ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΚΕΦ. 3: ΣΕΙΡΕΣ

Σημειώσεις Φροντιστηρίου

Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Σειρές

Για κάθε ακολουθία (a_n) ορίζεται η *ακολουθία μερικών αθροισμάτων* (s_n) με

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

ή, αναδρομικά,

$$s_n = s_{n-1} + a_n, \qquad s_1 = a_1.$$

Ορισμός

Σειρά της ακολουθίας (a_n) ονομάζεται το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Αν $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$, λέμε ότι η σειρά *συγκλίνει* (στο s), αλλιώς η σειρά *δεν συγκλίνει*. Αν $\lim s_n = +\infty$ (αντ. $-\infty$), τότε λέμε ότι η σειρά *απειρίζεται* θετικά (αντ. αρνητικά). Αν το $\lim s_n$ δεν υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$, τότε λέμε ότι η σειρά *αποκλίνει*.

Γεωμετρική σειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & |x| < 1 \\ +\infty, & x \geq 1. \end{cases}$

(Αν $x \leq -1$, το όριο δεν υπάρχει.)

Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n + 3(-2)^n}{7^n}$.

Εκθετική σειρά: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}$.

Αρμονική σειρά p-τάξης: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$, αν $p \leq 1$, αλλιώς συγκλίνει.

Εφαρμογές: Χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με τα κριτήρια σύγκρισης.

Τηλεσκοπική σειρά: Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$, όπου $p(n)$, $q(n)$ πολυώνυμα βαθμού k και λ αντίστοιχα, η οποία συγκλίνει αν και μόνο αν $\lambda - k > 1$. Ο υπολογισμός μιας τέτοιας σειράς συνήθως γίνεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα, π.χ.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \lim \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.
\end{aligned}$$

Ιδιότητες σειρών

- Αν $\lim a_n \neq 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.
- (Γραμμικότητα) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty}(ka_n + \lambda b_n) = ka + \lambda b$.
- (Συνέλιξη σειρών) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$.

Σύγκριση σειρών με θετικούς όρους

- **Κριτήριο σύγκρισης I**: Αν ισχύουν τελικά οι ανισότητες $0 \leq a_n \leq b_n$, τότε

  i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty.$

  ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$

  Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+\sin^2 n}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n+1}{3^n+n}$.

- **Κριτήριο σύγκρισης II**: Αν ισχύουν τελικά οι ανισότητες $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ και $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε:

  i) Αν $\ell \neq 0, +\infty$, οι σειρές είναι της αυτής φύσης.

  ii) Αν $\ell = 0$, τότε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$

  iii) Αν $\ell = +\infty$, τότε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$

  Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^{3/2}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2n+1}\right)$.

- **Κριτήριο συμπύκνωσης Cauchy**: Αν (a_n) φθίνουσα και $a_n \geq 0$, τότε

$$\text{η } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ συγκλίνει αν και μόνο αν η } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ συγκλίνει.}$$

Εφαρμογές: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, σύγκλιση της αρμονικής p-σειράς.

- **Leibniz**: Αν (a_n) φθίνουσα με $a_n \geq 0$ και $\lim a_n = 0$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = S \in \mathbb{R}, \qquad \text{με} \qquad \left| \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i - S \right| \leq a_{n+1}.$$

Το μερικό άθροισμα $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i$ αποτελεί προσέγγιση της τιμής S του αθροίσματος της σειράς, ενώ η απόλυτη διαφορά είναι το σφάλμα της προσέγγισης. Έτσι, αν για παράδειγμα ζητείται προσέγγιση με σφάλμα μικρότερο του 0.001, τότε επιλέγεται n τέτοιο ώστε $a_{n+1} < 0.001$.

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

- **Απόλυτη σύγκλιση**: Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και λέμε ότι συγκλίνει απολύτως. Επιπλέον, τότε ισχύει ότι $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
  Μια σειρά που συγκλίνει αλλά όχι απολύτως, λέμε ότι συγκλίνει υπό συνθήκη.
- **Cauchy**: Έστω $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$. Αν $\ell < 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Αν $\ell > 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.
  Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^n$.

- **D' Alembert**: Έστω $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$. Αν $\ell < 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Αν $\ell > 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.

  Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{4n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-7}{5^n}$.

- **Raabe**: Έστω $\lim n \left(1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) = \ell$. Αν $\ell > 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Αν $\ell < 1$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$.

  Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$.

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

- **Λογαριθμικό κριτήριο**: Έστω $\lim \dfrac{\ln|a_n|}{\ln(1/n)} = \ell$. Αν $\ell > 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Αν $\ell < 1$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$.

  Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n + 1)^{\ln a}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}(n+1)}{\sqrt{n^2+4}(n^2+3)}$.

- **Abel**: Αν $\sum_{k=1}^{n} a_k$ φραγμένη και (b_n) φθίνουσα και μηδενική, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

  Εφαρμογές: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 5n}{n}$.

Άσκηση (Τηλεσκοπικές σειρές) (βλ. άλυτες ασκήσεις 1-2)

Να ευρεθούν τα αθροίσματα των σειρών:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2(n+2)^2}, \quad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right).$$

Λύση

i) Θέτουμε $a_n = \dfrac{n+1}{n^2(n+2)^2}$ και $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Παρατηρούμε ότι $(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 = n^2 + 4(n+1)$, οπότε $4(n+1) = (n+2)^2 - n^2$ και

Λύση (συνέχεια)

$$\begin{aligned}
4s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{4(k+1)}{k^2(k+2)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+2)^2 - k^2}{k^2(k+2)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+2)^2} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \to 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Επομένως, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n = \frac{5}{16}$.

ii) Θέτουμε $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ και $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ και εφαρμόζουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

$$= \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \overset{k+2=\lambda}{=} \sum_{\lambda=3}^{n+2} \frac{1}{\lambda} = \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \qquad a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} \\ a_2 &= \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \\ a_3 &= \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} \\ &\vdots \\ a_n &= \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1 - \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} \\ a_2 &= \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{4}} \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= \cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} \\ a_n &= \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \end{aligned}\right\}$$

Λύση (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}\\
\Leftrightarrow &\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{(x+1)(x+2)A + x(x+2)B + x(x+1)C}{x(x+1)(x+2)}\\
\Leftrightarrow &1 = (x+1)(x+2)A + x(x+2)B + x(x+1)C
\end{aligned}
$$

Θέτοντας $x = 0, -1, -2$, βρίσκουμε ότι $A = C = 1/2$, $B = -1$, οπότε

$$
\begin{aligned}
2s_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}\\
&= 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \to \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n = 1/4$.

Λύση (συνέχεια)

iii) Θέτουμε $a_n = \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$ και $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, οπότε

$$a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+2}\right) = \ln\frac{n+1}{n} + \ln\frac{n+1}{n+2} = \ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{n+2}{n+1}$$

και $\ln(x^k) = k\ln x$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+2}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\ln\frac{k+1}{k} = \ln 2 - \ln\frac{n+2}{n+1} \to \ln 2$$

Επομένως, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n = \ln 2.$

Άσκηση (άλυτες ασκήσεις 10-11)

Να ευρεθούν τα αθροίσματα των σειρών:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n}, \qquad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}, \qquad iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+2)},$$

Λύση

Υπενθυμίζονται οι τύποι της γεωμετρικής και της εκθετικής σειράς:

$$k \in \mathbb{N}, |x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} x^n = x^k + x^{k+1} + \cdots = \frac{x^k}{1-x},$$
$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots = e^x$$

Βάσει αυτών, έχουμε ότι

Λύση (συνέχεια)

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} = \frac{2/4}{1-2/4} + \frac{3/4}{1-3/4} = 4$$

$$\begin{aligned} ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + e = 2e \end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

$$iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-2)(n-1)}{n!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-3n+2}{n!}$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{n!} - 3\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n!} + 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots = e$$

$$= \boxed{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{n!}} - 3\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} - (1+2) - 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1$$

$$= 2e - 4 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2e - 4 - (e - 1 - 1) = e - 2$$

$$(n-1)!\, n(n+1)(n+2) = (n+2)!$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$0.\overline{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}, \quad 0.\overline{34} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{34}{100^n}, \quad 0.\overline{313} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{313}{1000^n}$$

$$0.0\overline{3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{10^n} = 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 3\,\frac{(1/10)^2}{1-1/10} = 3\,\frac{1}{100-10} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$

$$0.0\overline{9} = \dots = 0.1$$

Άσκηση (βλ. άλυτη άσκηση 13)

Να γραφούν σε ρητή μορφή οι αριθμοί:

$$1.1\overline{43}, \qquad 2.3\overline{9}.$$

Λύση

$$1.1\overline{43} = \frac{11.\overline{43}}{10} = \frac{11}{10} + \frac{43}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100^n} = \frac{11}{10} + \frac{43}{10}\frac{1/100}{1-1/100} = \frac{11}{10} + \frac{43}{10}\frac{1}{99}$$
$$= \frac{11\cdot 99 + 43}{10\cdot 99} = \frac{1132}{990}$$

$$2.3\overline{9} = \frac{23.\overline{9}}{10} = \frac{23}{10} + \frac{9}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n} = \frac{23}{10} + \frac{9}{10}\frac{1/10}{1-1/10} = \frac{23}{10} + \frac{9}{10}\frac{1}{9} = \frac{24}{10}$$

Άσκηση (βλ. άλυτη άσκηση 17)

Να υπολογισθεί μια προσέγγιση με σφάλμα μικρότερο του 0.001 για το άθροισμα: $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$.

Λύση (Πρόταση Leibniz)

Θέτουμε $a_n = \frac{1}{(2n)!}$ και $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, με $\lim s_n = S$ το ζητούμενο άθροισμα. Επειδή η (a_n) είναι φθίνουσα και μηδενική, βάσει της πρότασης Leibniz, προκύπτει ότι $|s_n - S| \leq a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)!}$. Επομένως, προκειμένου να είναι $|s_n - S| < 0.001$, αρκεί να επιλέξουμε n τέτοιο ώστε

$$a_{n+1} < 0.001 \Leftrightarrow \frac{1}{(2n+2)!} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow (2n+2)! > 1000 \Leftrightarrow n > 2,$$

οπότε, για $n = 3$, η προσέγγιση είναι $S \simeq s_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}$.

Άσκηση (βλ. άλυτη άσκηση 25)

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές

$$i)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^{3/2}-3n+5}{2n^2+3n^{5/3}+4n-3},\qquad ii)\sum_{n=1}^{\infty}n\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{n^2},\qquad ii)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n-2n}.$$

Λύση (1ο-2ο κριτήριο σύγκρισης)

$i)$ Θέτουμε $a_n=\dfrac{4n^{3/2}-3n+5}{2n^2+3n^{5/3}+4n-3}$. Η ακολουθία είναι θετικών όρων (τελικά). Συγκρίνοντας τους εκθέτες των μεγιστοβάθμιων όρων αριθμητή και παρονομαστή, παρατηρούμε ότι $p=2-3/2=1/2\leq 1$, οπότε αναμένουμε η σειρά να απειρίζεται, οπότε προσπαθούμε να φράξουμε τον a_n από μια μικρότερη παράσταση του n, που ξέρουμε ότι η σειρά της απειρίζεται.

$$a_n=\frac{4n^{3/2}-3n+5}{2n^2+3n^{5/3}+4n-3}\geq\frac{4n^{3/2}-3n^{3/2}}{2n^2+3n^2+4n^2}=\frac{n^{3/2}}{9n^2}=\frac{1}{9}\frac{1}{n^{1/2}}$$

Λύση (συνέχεια)

Ως γνωστό είναι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$ άρα και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, βάσει του 1ου κριτηρίου σύγκρισης.

(Εναλλακτικά, μπορεί να γίνει σύγκριση με την ακολουθία $b_n = \frac{1}{n^p}$, με $p = 2 - 3/2 = 1/2$, οπότε $\lim \frac{a_n}{b_n} = 2$, και να χρησιμοποιηθεί το 2ο κριτήριο σύγκρισης.)

ii) Θέτουμε $a_n = n\mathrm{tg}(1/n^2)$, και συγκρίνουμε με την $b_n = 1/n$.

$$\lim \frac{n\mathrm{tg}(1/n^2)}{1/n} = \lim \frac{\sin(1/n^2)}{1/n^2} \lim \frac{1}{\cos(1/n^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$
$$= 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

Επομένως, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, διότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Λύση (συνέχεια)

iii) Θέτουμε $a_n = \dfrac{1}{4^n - 2n}$ και συγκρίνουμε με την $b_n = \dfrac{1}{4^n}$.

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{4^n}{4^n - 2n} = \lim \frac{1}{1 - 2n/4^n} = 1,$$

διότι $c_n = n/4^n \to 0$. Πράγματι, $\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \dfrac{n+1}{4^{n+1}} \cdot \dfrac{4^n}{n} = \dfrac{n+1}{4n} \to \dfrac{1}{4} < 1.$
Επομένως, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n - 2n} < +\infty$, διότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} < +\infty.$

Παρατήρηση: Η λύση του *iii*) μέσω του 1ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι πιο δύσκολη. Θα δείξουμε ότι ο όρος $2n$ είναι αμελητέος σε σχέση με τον 4^n, φράσσοντας τελικά την ποσότητα $4^n - 2n$, π.χ. από το 4^{n-1}.

$$4^n - 2n \geq 4^{n-1} \Leftrightarrow 1 - \frac{2n}{4^n} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{2n}{4^n} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{n}{4^n} \leq \frac{3}{8}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει τελικά, δηλαδή από κάποιο n_0 και μετά, αφού $\frac{n}{4^n} \to 0$. Επομένως,

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{4^n - 2n} \leq \frac{1}{4^{n-1}},$$

οπότε, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n - 2n} < +\infty$, διότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} < +\infty$.

Άσκηση (βλ. άλυτη άσκηση 26)

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όταν

$$i)\ a_n = \frac{\ln n}{n^{4/3}}, \qquad ii)\ a_n = \frac{\ln n}{n^{3/4}}, \qquad iii)\ a_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{n+1}{n^3+n+1}\right).$$

Λύση (2ο κριτήριο σύγκρισης)

$i)$ Επειδή $4/3 > 1$, αναμένουμε ότι η εν λόγω σειρά θα συγκλίνει.

Επιλέγουμε p, με $1 < p < 4/3$ και συγκρίνουμε με την $b_n = \dfrac{1}{n^p}$.

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\ln n}{n^{4/3-p}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{4/3-p}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{(4/3-p)x^{4/3-p-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(4/3-p)x^{4/3-p}} = 0$$

οπότε, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, διότι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. .

Λύση (συνέχεια)

ii) Επειδή $3/4 < 1$, αναμένουμε ότι η εν λόγω σειρά θα απειρίζεται. Επιλέγουμε p, με $3/4 < p < 1$ (π.χ. $p = 4/5$) και συγκρίνουμε με την $b_n = \dfrac{1}{n^p}$.

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{n^{-3/4} \ln n}{n^{-p}} = \lim n^{p-3/4} \ln n = +\infty$$

οπότε, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, διότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

Λύση (συνέχεια)

iii) Επειδή για την παράσταση $c_n = \dfrac{n+1}{n^3+n+1}$ είναι βαθμός παρονομαστή - βαθμό αριθμητή $= 2$, συγκρίνουμε με την $b_n = \dfrac{1}{n^2}$.

$$\begin{aligned}\lim \frac{a_n}{b_n} &= \lim \frac{\operatorname{arctg}(c_n)}{c_n} \cdot \frac{c_n}{b_n} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \lim \frac{c_n}{b_n} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{arctg} x)'}{x'} \cdot \lim \frac{c_n}{b_n} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} \cdot \lim \frac{n^2(n+1)}{n^3+n+1} = 1\end{aligned}$$

Επομένως, βάσει του 2ου κριτηρίου σύγκρισης, είναι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, διότι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$.

Παρατήρηση: Για την απόδειξη του i), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το 1ο κριτήριο σύγκρισης ως εξής: Έστω σταθερά $c > 0$ της οποίας την τιμή θα υπολογίσουμε εκ των υστέρων. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $x > 0 \Rightarrow \ln x \leq x - 1 < x$, έχουμε ότι

$$\frac{\ln n}{n^{4/3}} = \frac{\ln(n^c)^{1/c}}{n^{4/3}} = \frac{\ln(n^c)}{cn^{4/3}} < \frac{n^c}{cn^{4/3}} = \frac{1}{cn^{4/3-c}}$$

Αρκεί λοιπόν να επιλέξουμε c τέτοιο ώστε

$$4/3 - c > 1 \Leftrightarrow c < 4/3 - 1 = 1/3$$

και να θέσουμε $b_n = \dfrac{1}{n^{4/3-c}}$. Τότε, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, επομένως θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Άσκηση (βλ. άλυτη άσκηση 29)

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όταν

$$i)\ a_n = \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^{n^2}, \quad ii)\ a_n = \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{n^2+1}\right)^n, \quad iii)\ a_n = (-1)^n \frac{100^n}{n^n}.$$

Λύση (Κριτήριο Cauchy)

$i)$ Είναι

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x,\ x\in\mathbb{R}$

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \left(1 - \frac{2}{3n}\right)^n = e^{-2/3} < 1$$

άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως.

$\vartheta = \text{arctg}\, 0 \Leftrightarrow \text{tg}\vartheta = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = 0 \qquad \vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Λύση (συνέχεια)

ii) Είναι

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \operatorname{arctg} \frac{n}{n^2+1} = \operatorname{arctg} 0 = 0 < 1$$

άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως.

iii) Είναι

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{100}{n} = 0 < 1$$

άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως.

Ασκήσεις

Άσκηση (βλ. άλυτη άσκηση 30)

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όταν

$$a_n = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}, & n = 3k, k \in \mathbb{N}^*, \\ 2^n, & n = 3k+1, k \in \mathbb{N}, \\ n^2 + 1, & n = 3k+2, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Λύση (Κριτήριο Cauchy)

Έστω $b_n = \sqrt[n]{|a_n|}$. Είναι

$$\lim b_{3n} = \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}, \qquad \lim b_{3n+1} = \lim \sqrt[n]{2^n} = 2,$$

$$\lim b_{3n+2} = \lim \sqrt[n]{n^2 + 1} = 1.$$

Επομένως, $\limsup b_n = \max\{1/e, 2, 1\} = 2 > 1$ και άρα η σειρά δεν συγκλίνει.

Άσκηση (βλ. άλυτη άσκηση 32)

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\frac{x^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Λύση (Κριτήριο D' Alembert)

Θέτοντας $a_n = n(n+1)\frac{x^n}{n!}$, έχουμε ότι

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{(n+1)(n+2)|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n(n+1)|x|^n}$$
$$= |x| \lim \frac{(n+2)}{(n+1)n} = 0 < 1,$$

άρα η πρώτη σειρά συγκλίνει απολύτως.

Λύση (συνέχεια)

Θέτοντας $b_n = \dfrac{x^n}{n(n+1)}$, έχουμε ότι

$$\lim \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \frac{n(n+1)}{|x|^n} = |x| \lim \frac{n}{n+2} = |x|.$$

άρα η δεύτερη σειρά συγκλίνει απολύτως όταν $|x| < 1$ και δεν συγκλίνει όταν $|x| > 1$. Η περίπτωση όπου $|x| = 1$ αντιμετωπίζεται ξεχωριστά. Στην περίπτωση αυτή, η σειρά συγκλίνει απολύτως ως τηλεσκοπική σειρά.

Ασκήσεις

Άσκηση (βλ. άλυτη άσκηση 33)

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όταν

$$i)\ a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)}{n!}, \qquad ii)\ a_n = \frac{n!(2n)!}{(3n)!}, \qquad iii)\ a_n = \frac{n^{100}}{2^n}.$$

Λύση (Κριτήριο D' Alembert)

$$\begin{aligned} i)\ \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+2)}{(n+1)!} \frac{n!}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)} \\ &= \lim \frac{2n+2}{n+1} = 2 > 1 \end{aligned}$$

άρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Λύση (συνέχεια)

$$ii)\ \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!}\frac{(3n)!}{n!(2n)!}$$
$$= \lim \frac{(n+1)(2n+1)(2n+2)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{4}{27} < 1$$

άρα η εν λόγω σειρά συγκλίνει απολύτως.

$$iii)\ \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^{100}} = \frac{1}{2}\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{100} = \frac{1}{2} < 1$$

άρα η εν λόγω σειρά συγκλίνει απολύτως.

Άσκηση (βλ. άλυτη άσκηση 35)

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{7 \cdot 11 \cdots (4n+3)} 2^n .$$

Λύση (Κριτήριο Raabe)

Θέτοντας $a_n = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{7 \cdot 11 \cdots (4n+3)} 2^n$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+2)}{7 \cdot 11 \cdots (4n+3)(4n+7)} 2^{n+1} \frac{7 \cdot 11 \cdots (4n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{1}{2^n} \\ &= 2\frac{2n+2}{4n+7} = \frac{4n+4}{4n+7} \to 1,\end{aligned}$$

οπότε δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα από το κριτήριο D' Alembert και, για τον λόγο αυτόν, χρησιμοποιούμε το κριτήριο Raabe.

Λύση (συνέχεια)

Έχουμε ότι,

$$n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)=n\left(1-\frac{4n+4}{4n+7}\right)=n\frac{4n+7-(4n+4)}{4n+7}$$
$$=\frac{3n}{4n+7}\to\frac{3}{4}<1,$$

επομένως, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=+\infty.$

Άσκηση (βλ. άλυτη άσκηση 40)

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)\sqrt{2n+5}}{(n^2+1)\sqrt{n^2+2}},$$

Λύση (Λογαριθμικό κριτήριο)

Θέτοντας $a_n = \dfrac{(n+2)\sqrt{2n+5}}{(n^2+1)\sqrt{n^2+2}}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim \frac{\ln|a_n|}{\ln(1/n)} &= \lim \frac{\ln((n+2)\sqrt{2n+5}) - \ln((n^2+1)\sqrt{n^2+2})}{-\ln n} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln(2x+5) - \ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+2)}{-\ln x}\end{aligned}$$

Λύση (συνέχεια)

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{\ln x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x+5)}{2\ln x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{\ln x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+2)}{2\ln x}$$

Στο σημείο αυτό, εφαρμόζουμε τον κανόνα L' Hopital και έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim\frac{\ln|a_n|}{\ln(1/n)} &= -\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x}} - \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x+5}}{\frac{1}{x}} + \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{1}{x}} + \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x^2+2}}{\frac{1}{x}} \\
&= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+2} - \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+5} + \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+1} + \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+2} \\
&= -1 - 1/2 + 2 + 1 = 3/2 > 1,
\end{aligned}$$

οπότε η σειρά συγκλίνει απολύτως.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)\sqrt{2n+5}}{(n^2+1)\sqrt{n^2+2}},$$

$$a_n = \frac{(n+2)\sqrt{2n+5}}{(n^2+1)\sqrt{n^2+2}}, \quad b_n = \frac{n\sqrt{n}}{n^2\, n} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(n+2)\sqrt{2n+5}}{(n^2+1)\sqrt{n^2+2}}\, n^{3/2} = \frac{\cancel{n^{3/2}}\ \cancel{n\sqrt{n}}\left(1+\frac{2}{n}\right)\sqrt{2+5/n}}{\cancel{n^2}\ \cancel{n}\ (1+1/n^2)\sqrt{1+2/n^2}}$$

$$\to \frac{(1+0)\sqrt{2+0}}{(1+0)\sqrt{1+0}} = \sqrt{2} \in \mathbb{R}^*$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$, έπεται (από το κριτ. σύγκρισης II) ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$

Άσκηση

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όταν

$i)\ a_n = \dfrac{n^2}{e^{\sqrt{n}}}, \quad ii)\ a_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}, \quad iii)\ a_n = \dfrac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}, \quad iv)\ a_n = \dfrac{1}{n\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}.$

Λύση

$i)$ Είναι

$$\lim \frac{\ln |a_n|}{\ln(1/n)} = \lim \frac{2\ln n - \sqrt{n}\ln e}{-\ln n} = -2 + \lim \frac{\sqrt{n}}{\ln n} = +\infty$$

άρα, από το λογαριθμικό κριτήριο, η σειρά συγκλίνει.

$ii)$ $1 \le \sqrt[n]{\ln n} < \sqrt[n]{n} \to 1$, άρα $a_n \to 1$, οπότε η σειρά δεν συγκλίνει.

Λύση (συνέχεια)

iii) Ο αριθμητής της παράστασης $a_n = \dfrac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}$ απειρίζεται, ενώ ο παρονομαστής τείνει στο e, άρα $a_n \to +\infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

iv)

$$a_n = \frac{1}{n^{4/3} - n^{1/2}} = \frac{1}{n^{4/3}(1 - n^{-5/6})} \leq \frac{2}{n^{4/3}} = b_n$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει τελικά επειδή $\lim(1 - n^{-5/6}) = 1$, οπότε τελικά $1 - n^{-5/6} \geq 1/2$. Η σειρά της (b_n) συγκλίνει ως p-σειρά με $p = 4/3 > 1$, άρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

Άσκηση (προαιρετική)

Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, όπου

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, \qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Λύση

Η πρώτη σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη, βάσει του κριτηρίου Leibniz, διότι η $(|a_n|)$ είναι φθίνουσα και μηδενική, ενώ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$ ως p-σειρά με $p = 1/2 < 1$. Για τη δεύτερη σειρά, έχουμε ότι

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{1}{\sqrt{4n}} + \frac{1}{\sqrt{4n}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4n}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4n}} = c_n > 0.$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty$, έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

Παρατήρηση: Οι δύο προηγούμενες σειρές έχουν τους ίδιους ακριβώς όρους, αλλά σε διαφορετική διάταξη. Πράγματι, είναι

$$
\begin{aligned}
&\{\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}^*\} \\
=&\{\frac{1}{\sqrt{2n-1}} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\frac{-1}{\sqrt{2n}} : n \in \mathbb{N}^*\} \\
=&\{\frac{1}{\sqrt{4n-3}} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\frac{1}{\sqrt{4n-1}} : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\frac{-1}{\sqrt{2n}} : n \in \mathbb{N}^*\}
\end{aligned}
$$

Εν τούτοις, η πρώτη συγκλίνει ενώ η δεύτερη όχι. Αυτό είναι ένα γενικότερο αποτέλεσμα (Θεώρημα Riemann), σύμφωνα με το οποίο, όταν μια σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη, τότε για κάθε $x \in \overline{\mathbb{R}}$ υπάρχει αναδιάταξη των όρων της σειράς που να αθροίζει στο x.

Άσκηση (προαιρετική) (βλ. άλυτη άσκηση 54)

Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots=+\infty.$$

Λύση

Ο γενικός όρος της σειράς είναι ο $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\lfloor (n+3)/2 \rfloor + (-1)^n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Έστω $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ η ακολουθία μερικών αθροισμάτων. Είναι

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{k+1}+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k} \to +\infty$$

και $s_{2n-1} = s_{2n-2} + a_{2n-1} = s_{2n-2} + \dfrac{1}{\sqrt{n}-1} \to +\infty + 0 = +\infty$.

Επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n = +\infty$.

Άσκηση (προαιρετική)

Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός e είναι άρρητος.

Λύση

Έστω ότι είναι ρητός, δηλαδή $e = m/n_0$, όπου $m, n_0 \in \mathbb{N}^*$. Ως γνωστό, είναι $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, οπότε

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

$$
\begin{aligned}
0 < e - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{1}{n!} &= \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
&= \frac{1}{(n_0+1)!} \left(1 + \frac{1}{n_0+2} + \frac{1}{(n_0+2)(n_0+3)} + \cdots\right) \\
&< \frac{1}{(n_0+1)!} \left(1 + \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{(n_0+1)^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{(n_0+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n_0+1)^k} = \frac{1}{(n_0+1)!} \frac{1}{1-\frac{1}{n_0+1}} = \frac{1}{n_0!} \frac{1}{n_0}
\end{aligned}
$$

Λύση (συνέχεια)

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με $n_0!n_0$, προκύπτει η ανισότητα

$$0 < n_0!m - n_0!n_0 \sum_{n=0}^{n_0} \frac{1}{n!} < 1.$$

Η παραπάνω διαφορά είναι ακέραιος, ως διαφορά ακεραίων, άρα ένας ακέραιος μεταξύ των 0 και 1, το οποίο είναι άτοπο.