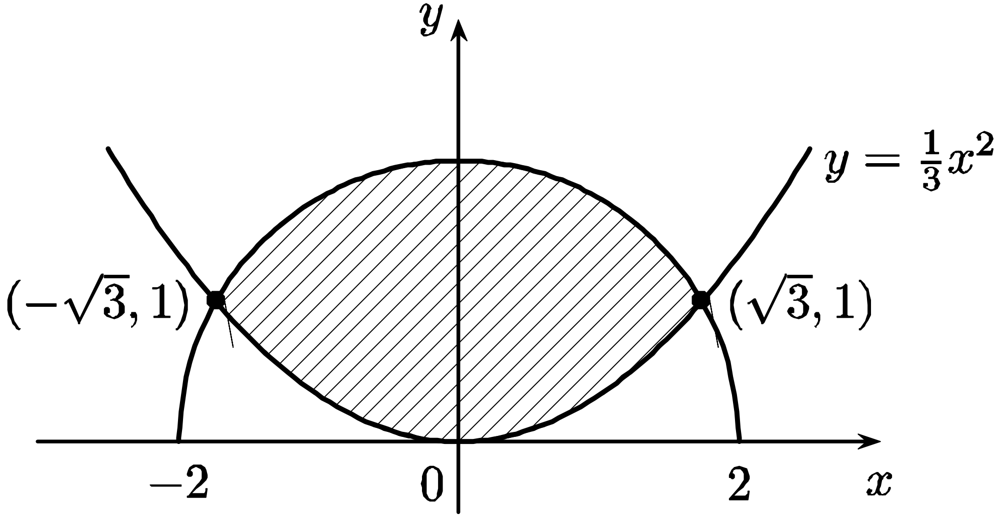


Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\mathrm{E} = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x dx = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} x' \ln x dx = -[x \ln x]_{\frac{1}{2}}^{1} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x(\ln x)' dx$$

$$= -\ln 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 dx = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{e}{2} = \ln\sqrt{\frac{e}{2}}.$$

β)



Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = \dfrac{x^2}{3} \end{cases}$$

προκύπτει ότι οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία $\left(-\sqrt{3},1\right)$ και $\left(\sqrt{3},1\right)$. Έτσι, το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{3} \right) dx$$

ή, ισοδύναμα,

$$E = 2\left(\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{3}\,dx \right) \quad (1)$$

Για τον υπολογισμό του πρώτου ολοκληρώματος, θέτουμε

$$x = 2\sin t,$$

οπότε είναι $\sqrt{4-x^2} = 2\cos t$, $dx = 2\cos t dt$ και

$$2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos t)2\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} [1+\cos 2t]dt = 4\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

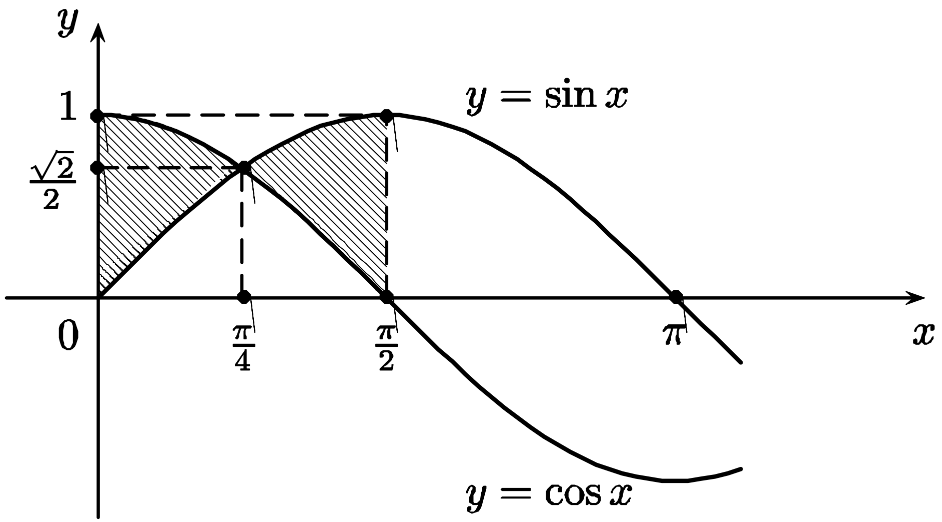
οπότε τελικά,

$$2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx = 4\frac{\pi}{3}+\sqrt{3} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\mathrm{E}=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}-2\left[\frac{x^3}{9}\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

γ)



Στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ οι συναρτήσεις $y=\cos x$ και $y=\sin x$ τέμνονται μόνο στο σημείο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\mathrm{E}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx=[\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}-[\sin x+\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(0+1)-(1-0)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Εμβαδό χωρίου που ορίζεται από συναρτήσεις σε παραμετρική μορφή

Αν μια συνάρτηση (ή γενικότερα καμπύλη) δίδεται σε παραμετρική μορφή, δηλαδή

$$x = x(t), y = y(t) \text{ όπου } t \in [c, d]$$

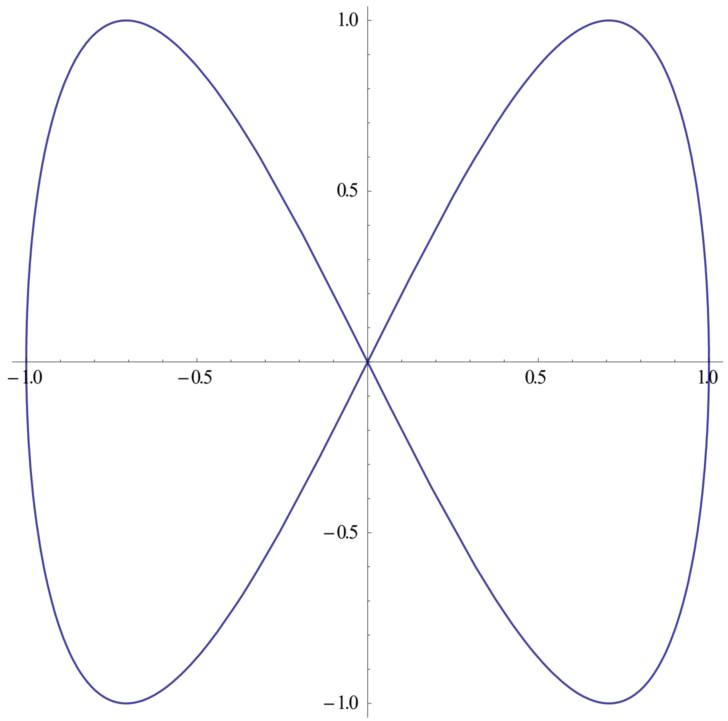
τότε το εμβαδό Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ δίδεται από τον τύπο

$$\mathrm{E} = \int_c^d y(t)\, x'(t)\, dt$$

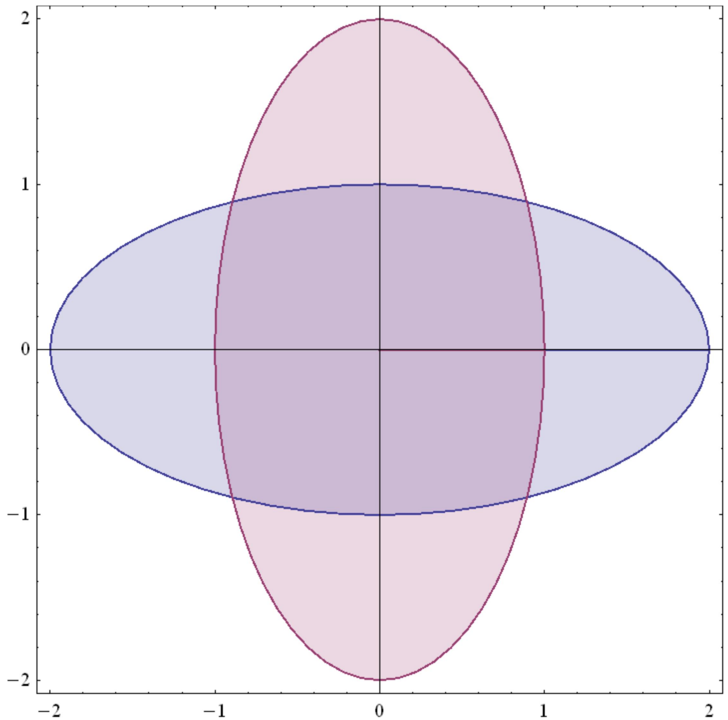
υπό την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις $x'(t), y(t)$ είναι συνεχείς, μη αρνητικές και ισχύει ότι $x(c) = \alpha$ και $x(d) = \beta$.

Ο προηγούμενος τύπος προκύπτει άμεσα, δεδομένου ότι

$$\mathrm{E} = \int_\alpha^\beta y dx \text{ και } dx = x'(t)\, dt.$$



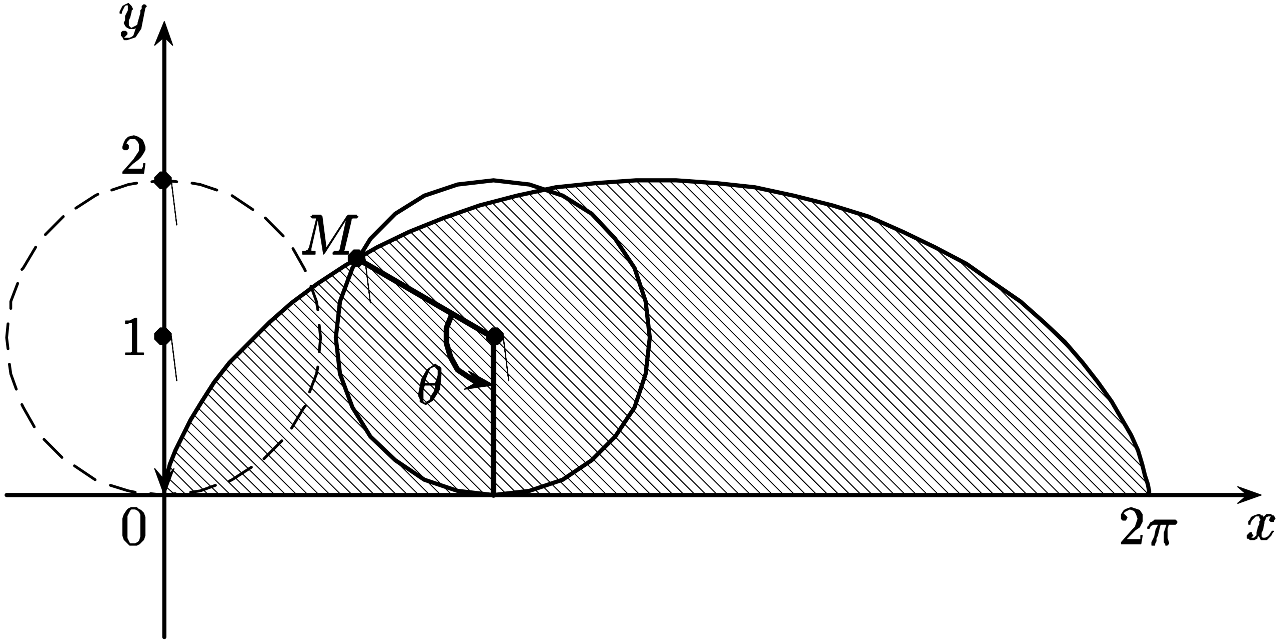
ParametricPlot[{Sin[t],Sin[2t]},
{t,0,2Pi}]



ParametricPlot[{{2*r*Cos[*t*],*r*Sin[*t*]},
{*r*Cos[*t*],2*r*Sin[*t*]}},{*t*,0,2Pi},{*r*,0,1},
Mesh→False,PlotLegends→Automatic]

ΑΣΚΗΣΗ 50

Να υπολογισθεί το εμβαδό μιας αψίδας της **κυκλοειδούς καμπύλης** με εξισώσεις $x=\theta-\sin\theta$, $y=1-\cos\theta$, όπου $\theta\in[0,2\pi]$.



ΛΥΣΗ

Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\mathrm{E}=\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)(\theta-\sin\theta)'d\theta=\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}1d\theta-2\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta+\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta$$

$$=[\theta]_0^{2\pi}-2[\sin\theta]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

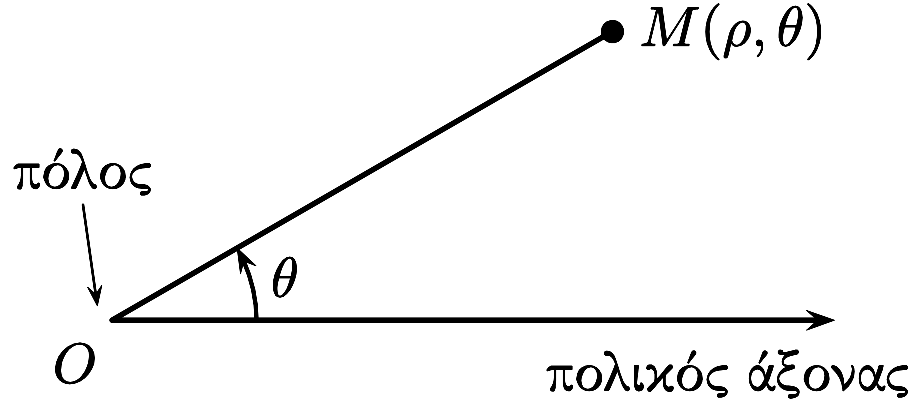
$$=2\pi-0-2(\sin 2\pi-\sin 0)+\frac{1}{2}[\theta]_0^{2\pi}+\frac{1}{4}[\sin 2\theta]_0^{2\pi}$$

$$=2\pi+\pi+\frac{1}{4}(\sin 4\pi-\sin 0)=3\pi\,.$$

Πολικές συντεταγμένες

Ως γνωστό, η θέση ενός σημείου Μ του επιπέδου καθορίζεται από το ζεύγος (x, y) των καρτεσιανών του συντεταγμένων. Ένας άλλος τρόπος για τον καθορισμό της θέσης των σημείων του επιπέδου είναι ο εξής:

Θεωρούμε ένα σημείο Ο του επιπέδου το οποίο ονομάζεται **πόλος** και ένα ημιάξονα με αφετηρία το Ο, ο οποίος ονομάζεται **πολικός άξονας**. Κατόπιν τούτου η θέση ενός σημείου Μ του επιπέδου καθορίζεται από το ζεύγος (ρ, θ) όπου ρ είναι η απόσταση του σημείου Μ από τον πόλο Ο και θ η γωνία που σχηματίζει ο πολικός άξονας με την ημιευθεία ΟΜ.

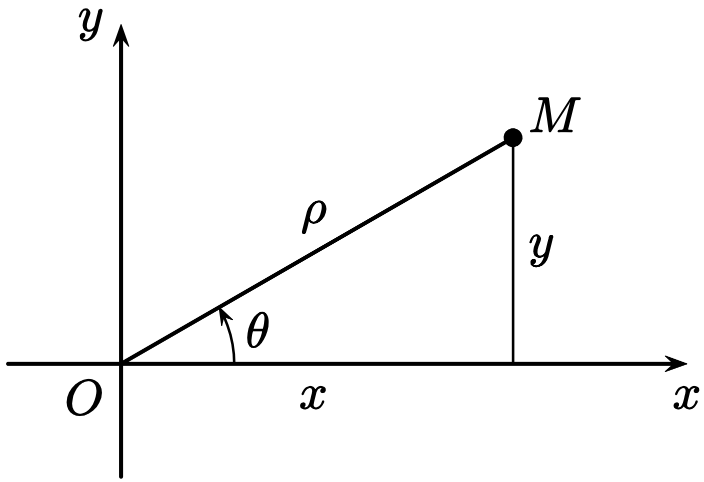


Τα στοιχεία του ζεύγους (ρ,θ) ονομάζονται **πολικές συντεταγμένες** του σημείου Μ. Προκειμένου να συσχετισθούν οι πολικές και οι καρτεσιανές συντεταγμένες λαμβάνεται ως πόλος η αρχή των αξόνων και ως πολικός άξονας ο ημιάξονας Ox.

Τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} \mathbf{x = \rho\cos\theta} \\ \mathbf{y = \rho\sin\theta} \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}} \\ \mathbf{tg\theta = \dfrac{y}{x}} \end{cases}$$

όπως προκύπτει άμεσα από το επόμενο ορθογώνιο τρίγωνο.



Είναι φανερό ότι οι πολικές συντεταγμένες ενός σημείου Μ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένες, αφού τα σημεία με συντεταγμένες (ρ,θ) και $(\rho,\theta+2n\pi)$, όπου $n\in\mathbb{Z}$, συμπίπτουν.

Έτσι, προκειμένου να υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των σημείων του επιπέδου (εκτός του Ο, όπου $\rho=0$) και των πολικών συντεταγμένων τους, θα θεωρούμε ότι $\rho>0$ και ότι το θ ανήκει σε ένα διάστημα μήκους 2π, συνήθως το $[0,2\pi)$ ή το $(-\pi,\pi]$.

Μια καμπύλη C στο επίπεδο μπορεί να περιγραφεί από την πολική της εξίσωση $\psi(\rho,\theta)=0$, έτσι ώστε κάθε σημείο του επιπέδου ανήκει στην καμπύλη C αν και μόνο αν οι πολικές του συντεταγμένες (ρ,θ) ικανοποιούν την εξίσωση αυτή.

Παραδείγματα

1. Η πολική εξίσωση του κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας r είναι $\rho = r$,

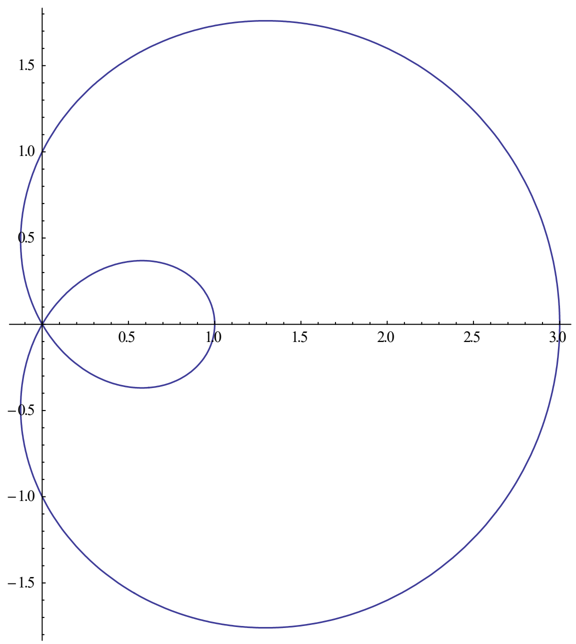
2. η πολική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Ο και σχηματίζει γωνία φ με το πολικό άξονα είναι $\theta = \varphi$

3. η πολική εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής είναι $\rho^2 \cos 2\theta = \alpha^2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Άλλες καμπύλες που η πολική τους εξίσωση είναι απλούστερη από την καρτεσιανή είναι:

1. Οι **καρδιοειδείς καμπύλες** με πολικές εξισώσεις της μορφής

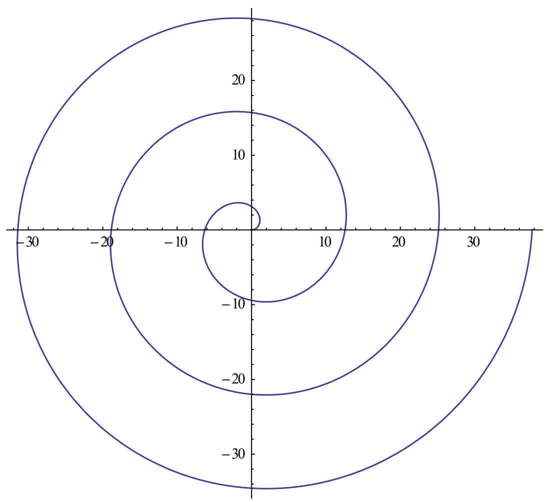
$$\rho = \beta + \alpha \cos\theta \text{ ή } \rho = \beta + \alpha \sin\theta$$



PolarPlot[1+2*Cos[t],{t,0,2*Pi}]

2. Η **έλικα του Αρχιμήδη** με πολική εξίσωση

$$\rho = \alpha\theta$$

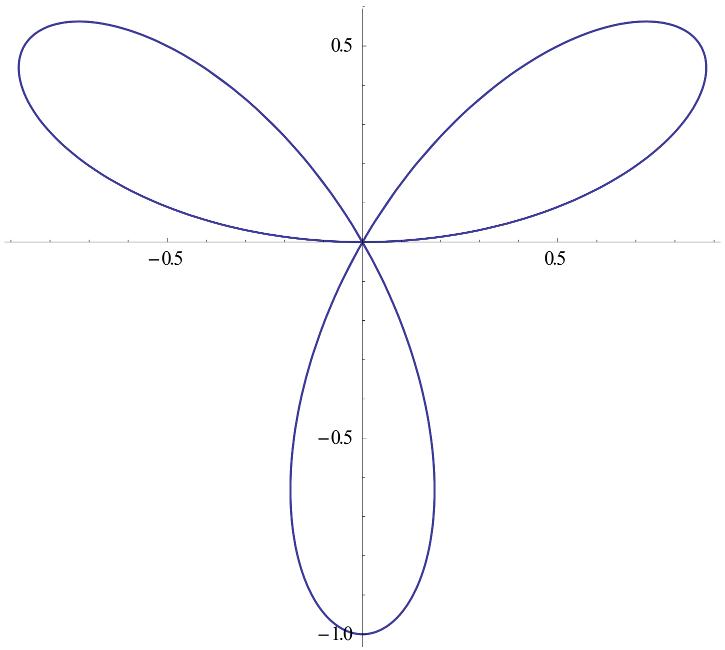


$$\mathrm{PolarPlot}[2*t,\{t,0,6*\mathrm{Pi}\}]$$

3. Ο **λημνίσκος** με πολικές εξισώσεις

$$\rho^2 = \alpha \cos \kappa\theta \text{ ή } \rho^2 = \alpha \sin \kappa\theta \text{ ή } \rho = \alpha \cos \kappa\theta \text{ ή } \rho = \alpha \sin \kappa\theta,$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{N}^*$.



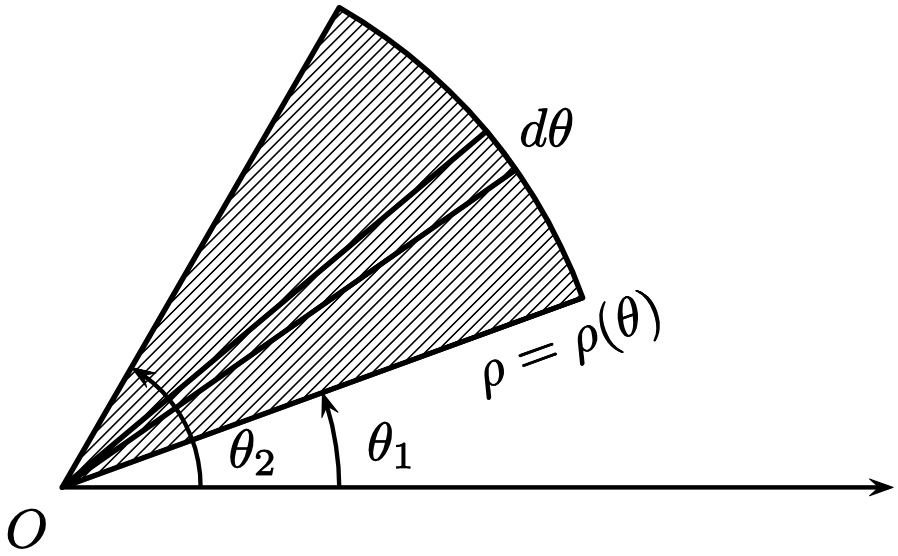
PolarPlot[Sin[3*t*],{*t*,0,2∗Pi}]

Εμβαδό χωρίου σε πολικές συντεταγμένες

Το εμβαδό Ε του χωρίου του επιπέδου, στο σύστημα των πολικών συντεταγμένων, που περικλείεται από μια καμπύλη C η οποία έχει πολική εξίσωση $\rho = \rho(\theta)$ όπου $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ με $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le 2\pi$ δίδεται από τον τύπο

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)\, d\theta,$$

αφού το εμβαδό dE του στοιχειώδους χωρίου προκύπτει από το γνωστό τύπο του εμβαδού κυκλικού τομέα $d\mathrm{E} = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$.



ΑΣΚΗΣΗ 52

α) Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περιέχεται μεταξύ της παραβολής

$$\rho = \frac{2}{1+\cos\theta}$$

και των ημιευθειών $\theta = 0$ και $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

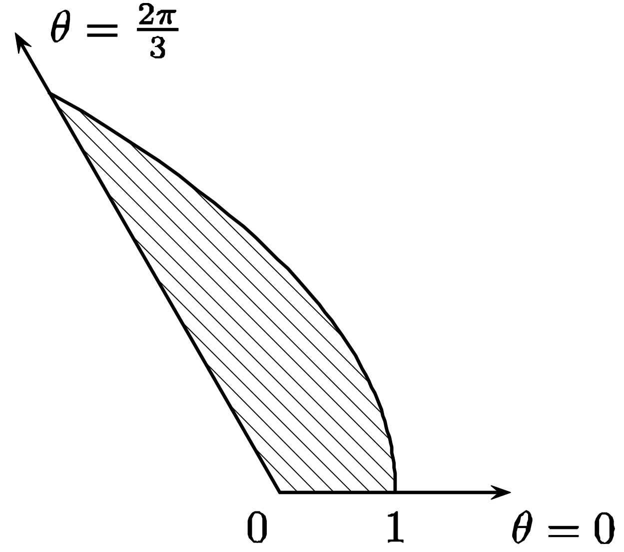
β) Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη καρδιοειδή καμπύλη με εξίσωση

$$\rho = \sqrt{2}(1+\cos\theta),\ \theta \in [0, 2\pi].$$

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου το οποίο περικλείεται από το λημνίσκο με εξίσωση $\rho^2 = \cos 2\theta,\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

ΛΥΣΗ

α)



Το ζητούμενο εμβαδό είναι

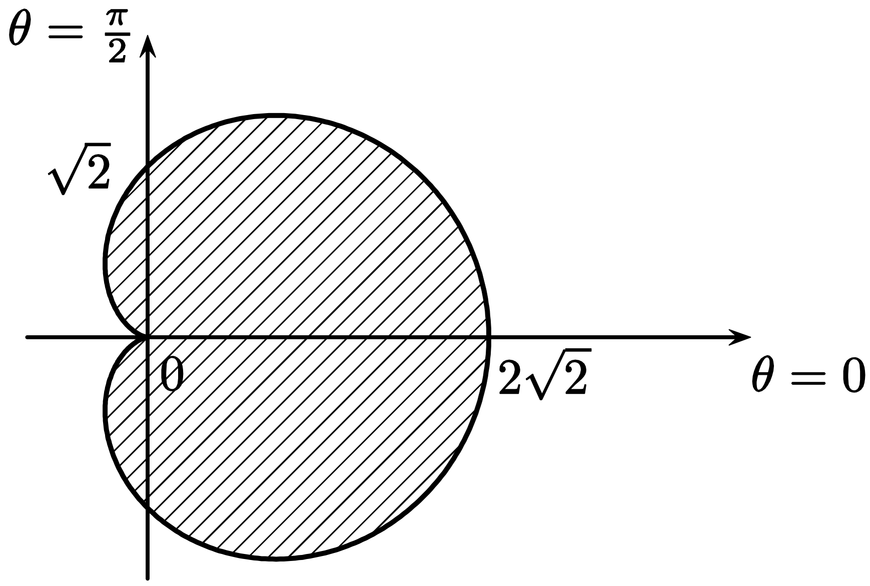
$$E = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{4}{(1+\cos\theta)^2}d\theta \quad = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left[1 + tg^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}d\theta.$$

Αν τεθεί $y = tg\frac{\theta}{2}$, προκύπτει ότι $dy = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta$, οπότε

$$E = \int_0^{\sqrt{3}}\left(1+y^2\right)dy = \left[y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,.$$

β)



Το ζητούμενο εμβαδό θα είναι

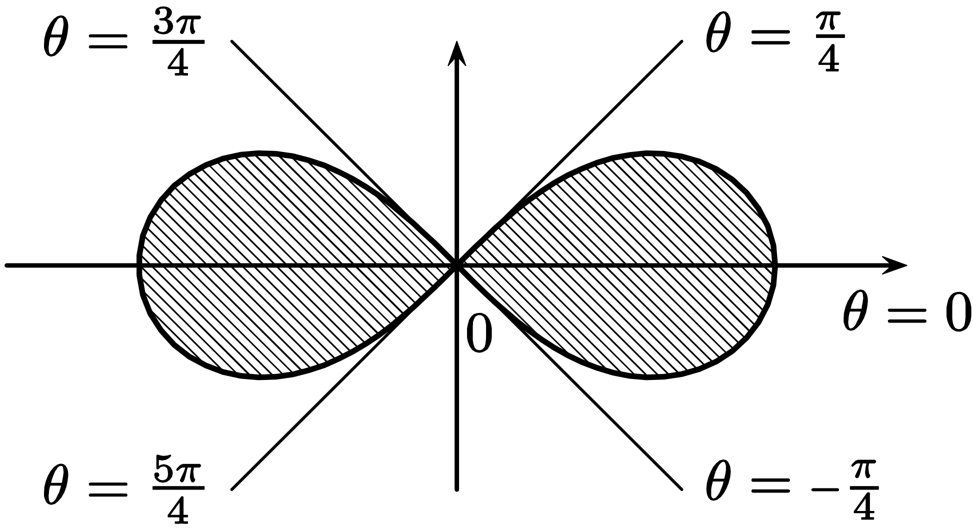
$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} 1d\theta + 2\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta + \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta$$

$$=2\pi + 2[\sin\theta]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=2\pi + \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = 3\pi.$$

γ)



Επειδή, από τη συμμετρία του σχήματος, τα φύλλα του λημνίσκου έχουν ίσο εμβαδό, το συνολικό εμβαδό θα είναι

$$E = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} [\sin 2\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

7. ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

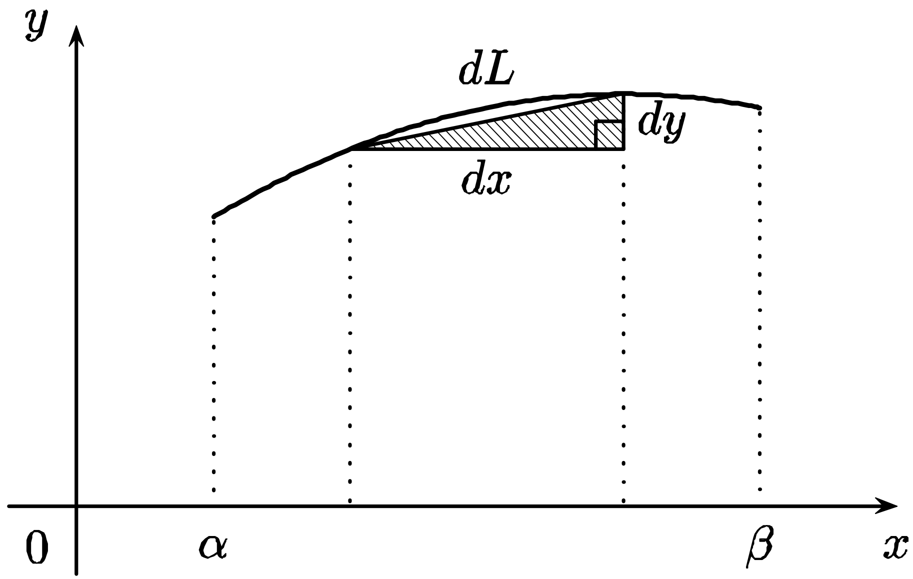
Μήκος τόξου της γραφικής παράστασης συνάρτησης

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ με παράγωγο συνεχή. Τότε, το μήκος τόξου της γραφικής παράστασης ισούται με

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx,$$

αφού το μήκος dL του στοιχειώδους τόξου μπορεί να θεωρηθεί ίσο με το μήκος της υποτείνουσας του γραμμοσκιασμένου τριγώνου του επόμενου σχήματος, οπότε θα ισχύει ότι

$$dL=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$



ΑΣΚΗΣΗ 55

Να υπολογισθεί το μήκος του τόξου της καμπύλης

$$y = \cosh x \,/\, [0, \ln 3].$$

ΛΥΣΗ

Το ζητούμενο μήκος τόξου θα είναι

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\ln 3} \sqrt{1 + \left((\cosh x)'\right)^2}\, dx \\
&= \int_0^{\ln 3} \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx \\
&= \int_0^{\ln 3} \cosh x\, dx = [\sinh x]_0^{\ln 3} \\
&= \sinh(\ln 3) - \sinh 0 \\
&= \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Μήκος τόξου καμπύλης σε παραμετρική μορφή

Το μήκος του τόξου μιας καμπύλης που δίδεται σε παραμετρική μορφή

$$x = x(t),\ y = y(t) \text{ όπου } t \in [c,d],$$

δίδεται από τον τύπο $L = \int_c^d \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$

υπό την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ είναι **παραγωγίσιμες με παραγώγους συνεχείς**.

Παράδειγμα

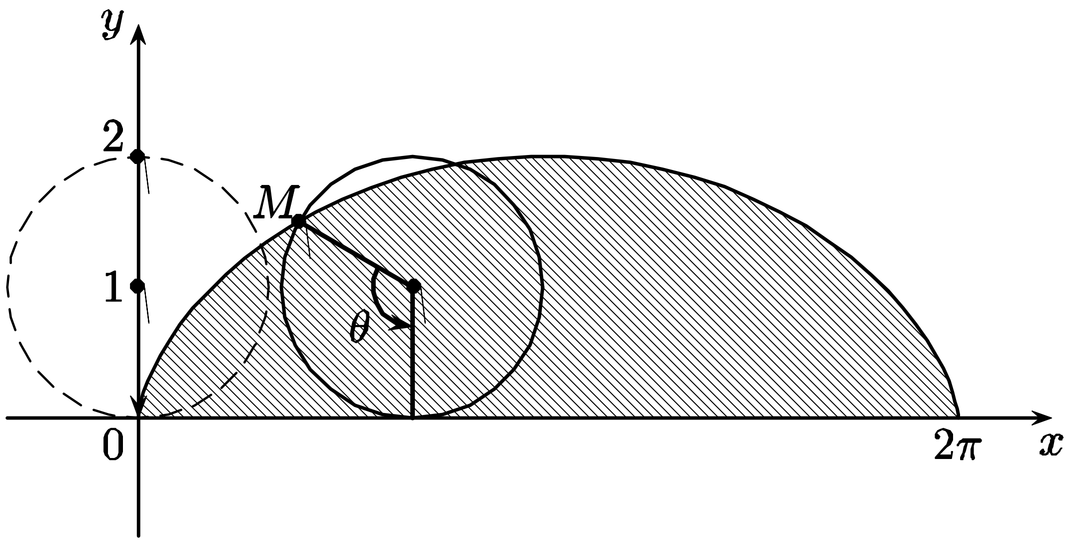
Το μήκος τόξου L ενός κύκλου ακτίνας r που αντιστοιχεί στην επίκεντρη γωνία φ είναι ίσο με $r \cdot \varphi$.

Πραγματικά, θεωρώντας την παραμετρική μορφή του τόξου αυτού

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ t \in [0,\varphi],$$

προκύπτει ότι

$$\mathrm{L} = \int_0^{\varphi} \sqrt{\left((r\cos t)'\right)^2 + \left((r\sin t)'\right)^2}\,dt = \int_0^{\varphi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,dt = r\int_0^{\varphi} 1dt = r \cdot \varphi.$$



ΑΣΚΗΣΗ 56

Να υπολογισθεί το μήκος του τόξου μιας αψίδας του κυκλοειδούς με εξισώσεις:

$x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$, όπου $\theta \in [0, 2\pi]$.

ΛΥΣΗ

Το ζητούμενο μήκος τόξου είναι

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos\theta)}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 4(-\cos\pi + \cos 0) = 8.$$

Μήκος τόξου καμπύλης που ορίζεται σε πολικές συντεταγμένες

Το μήκος τόξου L μιας επίπεδης καμπύλης C που ορίζεται στο σύστημα πολικών συντεταγμένων, με πολική εξίσωση $\rho = \rho(\theta)$, όπου $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ με $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le 2\pi$ δίδεται από τον τύπο

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)\right)^2} d\theta \qquad (1)$$

Πραγματικά, καμπύλη C γράφεται στην παραμετρική μορφή

$$x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta,\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta,\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

οπότε χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο τύπο του μήκους τόξου για συναρτήσεις σε παραμετρική μορφή προκύπτει ότι

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\left(\rho(\theta)\cos\theta\right)'\right)^2 + \left(\left(\rho(\theta)\sin\theta\right)'\right)^2} d\theta \qquad (2)$$

Αλλά

$$\left(\left(\rho(\theta)\cos\theta\right)'\right)^2+\left(\left(\rho(\theta)\sin\theta\right)'\right)^2$$

$$=\left(\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta\right)^2+\left(\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta\right)^2$$

$$=\left(\rho'(\theta)\right)^2\cos^2\theta+\left(\rho(\theta)\right)^2\sin^2\theta-2\rho(\theta)\rho'(\theta)\cos\theta\sin\theta+$$

$$\left(\rho'(\theta)\right)^2\sin^2\theta+\left(\rho(\theta)\right)^2\cos^2\theta+2\rho(\theta)\rho'(\theta)\cos\theta\sin\theta$$

$$=\left(\rho'(\theta)\right)^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+\left(\rho(\theta)\right)^2\left(s\,\mathrm{in}^2\theta+\cos^2\theta\right)$$

$$=\left(\rho'(\theta)\right)^2+\left(\rho(\theta)\right)^2.$$

Επομένως, από τη σχέση (2) προκύπτει άμεσα ο τύπος (1).

ΑΣΚΗΣΗ 58

Να υπολογισθεί το μήκος του τόξου της έλικας του Αρχιμήδη, με εξίσωση ρ = αθ, θ ∈ [0, 2π], $\alpha > 0$

ΛΥΣΗ

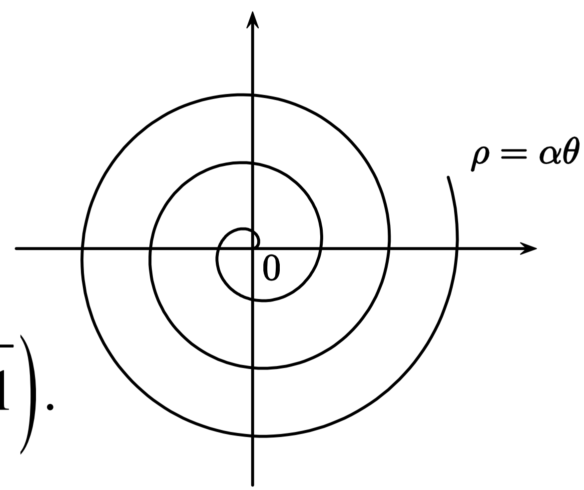
Το ζητούμενο μήκος της έλικας του Αρχιμήδη του παραπάνω σχήματος είναι

$$\mathrm{L} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha^2\theta^2 + \alpha^2}\, d\theta = \alpha \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\, d\theta \qquad (1)$$

Αν τεθεί $\theta = \sinh t$, τότε είναι $d\theta = \cosh t dt$ και $\sqrt{\theta^2 + 1} = \sqrt{\sinh^2 t + 1} = \cosh t$,

οπότε $\int \sqrt{\theta^2 + 1}\, d\theta = \int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1 + \cosh 2t) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sinh 2t$

$= \frac{1}{2}(t + \sinh t \cosh t) = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsinh}\theta + \theta\sqrt{\theta^2 + 1})$



Κατόπιν τούτων, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$L = \frac{\alpha}{2}\left(\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right) + 2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1}\right).$$

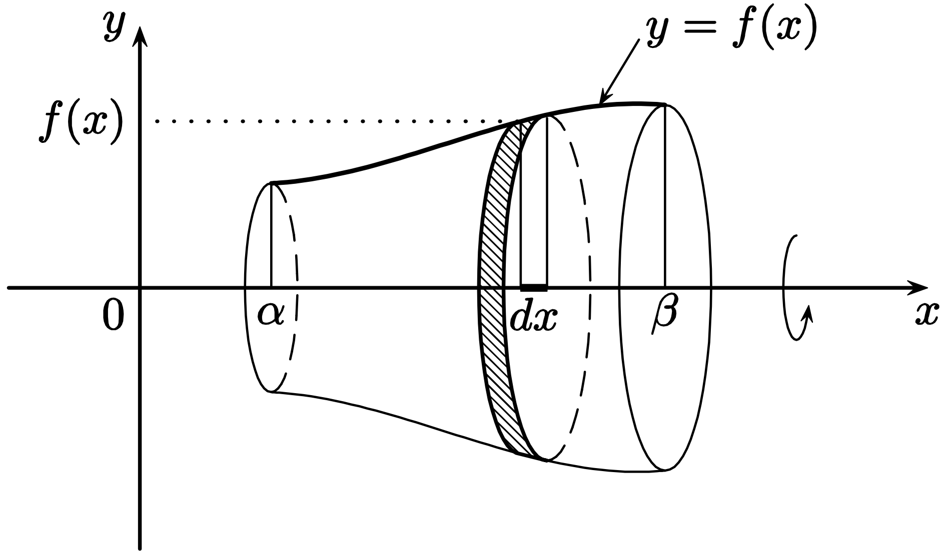
8. ΟΓΚΟΣ ΣΤΕΡΕΟΥ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Έστω μια μη αρνητική συνεχής συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ και R το χωρίο που ορίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

Τότε ο όγκος V του στερεού που προκύπτει με περιστροφή του χωρίου R γύρω από τον άξονα των τετμημένων ισούται με

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(x)\right)^2dx,$$

αφού ο όγκος dV του στοιχειώδους στερεού μπορεί να θεωρηθεί ίσος με τον όγκο του κυλίνδρου, ύψους dx και ακτίνας βάσης f(x), του επόμενου σχήματος, οπότε θα ισχύει $dV=\pi\left(f(x)\right)^2dx$.

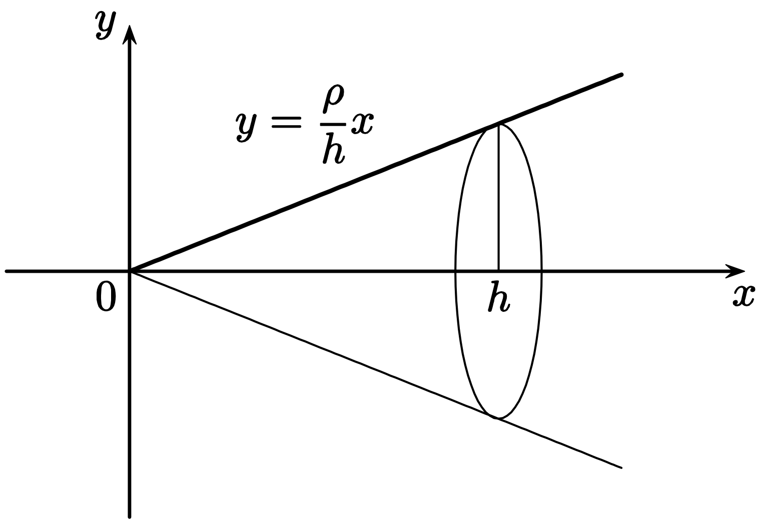


Παραδείγματα

Α) Ο κώνος ύψους h και ακτίνας βάσης ρ μπορεί να προκύψει με περιστροφή του τριγώνου που ορίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\rho}{h} / [0,h]$$

με τον άξονα των τετμημένων και την ευθεία $x = h$, γύρω από τον άξονα των τετμημένων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



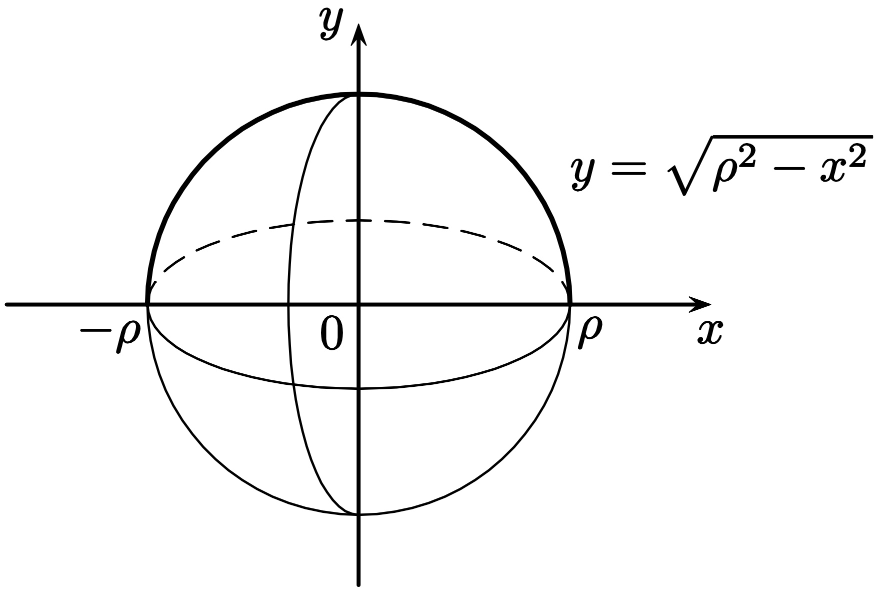
Κατόπιν τούτου, είναι

$$\mathrm{V} = \pi \int_0^h \left(\frac{\rho}{h} x \right)^2 dx = \frac{\pi\rho^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} \pi \rho^2 h.$$

Β) Η σφαίρα ακτίνας ρ μπορεί να προκύψει με περιστροφή του άνω ημικυκλίου που ορίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\sqrt{\rho^2-x^2}\ /\left[-\rho,\rho\right]$$

με τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x=-\rho$, $x=\rho$ γύρω από τον άξονα των τετμημένων, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Κατόπιν τούτων, είναι

$$V=\pi\int_{-\rho}^{\rho}\left(\sqrt{\rho^2-x^2}\right)^2dx$$

$$=\pi\left[\rho^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-\rho}^{\rho}=\pi\left(\rho^3-\frac{\rho^3}{3}-\left(-\rho^3+\frac{\rho^3}{3}\right)\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi\rho^3.$$

Ο τύπος του όγκου εκ περιστροφής εφαρμόζεται και σε πιο σύνθετες περιπτώσεις. Έτσι, αν $f, g / [\alpha, \beta]$είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις με $0 \leq f(x) \leq g(x)$για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε ο όγκος V του στερεού που προκύπτει με περιστροφή του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g και των ευθειών $x = \alpha$, $x = \beta$ δίδεται από τον τύπο

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \left(g^2(x) - f^2(x) \right) dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 59

Να ευρεθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει με περιστροφή περί τον άξονα των τετμημένων, του χωρίου της συνάρτησης

$$f(x) = \cos x \,/\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

ΛΥΣΗ

Ο ζητούμενος όγκος του στερεού που παράγεται δια περιστροφής (βλ. σχήμα) είναι

$$V = \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$