

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΚΕΦ. 6: Αόριστο ολοκλήρωμα - Διαφορικές εξισώσεις

Σημειώσεις Φροντιστηρίου

Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Ορισμός

Έστω συνάρτηση f/A , όπου το πεδίο ορισμού A είναι διάστημα (ή ένωση διαστημάτων). Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων $F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$ και $F'(x) = f(x)$. δηλαδή είναι

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Η συνάρτηση F ονομάζεται παράγουσα της f .

Ως πεδίο ορισμού της F θεωρούμε το ευρύτερο υποσύνολο του A στο οποίο η F είναι παραγωγίσιμη.

Από τον ορισμό προκύπτουν οι ιδιότητες:

- $\int f'(x)dx = f(x) + c$
- $(\int f(x)dx)' = f(x)$
- $\int (kf(x) + \lambda g(x))dx = k \int f(x)dx + \lambda \int g(x)dx$

Άσκηση

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx, \quad I_2 = \int \frac{1}{x^2 + 4x + 8} dx$$

Λύση

Αφού $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{(x - 1)(x + 2)} dx = \int \frac{A}{x - 1} dx + \int \frac{B}{x + 2} dx \\ &= A \ln |x - 1| + B \ln |x + 2| + c. \end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

Τα A, B προσδιορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x+2)} &= \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ \Leftrightarrow 1 &= A(x+2) + B(x-1)\end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση, θέτοντας $x = 1$, προκύπτει ότι $A = 1/3$ και, θέτοντας $x = -2$, προκύπτει ότι $B = -1/3$.

Λύση (συνέχεια)

Για το I_2 , έχουμε ότι

$$x^2 + 4x + 8 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4 + 4 = (x + 2)^2 + 4.$$

Επομένως, θέτοντας $2y = x + 2$, οπότε $2dy = dx$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 4} = \int \frac{2dy}{4y^2 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y + c \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + c. \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Γενικά, για την επίλυση του $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$, με $b^2 - 4ac < 0$, ακολουθούμε την ίδια μέθοδο όπως στο I_2 της προηγούμενης άσκησης. Έστω $p(x) = ax^2 + bx + c$, με $a \neq 0$ και $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Ως γνωστό, όταν η διακρίνουσα Δ είναι αρνητική, τότε το $p(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και επιπλέον είναι ομόσημο του a , για κάθε x .

Η επίλυση του ολοκληρώματος

$$I = \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$$

γίνεται με τη βοήθεια της συνάρτησης \arctg , για την οποία ως γνωστό ισχύει

$$\frac{d(\arctg y)}{dy} = \frac{1}{1+y^2}, \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad c + \arctg y = \int \frac{1}{1+y^2} dy, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Προσπαθούμε λοιπόν να μετατρέψουμε το $ax^2 + bx + c$ στη μορφή $y^2 + 1$, για κάποιο y το οποίο είναι συνάρτηση του x . Η διαδικασία μετατροπής έχει ως εξής: αρχικά δημιουργούμε ένα τέλειο τετράγωνο (το άθροισμα των τετραγώνων δύο ποσοτήτων και του διπλάσιου γινομένου τους) και στη συνέχεια βγάζουμε κοινό παράγοντα τον σταθερό όρο.

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \left(\frac{b}{2a} \right) x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(x^2 + 2 \left(\frac{b}{2a} \right) x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + k^2 \right).\end{aligned}$$

Επειδή $\Delta < 0$, για απλότητα στις πράξεις, τέθηκε $k = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}$.

Θέτοντας

$$ky = x + \frac{b}{2a}, \quad \text{οπότε} \quad kdy = dx,$$

έχουμε ότι $ax^2 + bx + c = a(k^2y^2 + k^2) = ak^2(y^2 + 1)$, επομένως

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{1}{ak^2(y^2 + 1)} k dy \\ &= \frac{1}{ak} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy = c + \frac{1}{ak} \operatorname{arctg} y \\ &= c + \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} \right) \end{aligned}$$

Άσκηση

Να λυθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $I = \int \frac{3 - 5x}{6x^2 - 2x + 4} dx$.

Λύση

το πολυώνυμο $p(x) = 6x^2 - 2x + 4$ έχει αρνητική διακρίνουσα και παράγωγο $p'(x) = 12x - 2$. Μπορούμε να εμφανίσουμε την παράγωγο στον αριθμητή ως εξής:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3 - 5x}{6x^2 - 2x + 4} dx = \int \frac{\frac{-5}{12}(12x - 2) - 2\frac{5}{12} + 3}{6x^2 - 2x + 4} dx \\ &= \frac{-5}{12} \int \frac{(6x^2 - 2x + 4)'}{6x^2 - 2x + 4} dx + \frac{13}{6} \int \frac{1}{6x^2 - 2x + 4} dx \\ &= \frac{-5}{12} \ln(6x^2 - 2x + 4) + \frac{13}{36} \int \frac{1}{x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}} dx \end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

Για την επίλυση του τελευταίου ολοκληρώματος, έχουμε

$$x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = x^2 - 2\frac{1}{6}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{2}{3} = \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{36},$$

άρα, θέτοντας $\frac{\sqrt{23}}{6}y = x - \frac{1}{6}$, οπότε $\frac{\sqrt{23}}{6}dy = dx$, έχουμε

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}} dx = \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{36}} dx \\ &= \int \frac{1}{\frac{23}{36}y^2 + \frac{23}{36}} \frac{\sqrt{23}}{6} dy = \frac{6}{\sqrt{23}} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy = c + \frac{6}{\sqrt{23}} \operatorname{arctg} y \\ &= c + \frac{6}{\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \left(\frac{6x - 1}{\sqrt{23}} \right) \end{aligned}$$

Άσκηση

Να λυθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $I = \int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$.

Λύση

Σύμφωνα με την ανάλυση σε απλά κλάσματα, υπάρχουν σταθερές A, B, Γ, Δ , ώστε

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma x + \Delta}{x^2+1},$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= A \int \frac{1}{x-1} dx + B \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \Gamma \int \frac{x}{x^2+1} dx + \Delta \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= A \ln|x-1| - B \frac{1}{x-1} + \frac{\Gamma}{2} \ln(x^2+1) + \Delta \operatorname{arctg} x + c. \end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

Τα A, B, Γ, Δ προσδιορίζονται ως εξής:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma x + \Delta}{x^2+1}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+1)A + (x^2+1)B + (x-1)^2(\Gamma x + \Delta) = 1$$

θέτοντας $x = 1$, βρίσκουμε ότι $B = 1/2$, οπότε, εκτελώντας τις πράξεις, παίρνουμε την ισοδύναμη σχέση

$$(A + \Gamma)x^3 - (A - 1/2 + 2\Gamma - \Delta)x^2 + (A + \Gamma - 2\Delta)x - (A - 1/2 - \Delta) = 1$$

Επειδή η σχέση αυτή ισχύει για κάθε x , εξισώνοντας τους συντελεστές των δύο πολυωνύμων στο πρώτο και δεύτερο μέλος, προκύπτει ότι τα A, Γ, Δ ικανοποιούν τις σχέσεις

Λύση (συνέχεια)

$$\begin{cases} A + \Gamma & = 0 \\ A + 2\Gamma - \Delta & = 1/2 \\ A + \Gamma - 2\Delta & = 0 \\ A - \Delta & = -1/2 \end{cases}$$

Από την 1η και την 3η σχέση, βρίσκουμε ότι $\Delta = 0$.

Έπειτα, από την 4η σχέση, βρίσκουμε ότι $A = -1/2$.

Τέλος, από την 1η σχέση, βρίσκουμε ότι $\Gamma = 1/2$.

Επομένως, τελικά είναι

$$I = -\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + c.$$

Από τον κανόνα παραγώγισης $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, ολοκληρώνοντας κατά μέλη, προκύπτει ο τύπος της παραγοντικής ολοκλήρωσης:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx,$$

ο οποίος, λαμβάνοντας υπόψη ότι $df = f'(x)dx$ και $dg = g'(x)dx$, μπορεί να γραφτεί συνοπτικά ως εξής:

$$\int g df = fg - \int f dg.$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Στις επόμενες περιπτώσεις εφαρμόζεται ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

- $\int e^{ax+b} p(x) dx$, όπου $p(x)$ πολυώνυμο.

Θέτουμε

$$e^{ax+b} = \left(\frac{1}{a} e^{ax+b}\right)'$$

Εφαρμογές: $\int x^2 e^x dx$, $\int (x^2 + 6x - 1)e^x dx$.

- $\int \sin(ax + b)p(x) dx$ και $\int \cos(ax + b)p(x) dx$, όπου $p(x)$ πολυώνυμο.

Θέτουμε αντίστοιχα

$$\sin(ax + b) = \left(\frac{-1}{a} \cos(ax + b)\right)' \quad \text{και} \quad \cos(ax + b) = \left(\frac{1}{a} \sin(ax + b)\right)'$$

Εφαρμογές: $\int x \sin(3x - 1) dx$, $\int (2x^2 - 3x + 5) \cos 4x dx$.

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

- $\int e^{ax+b} \sin(cx+d) dx$ και $\int e^{ax+b} \cos(cx+d) dx$.
Θέτουμε $e^{ax+b} = (\frac{1}{a} e^{ax+b})'$ και εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση 2 φορές.
Εφαρμογές: $\int e^{2x} \sin x dx$, $\int e^x \cos 3x dx$, $\int x e^x \cos 3x dx$.
- $\int f(x) \ln(g(x)) dx$, $\int f(x) \arctan(g(x)) dx$ και $\int f(x) \arcsin(g(x)) dx$,
όπου $f(x)$ ρητή συνάρτηση.
Βρίσκουμε μια $F(x)$ ώστε $F'(x) = f(x)$.
Εφαρμογές: $\int (3x^2 + 4x + 1) \ln(\frac{x^2+1}{x}) dx$,
 $\int (4x^3 + x) \arctan(x^2 - 1) dx$, $\int \arcsin x dx$.
- Αναγωγικοί τύποι, δηλαδή ολοκληρώματα της μορφής
 $I_n = \int A(x, n) dx$.
Εφαρμογές: $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$, $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$, $\int x^n e^{-x} dx$.

Άσκηση

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int \operatorname{arctg} x \, dx, \quad I_2 = \int e^x \cos x \, dx$$

Λύση

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x' \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c \end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

$$\begin{aligned} I_2 &= \int (e^x)' \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int (e^x)' \sin x dx \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - I_2 + c_1 \end{aligned}$$

Άρα

$$2I_2 = e^x(\cos x + \sin x) + c_1 \Rightarrow I_2 = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + c$$

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 16)

Αν $J_n = \int (1+x^2)^{-n} dx$, να αποδειχθεί ότι

$$J_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} J_n, \quad n \geq 1.$$

Λύση

$$\begin{aligned} J_n &= \int x'(1+x^2)^{-n} dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int x(-n)(1+x^2)^{-n-1}(2x) dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nJ_n - 2nJ_{n+1} \end{aligned}$$

και, λύνοντας ως προς J_{n+1} , προκύπτει το ζητούμενο.

Ο γενικός τύπος αντικατάστασης έχει ως εξής:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy.$$

Θέτουμε $y = g(x)$, οπότε $dy = g'(x)dx$ και αντικαθιστώντας στο πρώτο μέλος παίρνουμε το δεύτερο.

Γενικά, για τον μετασχηματισμό $f(y) = g(x)$, η σχέση μεταξύ dy και dx προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη ότι $dy = y'dx$ και παραγωγίζοντας ως προς x , οπότε είναι

$$\begin{aligned} f(y) = g(x) &\Rightarrow f'(y)y' = g'(x) \Rightarrow f'(y)y'dx = g'(x)dx \\ &\Rightarrow f'(y)dy = g'(x)dx. \end{aligned}$$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Το διαφορικό dx στον συμβολισμό του ολοκληρώματος υποδηλώνει ότι η x είναι η μεταβλητή ολοκλήρωσης (και παραγωγίσιμης). Την θέση της μεταβλητής x μπορεί να έχει οποιαδήποτε (παραγωγίσιμη) συνάρτηση και έτσι έχουμε για παράδειγμα ότι

$$\int df = f + c, \quad \text{όπως έχουμε και ότι } \int dx = x + c.$$

Αυτό εξάλλου επαληθεύεται και από τη σχέση $df = f'(x)dx$.

Η αντικατάσταση αλλάζει την μεταβλητή ολοκλήρωσης, οδηγώντας πολλές φορές σε μια παράσταση της οποίας προσδιορίζουμε πιο εύκολα την παράγουσα.

Για παράδειγμα, θέτοντας $y = 1 + x^2$, οπότε $dy = 2xdx$, έχουμε ότι

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{y} dy = \ln y + c = \ln(1+x^2) + c,$$

το οποίο πιο συνοπτικά, αλλά ισοδύναμα, μπορεί να γραφτεί ως

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) = \ln(1+x^2) + c.$$

Η μορφή $\int R(\cos x, \sin x) dx$

Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int R(\cos x, \sin x) dx$, όπου $R(x, y)$ είναι μια ρητή συνάρτηση (δηλαδή πηλίκο δύο πολυωνύμων), ως προς τις μεταβλητές x, y , λύνονται (ανάγονται σε ρητή μορφή ως προς y) με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, ή ισοδύναμα $x = 2 \operatorname{arctg} y$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cos x = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}, \quad \sin x = \frac{2y}{1 + y^2}, \quad dx = \frac{2}{1 + y^2} dy.$$

Οι τύποι αυτοί αποδεικνύονται εύκολα με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Ο τρίτος τύπος προκύπτει πιο άμεσα από τη σχέση $x = 2 \operatorname{arctg} y$.

Η μορφή $\int R(\cos x, \sin x) dx$

Οι επόμενες τρεις περιπτώσεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες αντικαταστάσεις, οι οποίες οδηγούν συνήθως σε απλούστερες πράξεις:

- Αν $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (δηλαδή, η R είναι περιττή ως προς το $\sin x$), τότε τίθεται $y = \cos x$.
- Αν $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (δηλαδή, η R είναι περιττή ως προς το $\cos x$), τότε τίθεται $y = \sin x$.
- Αν $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ (δηλαδή, η R είναι άρτια ως προς τα $\sin x$ και $\cos x$), τότε τίθεται $y = \operatorname{tg} x$, ή ισοδύναμα $x = \operatorname{arctg} y$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}, \quad \sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}, \quad dx = \frac{1}{1+y^2} dy$$

Η μορφή $\int R(\cos x, \sin x) dx$

Άσκηση

Να λυθούν τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{1 + \cos x + \sin x} dx, \quad \int \frac{1}{\cos x} dx, \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx.$$

Λύση

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, θέτουμε $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, οπότε είναι

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \cos x + \sin x} dx &= \int \frac{1}{1 + \frac{1-y^2}{1+y^2} + \frac{2y}{1+y^2}} \frac{2}{1+y^2} dy \\ &= \int \frac{2}{1+y^2 + 1-y^2 + 2y} dy \\ &= \int \frac{1}{1+y} dy \\ &= \ln |1+y| + c = \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c \end{aligned}$$

Η μορφή $\int R(\cos x, \sin x) dx$

Λύση (συνέχεια)

Για το $\int \frac{1}{\cos x} dx$, θέτουμε $y = \sin x$ (διότι η παράσταση είναι περιττή ως προς το $\cos x$), οπότε είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x} \cos x dx = \int \frac{1}{1-y^2} dy = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} (\ln |1+y| - \ln |1-y|) + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| + c \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(1+y)^2}{|1-y^2|} + c \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x} + c = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x} + c \\ &= \ln \frac{1+\sin x}{|\cos x|} + c\end{aligned}$$

Η μορφή $\int R(\cos x, \sin x) dx$

Λύση (συνέχεια)

Για το $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx$, η παράσταση είναι και περιττή ως προς το $\sin x$, και περιττή ως προς το $\cos x$, και άρτια ως προς τα $\cos x, \sin x$, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε από τις διαθέσιμες αντικαταστάσεις. Αν επιλέξουμε την αντικατάσταση $y = \operatorname{tg} x$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{y^3}{1+y^2} dy = \int \frac{y^3 + y - y}{1+y^2} dy \\ &= \int \frac{y^3 + y}{1+y^2} dy - \int \frac{y}{1+y^2} dy = \int y dy - \frac{1}{2} \int \frac{2y}{1+y^2} dy \\ &= \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+y^2) + c = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + c \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\cos^2 x} + c = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + c\end{aligned}$$

Η μορφή $\int R(\cos x, \sin x) dx$

Άσκηση

Να λυθούν τα ολοκληρώματα $\int \cos^2 x dx$, $\int \sin^2 x dx$.

Λύση

Για τα ολοκληρώματα αυτά είναι πιο εύκολο, αντί για αντικατάσταση, να εφαρμόσουμε απευθείας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1,$$

οπότε

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + c,$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + c.$$

Η μορφή $\int R(\cosh x, \sinh x) dx$

Για την επίλυση ολοκληρωμάτων της μορφής $\int R(\cosh x, \sinh x) dx$, όπου $R(x, y)$ είναι μια ρητή συνάρτηση, ως προς τις μεταβλητές x, y , χρησιμοποιούνται ταυτότητες με υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις, ανάλογες με αυτές της προηγούμενης ενότητας. Γενικά, τα ολοκληρώματα αυτής της μορφής λύνονται (ανάγονται σε ρητή μορφή ως προς y) με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y = \operatorname{tgh} \frac{x}{2}$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cosh x = \frac{1 + y^2}{1 - y^2}, \quad \sinh x = \frac{2y}{1 - y^2}, \quad dx = \frac{2}{1 - y^2} dy.$$

Η μορφή $\int R(\cosh x, \sinh x) dx$

Οι επόμενες τρεις περιπτώσεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες αντικαταστάσεις, οι οποίες οδηγούν συνήθως σε απλούστερες πράξεις:

- Αν $R(\cosh x, -\sinh x) = -R(\cosh x, \sinh x)$ (δηλαδή, η R είναι περιττή ως προς το $\sinh x$), τότε τίθεται $y = \cosh x$.
- Αν $R(-\cosh x, \sinh x) = -R(\cosh x, \sinh x)$ (δηλαδή, η R είναι περιττή ως προς το $\cosh x$), τότε τίθεται $y = \sinh x$.
- Αν $R(-\cosh x, -\sinh x) = R(\cosh x, \sinh x)$ (δηλαδή, η R είναι άρτια ως προς τα $\sinh x$ και $\cosh x$), τότε τίθεται $y = \tanh x$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cosh^2 x = \frac{1}{1-y^2}, \quad \sinh^2 x = \frac{y^2}{1-y^2}, \quad dx = \frac{1}{1-y^2} dy.$$

Η μορφή $\int \sqrt{b^2 - a^2 x^2} dx$

Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sqrt{b^2 - a^2 x^2} dx$, όπου $a, b > 0$, έχει νόημα όταν

$$b^2 - a^2 x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right].$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

θέτουμε

$$ax = b \sin t, \quad \text{όπου } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

οπότε είναι $a dx = b \cos t dt$ και

$$\begin{aligned} \sqrt{b^2 - a^2 x^2} &= \sqrt{b^2 - b^2 \sin^2 t} = b\sqrt{1 - \sin^2 t} = b\sqrt{\cos^2 t} = b|\cos t| \\ &= b \cos t. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει επειδή είναι $\cos t \geq 0$, όταν $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Η μορφή $\int \sqrt{a^2 x^2 + b^2} dx$

Για το άριστο ολοκλήρωμα $\int \sqrt{a^2 x^2 + b^2} dx$, όπου $a, b > 0$, λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα

$$\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x,$$

θέτουμε

$$ax = b \sinh t, \quad t \in \mathbb{R},$$

οπότε είναι $a dx = b \cosh t dt$ και

$$\sqrt{a^2 x^2 + b^2} = \sqrt{b^2 \sinh^2 t + b^2} = b \sqrt{\sinh^2 t + 1} = b \sqrt{\cosh^2 t} = b \cosh t.$$

Η μορφή $\int \sqrt{a^2x^2 - b^2} dx$

Το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{a^2x^2 - b^2} dx$, όπου $a, b > 0$, έχει νόημα όταν

$$a^2x^2 - b^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right] \cup \left[\frac{b}{a}, +\infty\right).$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα

$$\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x,$$

διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

- i) Αν $x \geq \frac{b}{a}$, τότε θέτουμε $ax = b \cosh t$, όπου $t \geq 0$.
- ii) Αν $x \leq -\frac{b}{a}$, τότε θέτουμε $ax = -b \cosh t$, όπου $t \leq 0$.

Επομένως, είναι $\sqrt{a^2x^2 - b^2} = b|\sinh t|$ και, επειδή $\sinh t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$, και στις δύο περιπτώσεις προκύπτει ότι $adx = b|\sinh t|dt$.

Οι μορφές $\int R(x, \sqrt{b^2 - a^2x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2x^2 \pm b^2})dx$

Οι τρεις προηγούμενες αντικαταστάσεις χρησιμοποιούνται γενικότερα σε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int R(x, \sqrt{b^2 - a^2x^2})dx \quad \text{ή} \quad \int R(x, \sqrt{a^2x^2 \pm b^2})dx,$$

όπου $R(x, y)$ μια ρητή συνάρτηση ως προς τις μεταβλητές x, y , όπως στην επόμενη άσκηση.

Οι μορφές $\int R(x, \sqrt{b^2 - a^2x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2x^2 \pm b^2})dx$

Άσκηση (Λυμένη άσκηση 27)

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int \frac{x^2 + 3x + 5}{\sqrt{9 - x^2}} dx, \quad I_2 = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}} dx, \quad I_3 = \int \sqrt{3x^2 + 2} dx.$$

Λύση

Για το I_1 , θέτοντας $x = 3 \sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x^2 + 3x + 5}{\sqrt{9 - x^2}} dx = \int \frac{9 \sin^2 t + 9 \sin t + 5}{\sqrt{9 - 9 \sin^2 t}} 3 \cos t dt \\ &= \int (9 \sin^2 t + 9 \sin t + 5) dt = \frac{9}{2} \int (1 - \cos 2t) dt + 9 \int \sin t dt + 5 \int dt \\ &= \frac{9}{2} t - \frac{9}{4} \sin 2t - 9 \cos t + 5t + c = \frac{19}{2} t - \frac{9}{2} \sin t \cos t - 9 \cos t + c \\ &= \frac{19}{2} \arcsin \frac{x}{3} - \frac{1}{2} x \sqrt{9 - x^2} - 3 \sqrt{9 - x^2} + c \end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

Για το $I_2 = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$, θέτοντας $x = 2 \cosh t$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}} dx = \int \frac{8 \cosh^3 t}{\sqrt{4 \cosh^2 t - 4}} 2 \sinh t dt = 8 \int \cosh^3 t dt \\
 &= 8 \int (1 + \sinh^2 t) d(\sinh t) = 8 \sinh t + \frac{8}{3} \sinh^3 t + c \\
 &= \frac{8}{3} (3 + \sinh^2 t) \sinh t + c = \frac{8}{3} (2 + \cosh^2 t) \sqrt{\cosh^2 - 1} + c \\
 &= \frac{1}{3} (8 + 4 \cosh^2 t) \sqrt{4 \cosh^2 - 4} + c = \frac{1}{3} (8 + x^2) \sqrt{x^2 - 4} + c
 \end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

Για το $I_3 = \int \sqrt{3x^2 + 2}dx$, θέτοντας $\sqrt{3}x = \sqrt{2} \sinh t$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int \sqrt{2 \sinh^2 t + 2} \sqrt{2/3} \cosh t dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \cosh^2 t dt \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int (e^t + e^{-t})^2 dt = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int (e^{2t} + e^{-2t} + 2) dt \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} + 2t \right) + c = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\sinh(2t) + 2t) + c \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\sinh t \cosh t + t) + c = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sinh t \sqrt{1 + \sinh^2 t} + t) + c \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{3}{2}x^2} + \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} \right) \right) + c \\
 &= \frac{x}{2} \sqrt{2 + 3x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} \right) + c
 \end{aligned}$$

Διαφορικές εξισώσεις

Διαφορική εξίσωση (μίας μεταβλητής) (ΔE) είναι κάθε εξίσωση που περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή x , μια άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ και κάποιες παραγώγους της y .

Η μεγαλύτερη παράγωγος που εμφανίζεται σε αυτήν καθορίζει την τάξη της.

Ο μεγαλύτερος εκθέτης της μεγαλύτερης παραγώγου καθορίζει τον βαθμό της.

Λύση της εξίσωσης είναι κάθε συνάρτηση που την επαληθεύει.

Καμπύλη ολοκλήρωσης της εξίσωσης ονομάζεται η καμπύλη μιας λύσης της.

Στη συνέχεια, θα δούμε ορισμένες μορφές διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

Η κανονική μορφή μιας τέτοιας εξίσωσης είναι η

$$y' = f(x, y),$$

όπου f μια συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Χωριζομένων μεταβλητών: Είναι οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, \quad (1)$$

οπότε είναι $g(y)dy = f(x)dx$ και ολοκληρώνοντας έχουμε ότι $\int g(y)dy = \int f(x)dx$. Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα, προκύπτει η μορφή των λύσεών τους.

Ομογενείς: Είναι οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, \quad \text{όπου} \quad \frac{f(tx, ty)}{g(tx, ty)} = \frac{t^k f(x, y)}{t^k g(x, y)} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}. \quad (2)$$

Μετατρέπονται σε χωριζομένων μεταβλητών, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $y = ux$.

Άσκηση

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

$$i) y' \cos^2 x = y(y - 1), y(0) = 2, \quad ii) y' = a - by, b \neq 0.$$

Λύση

i) Η δοσμένη ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, αφού γράφεται στη μορφή

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

όταν $y \neq 0, 1$. Επομένως, ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y(y-1)} &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right) dy = \int (\operatorname{tg} x)' dx \\ \Leftrightarrow \ln |y-1| - \ln |y| &= k + \operatorname{tg} x, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |(y-1)/y| = e^{k+\operatorname{tg} x} \\ \Leftrightarrow 1 - 1/y &= \pm e^k e^{\operatorname{tg} x} \Leftrightarrow 1/y = 1 - ce^{\operatorname{tg} x}, \quad c \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

Κατόπιν τούτων, η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = (1 - ce^{tg x})^{-1}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \text{ή} \quad y = 0.$$

Στη συνέχεια, βάσει της αρχικής συνθήκης $y(0) = 2$, υπολογίζουμε τη σταθερά c ως

$$2 = y(0) = (1 - c)^{-1} \Leftrightarrow 1 - c = 1/2 \Leftrightarrow c = 1/2$$

οπότε η ειδική λύση με $y(0) = 2$ είναι η $y = (1 - e^{tg x}/2)^{-1}$.

Λύση (συνέχεια)

ii) Η δοσμένη ΔΕ είναι χωριζόμενων μεταβλητών, αφού γράφεται στη μορφή (για $y \neq a/b$, η οποία είναι λύση της ΔΕ)

$$\frac{dy}{a - by} = dx.$$

Επομένως, ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε ότι

$$\int \frac{dy}{a - by} = \int dx \Leftrightarrow \frac{-1}{b} \ln |a - by| = k + x, k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \ln |a - by| = -bk - bx \Leftrightarrow |a - by| = e^{-bk - bx} \Leftrightarrow a - by = \pm e^{-bk} e^{-bx}$$

$$\Leftrightarrow a - by = c_1 e^{-bx}, c_1 \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow by = a - c_1 e^{-bx}, c_1 \in \mathbb{R}^*$$

Κατόπιν τούτων, η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = \frac{a}{b} - ce^{-bx}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y, x > 0$.

Λύση

Η ΔΕ γράφεται στη μορφή $y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$ και είναι ομογενής.
Θέτοντας $y = ux$, έχουμε ότι $y' = u + u'x$ και

$$y' = u + u'x = \frac{\sqrt{x^2(1 - u^2)} + ux}{x}$$
$$\Leftrightarrow u'x = \frac{x\sqrt{1 - u^2} + ux}{x} - u = \sqrt{1 - u^2} \Leftrightarrow \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x}$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, προκύπτει ότι

$\arcsin u = c + \ln x$, $c \in \mathbb{R}^*$, δηλαδή $u = \sin(c + \ln x)$ και τελικά η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = x \sin(c + \ln x), \quad c \in \mathbb{R}^*.$$

Διαφορικές εξισώσεις

Η μορφή: $\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

i) Αν $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, τότε τίθεται

$$z = a_1x + b_1y.$$

Ο μετασχηματισμός αυτός μετατρέπει την ΔΕ σε χωριζομένων μεταβλητών, η οποία λύνεται σύμφωνα με τα προηγούμενα.

ii) Αν $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, τότε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση, έστω την (x_0, y_0) , οπότε, θέτοντας

$$X = x - x_0 \quad \text{και} \quad Y = y - y_0,$$

η διαφορική εξίσωση ανάγεται σε ομογενή, η οποία λύνεται με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $Y = UX$.

Άσκηση

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' = \frac{x + 2y + 5}{2x + 4y + 6}$.

Λύση

Θέτοντας $z = x + 2y$, οπότε $z' = 1 + 2y'$, προκύπτει ότι

$$y' = \frac{z' - 1}{2} = \frac{z + 5}{2z + 6} \Rightarrow z' = \frac{2z + 10}{2z + 6} + 1 = \frac{4z + 16}{2z + 6} = \frac{2z + 8}{z + 3}$$
$$\Rightarrow \frac{z + 3}{2z + 8} dz = dx \Rightarrow \frac{2z + 6}{2z + 8} dz = 2dx \Rightarrow \left(1 - \frac{2}{2z + 8}\right) dz = 2dx$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε ότι

$$2x + c = \int 2dx = \int \left(1 - \frac{2}{2z + 8}\right) dz = z - \ln|2z + 8|$$
$$= x + 2y - \ln|2x + 4y + 8|$$

οπότε η γενική λύση της ΔΕ σε πεπλεγμένη μορφή είναι η

$$2y = x + \ln|2x + 4y + 8| + c.$$

Άσκηση

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' = \frac{x + y - 2}{-x + y - 4}$.

Λύση

Βάσει του ακόλουθου συστήματος

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ -x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

θέτουμε $X = x + 1$ και $Y = y - 3$, οπότε $dY = dy$, $dX = dx$,
 $y' = dY/dX$ και η ΔΕ μετατρέπεται στην

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(X - 1) + (Y + 3) - 2}{-(X - 1) + (Y + 3) - 4} = \frac{X + Y}{-X + Y}.$$

Η νέα ΔΕ είναι ομογενής, οπότε θέτοντας $Y = UX$, μετατρέπεται στην

Διαφορικές εξισώσεις

Λύση (συνέχεια)

$$X \frac{dU}{dX} + U = \frac{X + UX}{-X + UX} = \frac{U + 1}{U - 1} \Rightarrow X \frac{dU}{dX} = \frac{U + 1}{U - 1} - U = \frac{2U + 1 - U^2}{U - 1},$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών, αφού γράφεται ως

$$\frac{U - 1}{2U + 1 - U^2} dU = \frac{dX}{X}.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη,

$$\begin{aligned} c_1 + \ln |X| &= \int \frac{dX}{X} = - \int \frac{U - 1}{U^2 - 2U - 1} dU = \frac{-1}{2} \int \frac{(U^2 - 2U - 1)'}{U^2 - 2U - 1} dU \\ &= \frac{-1}{2} \ln |U^2 - 2U - 1|, \end{aligned}$$

όπου $c_1 \in \mathbb{R}$, και τελικά

Διαφορικές εξισώσεις

Λύση (συνέχεια)

$$\ln |U^2 - 2U - 1| = -2c_1 - \ln X^2 \Rightarrow |U^2 - 2U - 1| = e^{-2c_1} e^{-\ln X^2}$$
$$\Rightarrow U^2 - 2U - 1 = \frac{c_2}{X^2}, \quad c_2 \in \mathbb{R}^*$$

Αντικαθιστώντας, είναι $U = \frac{Y}{X} = \frac{y-3}{x+1}$ και

$$U^2 - 2U - 1 = \left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2 - 2\frac{y-3}{x+1} - 1 = \left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2 - \frac{2y-x-7}{x+1}$$
$$= \frac{(y-3)^2 + (x-2y+7)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{y^2 + x^2 - 2xy + 8x - 8y - 2}{(x+1)^2}$$

οπότε η γενική λύση σε πεπλεγμένη μορφή της αρχικής ΔΕ είναι η

$$y^2 + x^2 - 2xy + 8x - 8y = c, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Μια γραμμική διαφορική εξίσωση (ΓΔΕ) πρώτης τάξης έχει τη μορφή:

$$\frac{dy}{dx} + \phi(x)y = \sigma(x). \quad (3)$$

Έστω $\Phi = \Phi(x)$ μια παράγουσα της $\phi(x)$, δηλαδή $\Phi'(x) = \phi(x)$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) Αν $\sigma(x) = 0$, τότε η ΔΕ ονομάζεται **γραμμική ομογενής** και λύνεται άμεσα ως χωριζομένων μεταβλητών:

$$\begin{aligned} y' = -\phi(x)y \stackrel{y \neq 0}{\Rightarrow} \frac{y'}{y} = -\phi(x) &\Rightarrow (\ln |y|)' = -\phi(x) \Rightarrow \ln |y| = k - \Phi(x) \\ &\Rightarrow |y| = e^k e^{-\Phi(x)} \end{aligned}$$

οπότε τελικά η γενική λύση της γραμμικής ομογενούς είναι η

$$y = ce^{-\Phi(x)} = cy_0, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \text{όπου } y_0 = y_0(x) = e^{-\Phi(x)} \quad (4)$$

είναι η μερική λύση της γραμμικής ομογενούς, για $c = 1$, η οποία παίζει σημαντικό ρόλο και στην γενική περίπτωση, όπως φαίνεται παρακάτω.

2) Στη γενική περίπτωση, αναζητάμε μια θετική συνάρτηση $I = I(x)$, η οποία ονομάζεται **ολοκληρωτικός παράγοντας**, τέτοια ώστε $(Iy)' = (y' + \phi y)I$, έτσι ώστε, πολλαπλασιάζοντας την (3) με I , να προκύψει

$$(y' + \phi y)I = \sigma I \Rightarrow (Iy)' = \sigma I$$

Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $I(x) = e^{\Phi(x)} = \frac{1}{y_0(x)}$, αφού

$I'(x) = \phi(x)e^{\Phi(x)} = \phi(x)I(x)$, οπότε

$$(y' + \phi y)I = y'I + \phi Iy = y'I + I'y = (Iy)'$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$(I(x)y)' = I(x)\sigma(x) \Rightarrow I(x)y = c + \int I(x)\sigma(x)dx \Rightarrow y = \frac{c + \int I(x)\sigma(x)dx}{I(x)}$$

οπότε, η γενική λύση της (3) είναι η

$$y = cy_0(x) + y_0(x) \int \frac{\sigma(x)}{y_0(x)} dx, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Εναλλακτικά, σύμφωνα με τη γενική θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, η γενική λύση της εξίσωσης (3) προκύπτει ως το άθροισμα της γενικής λύσης cy_0 της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης και μιας (οποιασδήποτε) μερικής λύσης ψ της (3), δηλαδή είναι

$$y = cy_0 + \psi,$$

οπότε το πρόβλημα της επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης ανάγεται στην εύρεση μιας μερικής λύσης ψ .

Για το σκοπό αυτό, ακολουθείται η **μέθοδος του Lagrange**, σύμφωνα με την οποία αναζητείται συνάρτηση ψ της μορφής $\psi = gy_0$. Αφού η ψ είναι λύση της (3), έπεται ότι

$$\psi' + \phi\psi = \sigma \Rightarrow g'y_0 + gy_0' + \phi gy_0 = \sigma \Rightarrow g'y_0 + g(y_0' + \phi y_0) = \sigma \Rightarrow g'y_0 = \sigma.$$

Η τελευταία σχέση προέκυψε διότι η y_0 είναι λύση της ομογενούς, δηλαδή $y_0' + \phi y_0 = 0$.

Επομένως, είναι

$$g' = \frac{\sigma}{y_0},$$

οπότε, μια κατάλληλη συνάρτηση g είναι η

$$g = \int \frac{\sigma(x)}{y_0(x)} dx = \int \sigma(x) e^{\Phi(x)} dx,$$

ώστε η ζητούμενη γενική λύση είναι η

$$y = cy_0 + \psi = cy_0 + y_0 g = cy_0 + y_0 \int \frac{\sigma}{y_0} dx,$$

όπως προέκυψε και με την προηγούμενη μέθοδο (βλ. (5)).

Άσκηση (ΦΕΒ 2019)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{\sin x}{x^3}, \quad y(\pi/2) = 1.$$

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας την ΔΕ κατά μέλη με x^3 , παίρνουμε τις ισοδύναμες σχέσεις

$$x^3 y' + 3x^2 y = \sin x \Leftrightarrow (x^3 y)' = (-\cos x)' \Leftrightarrow x^3 y = c - \cos x, \quad c \in \mathbb{R}$$

και τελικά η γενική λύση της ΔΕ είναι η $y = \frac{c - \cos x}{x^3}$.

Θέτοντας $x = \pi/2$, έχουμε ότι $1 = y(\pi/2) = \frac{c - 0}{(\pi/2)^3}$, οπότε $c = (\pi/2)^3$

και η ζητούμενη μερική λύση είναι η $y = \frac{(\pi/2)^3 - \cos x}{x^3}$.

Άσκηση

Να λυθεί η (γραμμική) διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{1}{x}y = 3 \sin(2x), \quad x > 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi} \quad (6)$$

- 1 Με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα.
- 2 Σύμφωνα με τη γενική θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Λύση

Η δοσμένη διαφορική εξίσωση είναι γραμμική, με $\phi(x) = \frac{1}{x}$ και $\sigma(x) = 3 \sin(2x)$ (βλ. (3)). Μια παράγουσα της $\phi(x)$ είναι η $\Phi(x) = \ln x$.

Λύση (συνέχεια)

1) Θέτοντας $I(x) = e^{\Phi(x)} = x$, έχουμε ότι

$$I(x)y' + I(x)\frac{1}{x}y = (I(x)y)'$$

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας την (6) με $I(x)$, έχουμε

$$\begin{aligned}xy' + y &= 3x \sin(2x) \Rightarrow (xy)' = 3x \sin(2x) \Rightarrow xy = c_1 + \int 3x \sin(2x) dx \\ \Rightarrow y &= \frac{c_1}{x} + \frac{1}{x} \int 3x \sin(2x) dx\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, προσδιορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα $\int 3x \sin(2x) dx$ ως εξής:

Λύση (συνέχεια)

$$\begin{aligned}\int 3x \sin(2x) dx &= \int \frac{-3}{2} x (\cos(2x))' dx \\ &= \frac{-3}{2} x \cos(2x) - \int \left(\frac{-3}{2} x \right)' \cos(2x) dx \\ &= \frac{-3}{2} x \cos(2x) + \frac{3}{2} \int \cos(2x) dx \\ &= \frac{-3}{2} x \cos(2x) + \frac{3}{2} \int \left(\frac{\sin(2x)}{2} \right)' dx \\ &= c_2 + \frac{-3}{2} x \cos(2x) + \frac{3}{4} \sin(2x)\end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

Άρα, η γενική λύση της (6) είναι η

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{c_1}{x} + \frac{1}{x} \left(c_2 - \frac{3x}{2} \cos(2x) + \frac{3}{4} \sin(2x) \right) \\
 &= \frac{c}{x} + \frac{3}{2} \left(\frac{\sin(2x)}{2x} - \cos(2x) \right), \quad (7)
 \end{aligned}$$

όπου $c = c_1 + c_2$.

Χρησιμοποιώντας την δοσμένη τιμή $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi}$, προσδιορίζουμε την τιμή της σταθεράς c , ως εξής:

$$\frac{1}{\pi} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4c}{\pi} + \frac{3}{2} \left(\frac{2 \sin \frac{\pi}{2}}{\pi} - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{4c}{\pi} + \frac{3}{2} \left(\frac{2}{\pi} - 0 \right) = \frac{4c + 3}{\pi}$$

Άρα, $\frac{4c + 3}{\pi} = \frac{1}{\pi} \Rightarrow 4c + 3 = 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$ και αντικαθιστώντας την τιμή της c στην (7), βρίσκουμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Λύση (συνέχεια)

2) Μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς: $y' + \frac{1}{x}y = 0$, είναι ως γνωστό η $y_0 = e^{-\Phi(x)} = \frac{1}{x}$. οπότε η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$y = \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Στη συνέχεια, αναζητούμε μερική λύση της (6), της μορφής $\psi = gy_0$. Ως γνωστό, μια κατάλληλη συνάρτηση g είναι μια παράγουσα της $\sigma(x)e^{\Phi(x)} = 3x \sin(2x)$, οπότε επιλύοντας το ολοκλήρωμα, επιλέγουμε την

$$g = \frac{-3}{2}x \cos(2x) + \frac{3}{4} \sin(2x).$$

Λύση (συνέχεια)

Τελικά, η γενική λύση της (6) είναι το άθροισμα της λύσης (8) της αντίστοιχης ομογενούς και της μερικής λύσης ψ , δηλαδή

$$\begin{aligned}y &= \frac{c}{x} + \psi = \frac{c}{x} + y_0 g = \frac{c}{x} + \frac{1}{x} g = \frac{c}{x} + \frac{1}{x} \left(\frac{-3}{2} x \cos(2x) + \frac{3}{4} \sin(2x) \right) \\ &= \frac{c}{x} + \frac{3}{2} \left(\frac{\sin(2x)}{2x} - \cos(2x) \right),\end{aligned}$$

όπως άλλωστε προέκυψε και στο προηγούμενο ερώτημα.

Η τιμή της σταθεράς c προσδιορίζεται όπως και πριν, θέτοντας $x = \frac{\pi}{4}$ στον παραπάνω τύπο.

Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli

Οι διαφορικές εξισώσεις Bernoulli έχουν την μορφή:

$$\frac{dy}{dx} + \phi(x)y = \sigma(x)y^a.$$

Αν $a = 0$ ή $a = 1$, τότε η ΔΕ είναι γραμμική.

Αλλιώς, θέτουμε $u = y^{1-a}$. Ο μετασχηματισμός αυτός μετατρέπει την εξίσωση σε γραμμική.

Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με $(1-a)y^{-a}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}(1-a)y^{-a}\frac{dy}{dx} + (1-a)\phi(x)y^{1-a} &= (1-a)\sigma(x) \\ \Leftrightarrow (y^{1-a})' + (1-a)\phi(x)y^{1-a} &= (1-a)\sigma(x) \\ \Leftrightarrow u' + (1-a)\phi(x)u &= (1-a)\sigma(x).\end{aligned}$$

Άσκηση (ΦΕΒ 2015)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{4}{x}y = 12\sqrt{y}x^3, \quad y(1) = 4.$$

Λύση

Επειδή $\sqrt{y} = y^{1/2}$, θέτουμε $a = 1/2$ και πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τη ΔΕ με $(1 - a)y^{-a} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, παίρνοντας την

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{2}{x}\sqrt{y} = 6x^3.$$

Θέτοντας $u = y^{1-a} = \sqrt{y}$, οπότε $u' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$, η τελευταία ΔΕ μετατρέπεται στην

Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli

Λύση (συνέχεια)

$$u' + \frac{2}{x}u = 6x^3.$$

Πολλαπλασιάζοντας με x^2 , παίρνουμε τις ισοδύναμες σχέσεις

$$\begin{aligned}x^2 u' + 2xu &= 6x^5 \Leftrightarrow (x^2 u)' = (x^6)' \Leftrightarrow x^2 u = x^6 + c, \Leftrightarrow x^2 \sqrt{y} = x^6 + c \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y} = x^4 + \frac{c}{x^2}, \quad c \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

οπότε η γενική λύση της αρχικής ΔΕ είναι η $y = \left(x^4 + \frac{c}{x^2}\right)^2$, $c \in \mathbb{R}$.
Θέτοντας $x = 1$, έχουμε ότι

$$4 = y(1) = (1 + c)^2 \Rightarrow 1 + c \in \{-2, 2\} \Rightarrow c \in \{-3, 1\}$$

και έτσι προκύπτουν δύο μερικές λύσεις για $y(1) = 4$, οι

$$y = \left(x^4 - \frac{3}{x^2}\right)^2, \quad y = \left(x^4 + \frac{1}{x^2}\right)^2.$$