ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΚΕΦ.8: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Σημειώσεις Φροντιστηρίου

Τμήμα Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Γενικά

Έστω συνεχής συνάρτηση $f/[a,b]$, με $f(a)f(b) < 0$. Τότε, υπάρχει $\xi \in (a,b)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$. Οι επόμενες μέθοδοι προσεγγίζουν επαναληπτικά τη ρίζα ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$, ορίζοντας μια ακολουθία σημείων (x_n), με $x_n \to \xi$.
Ως κριτήριο διακοπής των επαναλήψεων, τίθεται η συνθήκη να είναι το σφάλμα της προσέγγισης μικρότερο (ή ίσο) από κάποιο προκαθορισμένο αριθμό $\epsilon > 0$, ή $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$. Ως σφάλμα, θεωρείται κάποια από τις ποσότητες $|x_n - \xi|$ και $|f(x_n)|$.

Ορισμός

Η ακολουθία (x_n), με $x_n \to \xi$, λέμε ότι συγκλίνει με σύγκλιση p-τάξης, αν

$$p = \min\{k \in \mathbb{N}^* : \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \xi}{(x_n - \xi)^k} \neq 0\}.$$

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται και για $k \in \mathbb{R}$, με $k \geq 1$.

Μέθοδος διχοτόμησης

Το διάστημα στο οποίο ανήκει η ρίζα ξ περιορίζεται διαρκώς, βάσει της ακολουθίας διαστημάτων $([a_n, b_n])$, με $[a_0, b_0] = [a, b]$ και

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, x_n], & \text{αν } f(a_n)f(x_n) < 0, \\ [x_n, b_n], & \text{αν } f(x_n)f(b_n) < 0, \end{cases} \quad \text{όπου } x_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Για το σφάλμα $|x_n - \xi|$ της μεθόδου μετά τη n-οστή επανάληψη ισχύει ότι

$$|x_n - \xi| < \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Οι επαναλήψεις σταματούν όταν $f(x_n) = 0$ ή όταν $\dfrac{b-a}{2^{n+1}} < \epsilon$.

Μέθοδος εσφαλμένης θέσης (Regula Falsi)

Χρησιμοποιείται επίσης μια ακολουθία διαστημάτων $([a_n, b_n])$, η οποία ορίζεται παρόμοια με την μέθοδο διχοτόμησης, με τη διαφορά ότι

$$x_n = \frac{f(b_n)a_n - f(a_n)b_n}{f(b_n) - f(a_n)},$$

δηλαδή το $(x_n, 0)$ είναι το σημείο τομής του οριζόντιου άξονα με τη ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(a_n, f(a_n))$ και $(b_n, f(b_n))$.

Αποδεικνύεται ότι αν η ρίζα ξ είναι μοναδική, τότε η μέθοδος συγκλίνει.

Ως κριτήριο διακοπής, χρησιμοποιείται η συνθήκη $|f(x_n)| < \epsilon$.

Συνέχεια κατά Lipschitz

Ορισμός

Η συνάρτηση g/A λέμε ότι ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz (ή ότι είναι Lipschitz συνεχής), αν υπάρχει $L \geq 0$ τέτοιο ώστε

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \qquad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in A.$$

Αν επιπλέον είναι $L < 1$, τότε η g ονομάζεται συστολή.

- Αν υπάρχει $L \geq 0$, τότε g/A ομοιόμορφα συνεχής.
- Αν η $g/[a, b]$ έχει συνεχή παράγωγο, τότε υπάρχει $L \geq 0$ για την $g/[a, b]$.
- Αν επιπλέον υπάρχει $L < 1$, με $|g'(x)| \leq L$, για κάθε $x \in [a, b]$, τότε η $g/[a, b]$ είναι συστολή με σταθερά L.

Άσκηση (Φεβρουάριος 2016)

Άσκηση

Αν $f/[a,b]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $F/[a,b]$ με $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz.

Λύση.

Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει $L \geq 0$ ώστε για κάθε $x_1, x_2 \in [a,b]$ να ισχύει $|F(x_1)-F(x_2)| \leq L|x_1-x_2|$.
Αφού f ολοκληρώσιμη, έπεται ότι είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M \geq 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$, για κάθε $x \in [a,b]$.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $x_1 < x_2$, οπότε

$$|F(x_1)-F(x_2)| = |\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \leq \int_{x_1}^{x_2} Mdt$$
$$= M(x_2-x_1) = M|x_1-x_2|.$$

Άρα η F ικανοποιεί την παραπάνω σχέση με $L=M$. □

Μέθοδος σταθερού σημείου

Επιλέγεται συνεχής συνάρτηση $g/[a,b]$, τέτοια ώστε $f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=x$, και η ακολουθία σημείων (x_n), με

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad x_0 \in [a,b]. \tag{0.1}$$

Πρόταση (1.2)

Αν $g/[a,b]$ συστολή με σταθερά L και $g([a,b]) \subseteq [a,b]$, τότε η g έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο $\xi \in [a,b]$ και η ακολουθία $x_{n+1} = g(x_n)$, με $x_0 \in [a,b]$, συγκλίνει στο ξ.

Για το σφάλμα ισχύει ότι

$$|x_n - \xi| \leq \frac{L^{n-k}}{1-L}|x_{k+1} - x_k|, \qquad 0 \leq k < n.$$

Ως κριτήριο διακοπής, χρησιμοποιείται η συνθήκη $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$.

Άσκηση (Ιανουάριος 2015) (βλ. λυμένη άσκηση 11)

Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g/[1,2]$ *με* $g(x) = 3\sqrt{17 - x^3}/8$ *έχει ένα ακριβώς σταθερό σημείο* ξ *και ότι η ακολουθία* $x_{n+1} = g(x_n)$, *με* $x_0 \in [1,2]$, *συγκλίνει στο* ξ. *Στη συνέχεια να ευρεθεί* $n \in \mathbb{N}^*$ *ώστε* $|x_n - \xi| < 0.02$, *όταν* $x_0 = 1$.

Λύση.

Είναι $g'(x) = \frac{-9x^2}{16\sqrt{17-x^3}} < 0$. Επιπλέον η $|g'|$ είναι γνησίως αύξουσα (προκύπτει από την παράγωγό της) οπότε για κάθε $x \in [1,2]$ είναι $|g'(x)| \leq |g'(2)| = 3/4 < 1$. Επομένως, η g είναι συστολή με σταθερά $L = 3/4$.

Επιπλέον, αφού g γνησίως φθίνουσα, έπεται ότι

$$1 < 9/8 = g(2) \leq g(x) \leq g(1) = 3/2 < 2.$$

Άσκηση (Ιανουάριος 2015) (βλ. λυμένη άσκηση 11)

Λύση (συνέχεια).

Άρα $g([1,2]) \subseteq [1,2]$, οπότε, από την Πρόταση 1.2, έπεται ότι η g έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο $\xi \in [1,2]$ και ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει σε αυτό.
Για τον προσδιορισμό του n, εφαρμόζοντας τον τύπο

$$|x_n - \xi| \leq \frac{L^{n-k}}{1-L}|x_{k+1} - x_k|$$

για $k = 0$ και για $x_0 = 1$, οπότε $x_1 = g(x_0) = 3/2$, προκύπτει ότι

$$|x_n - \xi| \leq 4\left(\frac{3}{4}\right)^n |x_1 - x_0| = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Προκειμένου να είναι $2\left(\frac{3}{4}\right)^n < 0.02$, επιλέγουμε $n = 17$. □

Μέθοδος σταθερού σημείου

Πρόταση (1.3)

Αν η $g/(a,b)$ *έχει συνεχή παράγωγο και* $\xi \in (a,b)$ *σταθερό σημείο με* $|g'(\xi)| < 1$, *τότε υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε η μέθοδος σταθερού σημείου για την* $g/[\xi-\delta, \xi+\delta]$ *να συγκλίνει στο* ξ.

Πρόταση (1.4)

Αν η συνάρτηση g *ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της Πρότασης 1.3, με* $x_0 \neq \xi$, *και επιπλέον οι παράγωγοι* $g^{(k)}$, $k \leq p$ *είναι συνεχείς σε μια περιοχή του* ξ, *με* $g^{(k)}(\xi) = 0$, *για κάθε* $k < p$, *και* $g^{(p)}(\xi) \neq 0$, *τότε η σύγκλιση της* (x_n) *είναι* p*-τάξης, με*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-\xi}{(x_n-\xi)^p} = \frac{1}{p!} g^{(p)}(\xi).$$

Μέθοδος Newton-Raphson (N-R)

Αποτελεί ειδική περίπτωση της μεθόδου σταθερού σημείου, με

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad f'(x_n) \neq 0, n \in \mathbb{N}^*.$$

Πρόταση (1.5)

Αν η συνάρτηση $f/(a,b)$ έχει συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $\xi \in (a,b)$, με $f(\xi) = 0 \neq f'(\xi)$, τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε η ακολουθία

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_0 \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$$

να συγκλίνει στο ξ, με $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \xi}{(x_n - \xi)^2} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}$.

Αν $f''(\xi) \neq 0$, τότε η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

Μέθοδος Newton-Raphson (N-R)

Πρόταση (1.6)

Έστω συνάρτηση $f/[a,b]$ με συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $\xi \in (a,b)$, με $f(\xi)=0$. Αν $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [a,b]$, η f'' δεν αλλάζει πρόσημο στο $[a,b]$ και

$$\left|\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}\right| \leq b-a, \quad \text{όπου} \quad \gamma = \begin{cases} a, & |f'(a)| \leq |f'(b)| \\ b, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε η ακολουθία

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_0 \in [a,b]$$

συγκλίνει στο ξ.

Η προηγούμενη πρόταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο σύγκλισης της μεθόδου για επιλεγμένα a, b, x_0.
Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί και αντίστροφα, για τον προσδιορισμό των κατάλληλων a, b, x_0 ώστε η μέθοδος να συγκλίνει στη ρίζα ξ.
Πράγματι, αν για παράδειγμα είναι f', f'' θετικές, τότε $|f'(a)| \leq |f'(b)|$, οπότε $\gamma = a$. Αν γνωρίζουμε μια εκτίμηση της ρίζας ξ (δηλαδή ένα αρχικό διάστημα στο οποίο ανήκει), τότε μπορούμε να επιλέξουμε

$$a < \min\{x_0, \xi\} \qquad \text{και} \qquad b > \max\{x_0, \xi, \frac{|f(a)|}{|f'(a)|} + a\}$$

οπότε οι προϋποθέσεις της πρότασης θα ικανοποιούνται και η μέθοδος θα συγκλίνει για τη συγκεκριμένη αρχική τιμή x_0 αλλά και για κάθε άλλη αρχική τιμή στο $[a, b]$.

Άσκηση (Φεβρουάριος 2017) (βλ. λυμένη άσκηση 20)

Άσκηση

Δίδεται η εξίσωση $x^2 - 6x + 3 = 0$.

i) *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια ρίζα* ξ *στο διάστημα* $(0, 1)$ *και να αποδειχθεί ότι η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει προς αυτή για κάθε* $x_0 \in [0, 1]$.

ii) *Να υπολογισθεί μια προσέγγιση* x_k *της ρίζας* ξ *με* $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-5}$, *όταν* $x_0 = 0.5$.

Λύση του (*i*).

Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 3/[0, 1]$, έχουμε ότι $f(0)f(1) = 3 \cdot (-2) = -6 < 0$ άρα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f(\xi) = 0$.
Επειδή $f'(x) = 2x - 6 < 0$, έπεται ότι f γνησίως φθίνουσα, άρα η ρίζα ξ είναι μοναδική.

Λύση (συνέχεια).

Επιπλέον $f''(x) = 2 > 0$, $|f'(1)| = 4 < 6 = |f'(0)|$ και $\dfrac{|f(1)|}{|f'(1)|} = \dfrac{2}{4} < 1 = 1 - 0$ άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της Πρότασης 1.6, οπότε η ακολουθία

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 6x_n + 3}{2x_n - 6} = \frac{x_n^2 - 3}{2x_n - 6}$$

που ορίζει η μέθοδος N-R συγκλίνει στο ξ για κάθε $x_0 \in [0, 1]$.

Επιπλέον, επειδή οι δύο πρώτες παράγωγοι είναι συνεχείς, έπεται ότι η σύγκλιση είναι τετραγωνική, με

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \xi}{(x_n - \xi)^2} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} = \frac{1}{2\xi - 6}.$$

Λύση του (*ii*).

```
import numpy as np

xnext = lambda x: (x**2 - 3)/(2*x - 6)
x0 = 0.3
x1 = xnext(x0)
err, n = 0.00001, 1
while np.abs(x0 - x1) >= err:
    x0 = x1
    x1 = xnext(x0)
    n = n + 1

print("x(n) = %s, n = %d"%(x1, n))
print("x(n-1) = %s, absolute error = %s"%(x0, np.abs(
    x0-x1)))
```

Output:

```
x(n) = 0.5505102572168219, n = 4
x(n-1) = 0.5505102570631494, absolute error =
    1.536725191542132e-10
```

Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (a_n), *με* $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$, $a_1 = 2$, *συγκλίνει και να ευρεθεί το όριό της. Στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι η ταχύτητα σύγκλισης της* (a_n) *είναι τετραγωνική.*

Η άσκηση αυτή μπορεί να λυθεί μόνο με γνώσεις ορίων ακολουθιών. Αποδεικνύουμε ότι η ακολουθία είναι φραγμένη και μονότονη, οπότε υπάρχει το όριο $\xi = \lim a_n$ και είναι

$$\xi = \lim a_{n+1} = \lim \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} = \frac{\xi^2 + 2}{2\xi}, \quad \text{οπότε } \xi = \sqrt{2}.$$

Επιπλέον,

$$\frac{a_{n+1} - \xi}{(a_n - \xi)^k} = \frac{a_n^2 + 2 - 2a_n\xi}{2a_n(a_n - \xi)^k} = \frac{(a_n - \xi)^2}{2a_n(a_n - \xi)^k} \to \begin{cases} 0, & k = 1 \\ (2\xi)^{-1}, & k = 2 \end{cases}$$

Άρα η σύγκλιση είναι τετραγωνική.

Μπορεί όμως να λυθεί και με τη βοήθεια της μεθόδου N-R. Στην επόμενη άσκηση αποδεικνύεται ένα γενικότερο αποτέλεσμα:

Άσκηση (Βλ. λυμένη άσκηση 21)

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\theta > 0$ η ακολουθία (x_n), με $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + \theta}{2x_n}$, συγκλίνει στο $\sqrt{\theta}$ για κάθε $x_0 > 0$ και ότι η ταχύτητα σύγκλισης της (x_n) είναι τετραγωνική.

Λυμένη άσκηση 21

Λύση.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \theta/[0, +\infty)$. Είναι $f'(x) = 2x > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f''(x) = 2 > 0$. Προφανώς, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$ την $\xi = \sqrt{\theta}$. Επιπλέον, για κάθε a, b με $0 < a < b$ είναι $|f'(a)| < |f'(b)|$ (διότι $|f'|$ γν. αύξουσα.) Επομένως, αν επιλεχθούν

$$a < \min\{x_0, \sqrt{\theta}\} \qquad \text{και} \qquad b > \max\{x_0, \sqrt{\theta}, \frac{|f(a)|}{|f'(a)|} + a\}$$

τότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της Πρότασης 1.6, οπότε $x_n \to \sqrt{\theta}$ για κάθε $x_0 > 0$.

Επιπλέον η σύγκλιση είναι τετραγωνική, διότι όπως προκύπτει από την Πρόταση 1.5, είναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \xi}{(x_n - \xi)^2} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)} = \frac{1}{2\xi} \neq 0. \qquad \square$$

Μέθοδος τέμνουσας

Χρησιμοποιεί το πηλίκο $\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$ αντί για την παράγωγο $f'(x_n)$, οπότε η ακολουθία (x_n) δίνεται από τον αναδρομικό τύπο

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

με δύο αρχικές τιμές x_0 και x_1.

Πρόταση (1.7)

Αν η συνάρτηση $f/(a,b)$ έχει συνεχή πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $\xi \in (a,b)$, με $f(\xi) = 0 \neq f'(\xi)$, τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε η ακολουθία

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \qquad x_0, x_1 \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$$

να συγκλίνει στο ξ, με $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \xi|}{|x_n - \xi|^p} = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \right|^{1/p}$, όπου $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.