# ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

## ΚΕΦ. 4, 5: Όριο - Συνέχεια - Παράγωγος

Σημειώσεις Φροντιστηρίου

Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

**Όριο συνάρτησης**: Αν $\xi, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, είναι $\lim_{x \to \xi} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in D(f)$ με

$$\begin{cases} 0 < |x - \xi| < \delta, & \text{αν } \xi \in \mathbb{R}, \\ x > \delta, & \text{αν } \xi = +\infty, \\ x < -\delta, & \text{αν } \xi = -\infty, \end{cases} \text{ να ισχύει } \begin{cases} |f(x) - \ell| < \varepsilon, & \text{αν } \ell \in \mathbb{R}, \\ f(x) > \varepsilon, & \text{αν } \ell = +\infty, \\ f(x) < -\varepsilon, & \text{αν } \ell = -\infty. \end{cases}$$

Τα πλευρικά όρια $\lim_{x \to \xi^+} f(x)$ και $\lim_{x \to \xi^-} f(x)$ στο $\xi \in \mathbb{R}$ ορίζονται όπως παραπάνω, με την επιπλέον απαίτηση να είναι $x > \xi$ (αντίστοιχα $x < \xi$). Το όριο της $f$ στο $\xi$ υπάρχει αν και μόνο αν τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα.

**Αρχή της μεταφοράς**: Αν $\xi, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, είναι $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)$ τέτοια ώστε $x_n \in D(f) \setminus \{\xi\}$ και $\lim x_n = \xi$ ισχύει $\lim f(x_n) = \ell$.

Εφαρμογές: $\lim\limits_{x \to 0} \cos \dfrac{1}{x}$.

**Ιδιότητες ορίου**: Οι τρεις πρώτες ιδιότητες ισχύουν αρκεί να υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to\xi} f(x)$, $\lim_{x\to\xi} g(x)$, με $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$, και να μην προκύπτει απροσδιοριστία $(+\infty - \infty,\ 0\cdot(\pm\infty))$. Οι τρεις τελευταίες απαιτούν να πληρούνται οι αντίστοιχες προϋποθέσεις σε μια περιοχή $\pi(\xi)\setminus\{\xi\}$.

- $\lim_{x\to\xi}(kf(x)+\lambda g(x)) = k\lim_{x\to\xi} f(x) + \lambda \lim_{x\to\xi} g(x)$.
- $\lim_{x\to\xi}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to\xi} f(x)\lim_{x\to\xi} g(x)$.
- $\lim_{x\to\xi} |f(x)|^k = |\lim_{x\to\xi} f(x)|^k$, για κάθε $k \in \mathbb{Q}^*$. (Το απόλυτο μπορεί να παραληφθεί, όταν $k\in\mathbb{N}^*$.)
- (Κριτήριο παρεμβολής) Αν $\lim_{x\to\xi} h(x) = \lim_{x\to\xi} g(x) = \ell$ και $h(x) \le f(x) \le g(x)$, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$.
- (Σύνθεση) Αν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to\ell} g(x) = m$ και $f(x) \neq \ell$, τότε $\lim_{x\to\xi} g(f(x)) = m$.
- Αν $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to\xi} f(x) = a \in (0,+\infty)$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = b\in\mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to\xi}(f(x))^{g(x)} = a^b$.

**Βασικά όρια:**

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1.$
  (Αποδεικνύονται με το κριτήριο παρεμβολής.)
  Εφαρμογές:
  $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{3x}}{x},\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x(e^x+e^{-x})},\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x(x+2)},\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=e^a$, για κάθε $a\in\mathbb{R}$.

**Ασύμπτωτες**:

- Αν $\xi \in \mathbb{R}$, τότε η ευθεία $x = \xi$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $f$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x \to \xi^+} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim\limits_{x \to \xi^-} f(x) = \pm\infty$.
- Αν $\xi = \pm\infty$, τότε η ευθεία $y = ax + b$ είναι
$$\begin{cases} \text{πλάγια ασύμπτωτη της } f, & \text{αν } a \neq 0, \\ \text{οριζόντια ασύμπτωτη της } f, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$
αν και μόνο αν $\lim\limits_{x \to \xi} (f(x) - (ax + b)) = 0$.
Οι $a, b$ υπολογίζονται ως εξής:
$$a = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x)}{x} \text{ και } b = \lim_{x \to \xi} (f(x) - ax).$$

# Συνέχεια

**Ορισμός (συνέχεια συνάρτησης)**

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\xi \in D(f)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi).$$

**Ορισμός (ακολουθιακός ορισμός συνέχειας)**

Η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\xi \in D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)$ με $x_n \in D(f)$ και $\lim x_n = \xi$ είναι $\lim f(x_n) = f(\xi)$.

Μια συνάρτηση ονομάζεται συνεχής, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

**Ασυνέχεια**:

- **Πρώτου είδους**: Αν τα πλευρικά όρια $\lim_{x \to \xi^+} f(x)$, και $\lim_{x \to \xi^-} f(x)$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι και τα δύο ίσα με $f(\xi)$.
- **Δεύτερου είδους**: Αν κάποιο από τα πλευρικά όρια δεν υπάρχει.

**Βασικές συνεχείς συναρτήσεις:**

- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση.
- Κάθε ρητή συνάρτηση (πηλίκο δύο πολυωνύμων) είναι συνεχής.
- Η $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.
- Οι τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις.
- Οι $a^x$ και $\log_a x$, $1 \neq a > 0$.
- Αν $f, g$ συνεχείς τότε είναι και οι

$$kf + \lambda g, \quad fg, \quad \frac{f}{g},$$

$$(f(x))^{g(x)}, \text{ αν } f(x) > 0, \quad |f|^a, \text{ όπου } a > 0, \quad g \circ f, \text{ αν } R_f \subseteq D_g.$$

# Συνέχεια

**Συνέχεια σε κλειστό διάστημα:** Έστω $f/[a,b]$ συνεχής.

- Η $f$ είναι φραγμένη.
- Υπάρχουν $m, M \in [a,b]$ με $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$, για κάθε $x \in [a,b]$. (Θεώρημα μεγίστου-ελαχίστου)
- Αν $f(a) < \gamma < f(b)$ ή $f(b) < \gamma < f(a)$, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $f(\xi) = \gamma$. (Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής)
- Αν $f(a)f(b) < 0$, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $f(\xi) = 0$. (Θεώρημα Bolzano)
- Αν $f : [a,b] \to [a,b]$, υπάρχει $\xi \in [a,b]$ με $f(\xi) = \xi$. (Θεώρημα σταθερού σημείου)
- Αν η $f$ είναι 1-1, τότε η $f^{-1}/f([a,b])$ είναι επίσης συνεχής.

# Ομοιόμορφη συνέχεια

**Ορισμός (ομοιόμορφη (ή ομαλή) συνέχεια)**

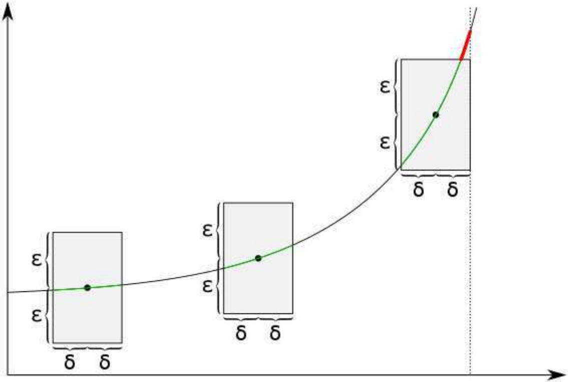
Η συνάρτηση $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν

$$\text{Για κάθε } \varepsilon > 0, \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε}$$
$$(x, y \in D(f) \text{ και } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Η έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας αναφέρεται σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της $f$ και όχι σε μεμονωμένο σημείο. Αποδεικνύεται ότι κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι και συνεχής. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Όμως, κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής.

# Ομοιόμορφη συνέχεια

Όταν η συνάρτηση $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η γραφική παράσταση της $f$ να μην τέμνει την πάνω ούτε την κάτω πλευρά του ορθογωνίου με κέντρο ένα οποιοδήποτε σημείο $(x, f(x))$, κατακόρυφη πλευρά μήκους $2\varepsilon$ και οριζόντια πλευρά μήκους $2\delta$ (βλ. παρακάτω σχήμα).



# Ασκήσεις

## Λυμένη άσκηση 3, (βλ. άλυτη άσκηση 4)

Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $f(x) = \cos(1/x)/\mathbb{R}^*$, όταν $x \to 0$.

## Λύση

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι το πλευρικό όριο $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ δεν υπάρχει, αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες $(x_n)$ και $(y_n)$ θετικών αριθμών, τέτοιες ώστε $\lim x_n = \lim y_n = 0$ και τα όρια των ακολουθιών $(f(x_n))$, $(f(y_n))$ να υπάρχουν αλλά να είναι διαφορετικά.

Επιλέγουμε $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ και $y_n = \dfrac{1}{2\pi n + \pi/2}$, οι οποίες είναι προφανώς μηδενικές. Επιπλέον, είναι

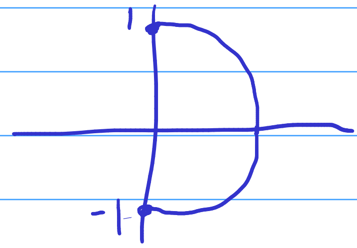
$$\lim f(x_n) = \lim \cos(2\pi n) = \lim \cos(0) = 1,$$

$$\lim f(y_n) = \lim \cos(2\pi n + \pi/2) = \lim \cos(\pi/2) = 0 \neq 1.$$

$$\lim_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$x_n = \frac{1}{\pi n + \pi/2} \qquad f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$$

$$x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \qquad f(x_n) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$




$$y_n = \frac{1}{2\pi n} \qquad f(y_n) = \sin(2\pi n) = \sin 0 = 0$$

## Λύση (συνέχεια)

Άρα, πράγματι το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ δεν υπάρχει.
(Αν υπήρχε, τότε θα έπρεπε να είναι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim f(x_n) = \lim f(y_n)$.)
Ομοίως, το πλευρικό όριο $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ δεν υπάρχει, διότι αν επιλέξουμε δύο μηδενικές ακολουθίες αρνητικών αριθμών, π.χ. τις

$$x_n = \frac{-1}{2\pi n} \qquad \text{και} \qquad y_n = \frac{-1}{2\pi n + \pi/2},$$

τότε

$$\lim f(x_n) = \lim \cos(-2\pi n) = \lim \cos(0) = 1,$$

$$\lim f(y_n) = \lim \cos(-2\pi n - \pi/2) = \lim \cos(-\pi/2) = 0 \neq 1.$$

## Λυμένη άσκηση 13

Να ευρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$i)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor, \qquad ii)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt[\lfloor x\rfloor]{x}, \qquad iii)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x\lfloor x\rfloor}{4x^2+3}.$$

## Λύση

$i)$ Από τον ορισμό του ακεραίου μέρους του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $\lfloor x\rfloor \le x < \lfloor x\rfloor + 1$, ή ισοδύναμα $x - 1 < \lfloor x\rfloor \le x$. Επομένως,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{2} - 1\right) \le \frac{1}{x}\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \le \frac{1}{x}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Επειδή, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \frac{1}{2}$.

**Λύση (συνέχεια)**

$ii$) Ομοίως, για $x > 1$, προκύπτει ότι

$$\sqrt[\lfloor x \rfloor]{\lfloor x \rfloor} \leq \sqrt[\lfloor x \rfloor]{x} < \sqrt[\lfloor x \rfloor]{\lfloor x \rfloor + 1} \leq \sqrt[\lfloor x \rfloor]{\lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor} = \sqrt[\lfloor x \rfloor]{\lfloor x \rfloor}\,\sqrt[\lfloor x \rfloor]{2}$$

Από τα γνωστά όρια $\lim \sqrt[n]{n} = \lim \sqrt[n]{2} = 1$, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[\lfloor x \rfloor]{\lfloor x \rfloor} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[\lfloor x \rfloor]{2} = 1$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[\lfloor x \rfloor]{x} = 1$.

## Λύση (συνέχεια)

Εναλλακτικά, θέτοντας $f(x) = \sqrt[\lfloor x \rfloor]{x}$, έχουμε ότι

$$\frac{\ln x}{x} \leq \ln f(x) = \ln x^{1/\lfloor x \rfloor} = \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \ln x < \frac{\ln x}{x-1}$$

Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0.$

Για το πρώτο όριο, για $x > 1$, έχουμε ότι

$x>0 \Rightarrow \ln x \leq x-1 < x$

$$0 < \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln(\sqrt{x})^2}{x} = \frac{2\ln\sqrt{x}}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}},$$

οπότε δεδομένου ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, έπεται ότι και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

Επομένως, είναι και

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 0 \cdot 1 = 0.$$

**Λύση (συνέχεια)**

*iii*) Ομοίως,

$$\frac{x^2-x}{4x^2+3} = \frac{x(x-1)}{4x^2+3} < \frac{x\lfloor x\rfloor}{4x^2+3} \leq \frac{x^2}{4x^2+3}$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x}{4x^2+3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{4x^2+3} = \dfrac{1}{4}$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\lfloor x\rfloor}{4x^2+3} = \dfrac{1}{4}$.

**Λυμένη άσκηση 23 (βλ. άλυτες ασκήσεις 25, 26)**

Να υπολογισθούν τα όρια

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x},\qquad ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{1-\cos x},\qquad iii)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{1-\cos x},\ a,b\in\mathbb{R}.$$

**Λύση**

Θα χρησιμοποιηθεί το γνωστό όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, καθώς και η γνωστή ταυτότητα $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, οπότε

$$\sin^2 x = 1-\cos^2 x=(1-\cos x)(1+\cos x).$$

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos^2 x}(1+\cos x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin^2 x}(1+\cos x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=1(1+\cos 0)=2.$$

## Λύση (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{1-\cos^2 x}(1+\cos x)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin^2 x}{\sin^2 x}(1+\cos x)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}+1\right)(1+\cos x)\\
&= \left(1+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\lim_{x\to 0}(1+\cos x)\\
&= (1+1)(1+\cos 0)=4.
\end{aligned}
$$

$$
iii)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos bx}{1-\cos x}-\frac{1-\cos ax}{1-\cos x}\right).
$$

## Λύση (συνέχεια)

Επιπλέον, είναι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos bx}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 bx}{1-\cos^2 x}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 bx}{\sin^2 x}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos bx}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin bx}{bx}\right)^2 \lim_{x\to 0}\left(\frac{bx}{\sin x}\right)^2 \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{1+\cos bx}\\
&= \left(\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\right)^2 b^2 \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2 \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{1+\cos bx}\\
&= 1\cdot b^2\cdot 1\cdot\frac{1+1}{1+1} = b^2.
\end{aligned}$$

Ομοίως προκύπτει και $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos x} = a^2$.

’ρα, τελικά είναι $\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{1-\cos x} = b^2-a^2$.

**Λυμένη άσκηση 25 (βλ. άλυτη άσκηση 28)**

Να υπολογισθούν τα όρια

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{3x}}{x},\qquad ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x(e^{x}+e^{-x})},\qquad iii)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-b^{x}}{x},\qquad a,b>0.$$

**Λύση**

Θα χρησιμοποιηθεί το γνωστό όριο $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$.

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{3x}}{x}=\lim_{x\to 0}e^{3x}\frac{e^{4x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}(4e^{3x})\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}$$
$$=4e^{0}\lim_{z\to 0}\frac{e^{z}-1}{z}=4.$$

## Λύση (συνέχεια)

*ii*) Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με $e^x$, προκύπτει

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x(e^x+e^{-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x(e^{2x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\frac{2}{e^{2x}+1}$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^{2x}+1}=1\cdot\frac{2}{1+1}=1.$$

*iii*) Δεδομένου ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln a^x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\ln a=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}\ln a=\ln a,$$

προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}=\ln a-\ln b.$$

## Λυμένη άσκηση 30 (βλ. άλυτη άσκηση 32)

Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+x+1}\right)^x$.

## Λύση

Θα χρησιμοποιηθεί το γνωστό όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e$. Θέτουμε

$$f(x) = \left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+x+1}\right)^x = \left(1+\frac{3x+2}{x^2+x+1}\right)^x \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2+x+1}{3x+2},$$

οπότε

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^x = \left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)\frac{x}{g(x)}}.$$

Αν επιπλέον τεθούν

$$G(x) = \left(1+\frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} \qquad \text{και} \qquad h(x) = \frac{x}{g(x)},$$

## Λύση (συνέχεια)

τότε, επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, έπεται ότι

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} = \lim_{z \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z} = e$$

και επιπλέον

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \frac{x(3x+2)}{x^2 + x + 1} = 3,$$

οπότε

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} G(x)^{h(x)} = \lim_{x \to +\infty} G(x)^{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)} = e^3.$$

## Λύση (συνέχεια)

Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\ln f(x) &= \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{3x+2}{x^2+x+1}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(3x+2)}{x^2+x+1}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3x+2}{x^2+x+1}\right)}{\frac{3x+2}{x^2+x+1}}\\ &= 3\lim_{z\to1}\frac{\ln z}{z-1}=3,\end{aligned}$$

επομένως,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{\ln f(x)}=e^3.$$

$$g(x) = \frac{3x+2}{x^2+x+1} \qquad \lim_{x \to +\infty} \left( x \ln\left(1+g(x)\right) \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+g(x))}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{g'(x)}{(1+g(x)) \frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 g'(x)}{1+g(x)} = \ldots$$

$$\boxed{f^g = e^{\ln f^g} = e^{g \ln f}}$$

### Άσκηση

Να προσδιορισθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f/\mathbb{R}^*$, με $f(x) = x + 1/x$.

### Λύση

Η $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty = -\lim_{x\to 0^-} f(x)$, οπότε η $x = 0$ είναι η μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη.
Για τον προσδιορισμό των πλάγιων (και οριζόντιων) ασύμπτωτων, εξετάζουμε το όριο του πηλίκου $f(x)/x$, όταν $x \to \pm\infty$. Είναι

$y = ax + b$

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + 1/x^2\right) = 1$$

και

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} 1/x = 0,$$

οπότε η $y = x$ είναι (η μοναδική) πλάγια ασύμπτωτη της $f$.

## Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι η $f(x) = x^2/[0, +\infty)$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

## Λύση

Έστω $\varepsilon = 1$. Αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $y > x > 0$, τέτοια ώστε

$$|y - x| < \delta \qquad \text{και} \qquad |y^2 - x^2| \geq \varepsilon. \tag{1}$$

Αν $y = x + 1/x$, με $x > 0$, τότε

$$|y^2 - x^2| = |x^2 + 2 + 1/x^2 - x^2| = 2 + 1/x^2 > 2 > 1 = \varepsilon.$$

Επιπλέον, τότε είναι $|y - x| = 1/x$, επομένως, δοθέντος του $\delta$, αρκεί να επιλεχθεί οποιοδήποτε $x > 1/\delta$ και $y = x + 1/x$, ώστε να ισχύουν οι ανισότητες της (1).

# Ασκήσεις

## Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι η $f(x) = \sqrt{x}/[0, +\infty)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

## Λύση

Έστω $\varepsilon > 0$. Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\left(y > x \geq 0 \text{ και } |y - x| < \delta\right) \Rightarrow |\sqrt{y} - \sqrt{x}| < \varepsilon. \tag{2}$$

Αν $\sqrt{y} + \sqrt{x} < \varepsilon$, τότε

$|a - b| \leq |a| + |b|$

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{y} + \sqrt{x} < \varepsilon.$$

Αν $\sqrt{y} + \sqrt{x} \geq \varepsilon$, τότε

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| = \frac{|y - x|}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} < \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Επομένως, αρκεί να επιλεχθεί $\delta = \varepsilon^2$, ώστε να ισχύει η (2).

# Παράγωγος

## Ορισμός

Η παράγωγος $f'(\xi)$ της $f$ στο σημείο $\xi$ του πεδίου ορισμού της ταυτίζεται με το ακόλουθο όριο, όταν αυτό υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός:

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}.$$

Αν η $f/A$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $\xi \in A$, τότε η συνάρτηση που ορίζεται από τα ζεύγη $(\xi, f'(\xi))$ ονομάζεται *παράγωγος συνάρτηση* της $f$ και συμβολίζεται με $f'(x)$ ή $\frac{df}{dx}$.

## Πρόταση

Αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\xi$, τότε θα είναι και συνεχής σε αυτό.

# Παράγωγος

**Κανόνες παραγώγισης**: Αν $f$, $g$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε

- $(\lambda f + kg)' = \lambda f' + kg'$ (Γραμμικότητα)
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
- $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$,
  ή ισοδύναμα $\dfrac{df \circ g}{dx} = \dfrac{df \circ g}{dg}\dfrac{dg}{dx}$ (Κανόνας αλυσίδας)
- $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

**Βασικές παραγωγίσεις**:

| $f(x)$ | $c$ | $x^a$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $e^x$ | $a^x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $ax^{a-1}$ | $\frac{1}{x}$ | $e^x$ | $a^x \ln a$ | $\cos x$ | $-\sin x$ |

| $f(x)$ | $\arcsin x$ | $\arccos x$ | $\mathrm{arctg}\, x$ | $\mathrm{arcctg}\, x$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\frac{-1}{1+x^2}$ |

**Παράγωγος ανώτερης τάξης**: Η $n$-οστή παράγωγος $f^{(n)}(x)$ (ή $\dfrac{d^n f}{dx^n}$) της $f(x)$, όπου $n \in \mathbb{N}$, ορίζεται αναδρομικά ως εξής:
$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ και $f^{(0)}(x) = f(x)$ (με την προϋπόθεση βέβαια ότι η $f^{(k)}(x)$ παραγωγίζεται, για κάθε $k < n$).

**Βασικές παράγωγοι $n$ τάξης**:

$$\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad \sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

**Εφαπτομένη**: Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι:

- Η $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$, αν η $f$ παραγωγίζεται στο $\xi$.
  Η κάθετη στην εφαπτομένη αυτή είναι η $y - f(\xi) = -\dfrac{1}{f'(\xi)}(x - \xi)$.
- Η $x = \xi$, αν $\displaystyle\lim_{x \to \xi^-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}, \lim_{x \to \xi^+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \in \{-\infty, +\infty\}$.

Η τιμή $f'(\xi)$ ονομάζεται *συντελεστής διεύθυνσης* ή *κλίση* της εφαπτομένης.

**Παραμετρική μορφή**: Αν μια καμπύλη $C$ δίνεται σε παραμετρική μορφή δύο μεταβλητών $x, y$ ως προς μια παράμετρο $t \in A$, δηλαδή $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = f(t), y = g(t), t \in A\}$, τότε, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε ότι $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{g'}{f'}$, οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε την εφαπτομένη της σε κάποιο σημείο $\xi$.

**Διαφορικό συνάρτησης**: Αν μια συνάρτηση $f/A$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο $\xi$ του πεδίου ορισμού της, τότε ορίζεται η $f'(\xi)$ και άρα και η συνάρτηση $df(\xi)/\mathbb{R}$, με τύπο $df(\xi)(t) = f'(\xi)t$, η οποία ονομάζεται **διαφορικό της** $f$ **στο σημείο** $\xi$.
Προσοχή! Η μεταβλητή της συνάρτησης $df(\xi)$ είναι το $t$ και όχι το $\xi$.
Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της $f$ στο $\xi$ γράφεται ως

$$y = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) = f(\xi) + df(\xi)(\Delta x), \qquad \text{όπου } \Delta x = x - \xi.$$

Ο τύπος αυτός δίνει μια προσέγγιση της τιμής $f(x)$, δηλαδή είναι

$$f(x) \approx f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) = f(\xi) + df(\xi)(x - \xi).$$

Αν επιπλέον η $f$ παραγωγίζεται σε κάθε σημείο $\xi \in A^0$, τότε ορίζεται η συνάρτηση $\xi \mapsto df(\xi)$, με πεδίο ορισμού το $A^0$, η οποία ονομάζεται **διαφορικό της** $f$ και συμβολίζεται με $df$. Η $df$ είναι δηλαδή μια συνάρτηση του $\xi$, που απεικονίζει κάθε $\xi$ σε μια συνάρτηση $df(\xi)$ του $t$.
Ειδικά, το διαφορικό $dx$ της ταυτοτικής συνάρτησης $I(x) = x$ απεικονίζει κάθε $\xi$ στην ταυτοτική συνάρτηση $dx(\xi)(t) = I'(\xi)t = t$, οπότε $df = f'dx$.

# Παράγωγος

## Θεώρημα (Fermat)

*Αν η $f/A$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο $\xi$ του $A$ και παρουσιάζει σε αυτό τοπικό ακρότατο, τότε είναι $f'(\xi) = 0$. (Το $\xi$ είναι εσωτερικό σημείο του $A$ όταν υπάρχει περιοχή $\pi(\xi) \subseteq A$.)*

## Θεώρημα (Rolle)

*Αν η $f$ συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο $(a, b)$ και $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.*

## Θεώρημα (Μέσης Τιμής)

*Αν η $f$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο $(a, b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

## Πόρισμα

*Αν $f, g/(a, b)$ παραγωγίσιμες, με $f'(x) = g'(x)$, για κάθε $x \in (a, b)$, τότε $f(x) = g(x) + c$, για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$.*

**Απροσδιόριστες μορφές:** $\frac{0}{0}$, $(\pm 1)\frac{+\infty}{+\infty}$, $\pm\infty + (\mp\infty)$, $0(\pm\infty)$, $0^0$, $1^{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$

**Ο κανόνας του L' Hopital:** Αν $f, g/\pi(\xi) \setminus \{\xi\}$ παραγωγίσιμες, $g'(x) \neq 0$ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} g(x) = \ell$, όπου $\ell \in \{0, -\infty, +\infty\}$, και υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε είναι $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Οι υπόλοιπες απροσδιόριστες μορφές μπορούν να επιλυθούν με τον κανόνα του L' Hopital, αφού πρώτα αναχθούν σε κάποια από τις δύο πρώτες μορφές με τη βοήθεια των τύπων:

$$f - g = \frac{\frac{f-g}{fg}}{\frac{1}{fg}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}, \qquad fg = \frac{f}{\frac{1}{g}}, \qquad f^g = e^{\ln f^g} = e^{g \ln f}$$

**Μονοτονία**: Αν $f$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο $(a, b)$, τότε

- $f$ αύξουσα $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ (αντίστοιχα $f$ φθίνουσα $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$), για κάθε $x \in (a, b)$.
- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα), για κάθε $x \in (a, b)$.
  (Προσοχή, στη δεύτερη περίπτωση δεν ισχύει η ισοδυναμία.)

**Ακρότατα**: Τα υποψήφια σημεία τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης ονομάζονται *κρίσιμα σημεία* και είναι: τα εσωτερικά σημεία όπου μηδενίζεται ή δεν ορίζεται η παράγωγος, καθώς και τα άκρα διαστημάτων (αρκεί η συνάρτηση να ορίζεται στα άκρα αυτά). Αν ισχύει κάποια από τις επόμενες συνθήκες:

- η $f$ είναι συνεχής στο $\xi$ και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\begin{cases} x \in (\xi - \delta, \xi) \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ και} \\ x \in (\xi, \xi + \delta) \Rightarrow f'(x) < 0. \end{cases}$
- η $f$ είναι παραγωγίσιμη σε κάποια περιοχή $\pi(\xi)$, με $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) < 0$,

τότε το $\xi$ είναι θέση τοπικού μεγίστου της $f$. Αλλάζοντας τις ανισότητες για τις $f'$, $f''$, προκύπτει θέση τοπικού ελαχίστου.

**Κυρτότητα**: Η $f/(a,b)$ είναι κυρτή αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in (a,b)$ και $t \in (0,1)$. (Ορισμός)
- $f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1)$, για κάθε $x_1, x_2 \in (a,b)$.
- $f'/(a,b)$ αύξουσα.
- $f''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (a,b)$.

Αλλάζοντας τις ανισότητες (και θέτοντας $f'/(a,b)$ φθίνουσα), προκύπτουν οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε να είναι η $f$ κοίλη. Αν ισχύουν γνήσιες ανισότητες, τότε η $f$ είναι γνησίως κυρτή (αντίστοιχα κοίλη).

**Σημείο καμπής**: Κάθε σημείο της γραφικής παράστασης στο οποίο η συνάρτηση αλλάζει κυρτότητα.

- Αν το $\xi$ είναι θέση σημείου καμπής, τότε $f''(\xi) = 0$.
- Αν $f''(\xi) = 0$ και $f'''(\xi) \neq 0$, τότε το $\xi$ είναι θέση σημείου καμπής.

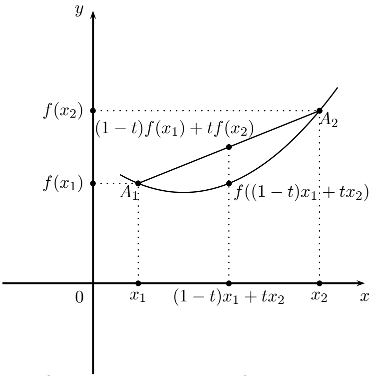
**Παρατηρήσεις στον ορισμό της κυρτότητας**: Έστω $f/(a,b)$ κυρτή. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό είναι

$$f((1-t)x_1+tx_2) \leq (1-t)f(x_1)+tf(x_2), \quad x_1, x_2 \in (a,b), t \in (0,1). \tag{3}$$

Η παραμετρική εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι η

$$(x,y) = ((1-t)x_1+tx_2, (1-t)y_1+ty_2), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Αν περιορίσουμε το $t$ στο $[0,1]$, τότε τα σημεία $(x,y)$ είναι τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $AB$.
Επομένως, η ανισότητα (3) δηλώνει γεωμετρικά ότι αν $A=(x_1, f(x_1))$ και $B=(x_2, f(x_2))$ είναι δύο σημεία της καμπύλης $C_f$ της $f$, τότε κάθε σημείο $(x,y)$ στο ευθύγραμμο τμήμα $AB$ βρίσκεται ψηλότερα από το αντίστοιχο σημείο $(x, f(x))$ της καμπύλης $C_f$, δηλαδή $f(x) \leq y$ (βλ. επόμενο σχήμα).




Η ανισότητα (3) γενικεύεται επαγωγικά στην

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i), \quad x_1,\ldots,x_n \in (a,b), t_1,\ldots,t_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1. \tag{4}$$

## Εφαρμογή

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = -\ln x/(0, +\infty)$ είναι κυρτή και στη συνέχεια να αποδειχθεί η ανισότητα (Cauchy)

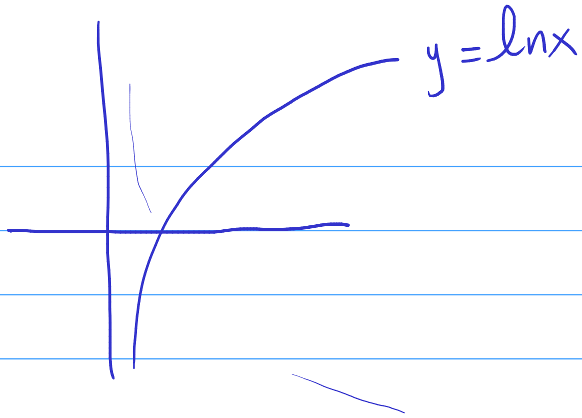
$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \qquad a_1, \ldots, a_n > 0.$$

## Λύση

Είναι $f'(x) = -1/x$ και $f''(x) = 1/x^2 > 0$, άρα $f$ κυρτή.
Αφού $f$ κυρτή, η ανισότητα (4), για $t_1 = \cdots = t_n = 1/n$, δίνει

$$-\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \leq -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i) = -\frac{1}{n}\ln(a_1 \cdots a_n) = -\ln(\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n})$$

και, επειδή η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα (αφού $f'(x) < 0$), έπεται τελικά ότι $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$.




$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx$$

$$(f^g)' = \left(e^{\ln f^g}\right)' = \left(e^{g \ln f}\right)' = e^{g \ln f}\,(g \ln f)'$$

$$= f^g\left(g' \ln f + g\frac{f'}{f}\right)$$

$$F = f^g,\ \frac{F'}{F} = (\ln F)' = (g \ln f)' = \ldots = g' \ln f + g\frac{f'}{f}$$

## Λυμένη άσκηση 13 (βλ. άλυτη άσκηση 17)

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

$$f(x) = x^x/(1, +\infty), \qquad g(x) = (x^2 + x + 1)^{x^2}/\mathbb{R}$$

## Λύση

$$(f(x))' = (x^x)' = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x}(x \ln x)'$$
$$= x^x \left(x' \ln x + x(\ln x)'\right) = x^x (\ln x + 1)$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = (\ln g(x))' = (x^2 \ln(x^2 + x + 1))'$$
$$= \left(2x \ln(x^2+x+1) + \frac{x^2}{x^2+x+1}(x^2+x+1)'\right)$$
$$= \left(2x \ln(x^2+x+1) + \frac{x^2(2x+1)}{x^2+x+1}\right)$$

## Λυμένη άσκηση 23 (βλ. άλυτη άσκηση 28)

Να ευρεθούν οι σταθερές $a, b, c \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 + ax + b/\mathbb{R}$ και $g(x) = x^3 - c/\mathbb{R}$ τέμνονται στο σημείο $(1, 2)$ και έχουν κοινή εφαπτομένη σε αυτό.

## Λύση

Αφού, τέμνονται στο $(1, 2)$, θα πρέπει να είναι

$$2 = f(1) = 1 + a + b = g(1) = 1 - c,$$

οπότε $a + b = 1$, και $c = -1$.
Επιπλέον, έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό, άρα

$$f'(1) = 2 \cdot 1 + a = 2 + a = g'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3,$$

οπότε $a = 1$ και ως εκ τούτου $b = 0$.

**Λυμένη άσκηση 28 (βλ. άλυτες ασκήσεις 35, 36)**

Να υπολογισθεί με τη βοήθεια του διαφορικού μια προσεγγιστική τιμή του $\sqrt[3]{123}$.

**Λύση**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}/(0, +\infty)$, οπότε $f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Για $x_0 = 125$, είναι $f(x_0) = 5$ και $f'(x_0) = \dfrac{1}{3 \cdot 5^2} = \dfrac{1}{75}$. Επομένως, για $x = 123$, είναι

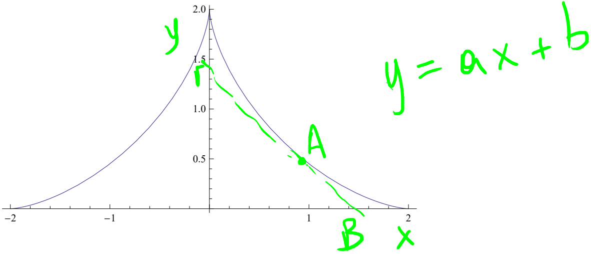
$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{123} = f(x) &\approx f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\
&= 5 + \frac{1}{75}(123 - 125) = 5 - \frac{2}{75}.
\end{aligned}$$

**Λυμένη άσκηση 30 (βλ. άλυτες ασκήσεις 38, 39)**

Έστω η καμπύλη με παραμετρική μορφή

$$x = x(t) = a\cos^3 t, y = y(t) = a\sin^3 t, \qquad t \in [0, \pi], a \neq 0.$$

Αν η εφαπτομένη της σε ένα σημείο $A(x(t), y(t))$ τέμνει τους άξονες στα $B$, $\Gamma$, να δειχθεί ότι το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ έχει σταθερό μήκος (ανεξάρτητο του $t$). (Σχήμα.)




Σχήμα: Η καμπύλη για $a = 2$.

## Λύση

Η παράγωγος της συνάρτησης δίνεται από τον τύπο

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a3\sin^2 t\cos t}{a3\cos^2 t(-\sin t)} = -\frac{\sin t}{\cos t}.$$

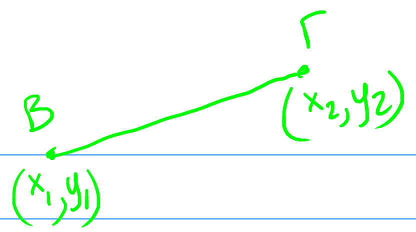
Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x(t), y(t))$ έχει εξίσωση

$$y - a\sin^3 t = -\frac{\sin t}{\cos t}(x - a\cos^3 t)$$
$$\Rightarrow y\cos t - a\sin^3 t\cos t = -x\sin t + a\cos^3 t\sin t$$

οπότε $y\cos t + x\sin t = a\sin t\cos t$. Θέτοντας $y = 0$, βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου $B$, δηλαδή $B = (a\cos t, 0)$. Θέτοντας $x = 0$, βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου Γ, δηλαδή $\Gamma = (0, a\sin t)$. Επομένως, το τετράγωνο του μήκους του $B\Gamma$ ισούται με

$$(a\cos t - 0)^2 + (0 - a\sin t)^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2,$$

δηλαδή είναι σταθερό.




$$|Br| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

### Λυμένη άσκηση 50 (βλ. άλυτη άσκηση 64)

Να υπολογισθούν τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x+1}, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$$

### Λύση

Για το πρώτο όριο, έχουμε απροσδιοριστία $\infty/\infty$ και εφαρμόζουμε $n$ φορές τον κανόνα L' Hopital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^n}{x+1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{n(\ln x)^{n-1}(1/x)}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)(\ln x)^{n-2}}{x} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!\ln x}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{x} = 0.
\end{aligned}$$

### Λύση (συνέχεια)

Για το δεύτερο όριο, έχουμε απροσδιοριστία $\infty - \infty$, οπότε μετασχηματίζουμε πρώτα την παράσταση σε μορφή $0/0$ και έπειτα εφαρμόζουμε τον κανόνα 2 φορές:

$$\lim_{x \to 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}.$$

## Λυμένη άσκηση 51 (βλ. άλυτη άσκηση 65)

Να υπολογισθούν τα όρια

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}, \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(3x^2+2x+7\right)^{1/x}$$

## Λύση

Το πρώτο όριο είναι της μορφής $1^\infty$, οπότε θέτουμε $f(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$ και υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to 0}\ln f(x)$ με τον κανόνα L' Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\ln f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x))'-(\ln(1-x))'}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-1-x-1}{x^2-1}=\frac{-2}{-1}=2.$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln f(x)}=e^2$.

**Λύση (συνέχεια)**

Το δεύτερο όριο είναι της μορφής $\infty^0$, οπότε θέτουμε $g(x) = (3x^2 + 2x + 7)^{1/x}$ και υπολογίζουμε το $\lim_{x \to +\infty} \ln g(x)$ με τον κανόνα L' Hopital:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(3x^2 + 2x + 7)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x + 2}{3x^2 + 2x + 7} = 0.$$

Επομένως, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{\ln g(x)} = e^0 = 1.$

## Άλυτη άσκηση 18

Να αποδειχθεί ότι $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

## Λύση

Έστω $y = f(x) = \operatorname{tg} x/(-\pi/2, \pi/2)$, οπότε $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
Βάσει της ταυτότητας $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, διαιρώντας κατά μέλη με $\cos^2 x$, προκύπτει ότι

$$1 + y^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Κατόπιν τούτου, εφαρμόζοντας τον τύπο της θεωρίας $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$, έχουμε ότι

$$(\operatorname{arctg})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2},$$

δηλαδή $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$.

$y = f(x)$, $f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow (f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$

$\Rightarrow (f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$

## Άλυτη άσκηση 51

Να αποδειχθούν, με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ., οι ανισότητες

$$p(x-1) < x^p - 1 < px^{p-1}(x-1), \qquad x > 1, p > 1,$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1-x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{4} - \frac{1-x}{2}, \qquad 0 < x < 1.$$

## Λύση

$$p(x-1) < x^p - 1 < px^{p-1}(x-1) \Leftrightarrow p < \frac{x^p-1}{x-1} < px^{p-1}$$

Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ για τη συνάρτηση $f(t) = t^p/[1,x]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (1,x)$, τέτοιο ώστε $p\xi^{p-1} = f'(\xi) = \dfrac{x^p-1}{x-1}$. Όμως, για $p > 1$, είναι

$$1 < \xi < x \Rightarrow p < p\xi^{p-1} < px^{p-1},$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

## Λύση (συνέχεια)

Ομοίως για τη δεύτερη ανισότητα,

$$-\frac{1-x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x - \pi/4 < -\frac{1-x}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{1+x^2} < \frac{\operatorname{arctg} x - \pi/4}{1-x} < -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{\operatorname{arctg} x - \pi/4}{x-1} < \frac{1}{1+x^2}$$

Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ για τη συνάρτηση $g(t) = \operatorname{arctg} t/[x,1]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (x,1)$, τέτοιο ώστε $\frac{1}{1+\xi^2} = g'(\xi) = \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1}{x-1} = \frac{\operatorname{arctg} x - \pi/4}{x-1}$. Όμως,

$$x < \xi < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1^2} < \frac{1}{1+\xi^2} < \frac{1}{1+x^2},$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

### Άλυτη άσκηση 44

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $e^{x-2}+x-3=0$ έχει ακριβώς μία λύση.

### Λύση

Έστω $f(x)=e^{x-2}+x-3/\mathbb{R}$, οπότε $f'(x)=e^{x-2}+1>0$. Παρατηρούμε ότι $f(2)=1-1=0$, άρα το 2 είναι μια ρίζα της εξίσωσης. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και μια δεύτερη ρίζα $\rho\neq 2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $\rho>2$. Τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[2,\rho]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(2,\rho)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού $f'(x)>0$ για κάθε $x$.

## Άλυτη άσκηση 54

Έστω $f/[a,b]$ συνεχής συνάρτηση, για την οποία υπάρχει η $f''/(a,b)$. Αν το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $A(a,f(a))$ και $B(b,f(b))$ τέμνει τη γραφική παράσταση της $f$ σε ένα τρίτο σημείο $C(c,f(c))$, με $a<c<b$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $\xi \in (a,b)$ με $f''(\xi)=0$.

## Λύση

Το ευθύγραμμο τμήμα $AC$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$ και το ευθύγραμμο τμήμα $CB$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$. επειδή τα σημεία $A,C,B$ είναι συνευθειακά, έπεται ότι

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

### Λύση (συνέχεια)

Επιπλέον, εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στα διαστήματα $[a, c]$ και $[c, b]$, προκύπτει ότι υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (a, c)$ και $\xi_2 \in (c, b)$, τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}, \qquad f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Επομένως, $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle για την $f'$ στο $[\xi_1, \xi_2]$, προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

## Άλυτη άσκηση 58

Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$\mathrm{arctg}(1+x) - \mathrm{arctg}\, x = \mathrm{arcctg}(1+x+x^2), \qquad x \in \mathbb{R}$$

και στη συνέχεια να υπολογισθεί το άθροισμα $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{arcctg}(1+n+n^2)$.

## Λύση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \mathrm{arctg}(1+x) - \mathrm{arctg}\, x \qquad \text{και} \qquad g(x) = \mathrm{arcctg}(1+x+x^2).$$

## Λύση (συνέχεια)

Παραγωγίζοντας, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-(1+(1+x)^2)}{(1+(1+x)^2)(1+x^2)} \\
&= \frac{x^2-(1+x)^2}{(1+1+2x+x^2)(1+x^2)} \overset{y=1+x+x^2}{=} \frac{-2x-1}{(1+x+y)(y-x)} \\
&= \frac{-2x-1}{y-x+xy-x^2+y^2-yx} = \frac{-2x-1}{y-x-x^2+y^2} \\
&= \frac{-2x-1}{1+y^2} = g'(x),
\end{aligned}$$

άρα η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή σε όλο το $\mathbb{R}$, δηλαδή $f(x)-g(x)=c$, για κάποια σταθερά $c$, την οποία υπολογίζουμε θέτοντας οποιαδήποτε τιμή στο $x$:

$$c = f(0)-g(0) = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{\pi}{4} = 0.$$

## Λύση (συνέχεια)

Επομένως, η ταυτότητα ισχύει. Κατόπιν τούτου,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arcctg}(1+k+k^2) = \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{arctg}(1+k) - \operatorname{arctg} k)$$
$$= \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}(n+1) - \frac{\pi}{4}$$

και επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}(1+n+n^2) = \lim s_n = \lim \operatorname{arctg}(n+1) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

## Άσκηση

Αν $n \in \mathbb{N}^*$ και $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, με $a_1^2 + \cdots + a_n^2 > 0$:

*i*) Να ευρεθεί η τιμή του $x \in \mathbb{R}$ που ελαχιστοποιεί την παράσταση

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (xa_k - b_k)^2.$$

*ii*) Να αποδειχθεί η ανισότητα (Cauchy-Schwarz):

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2).$$

## Λύση

*i*) Θέτουμε $a = a_1^2 + \cdots + a_n^2$, $b = b_1^2 + \cdots + b_n^2$ και $c = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$.
Η $f$ είναι πολυώνυμο του $x$, άρα συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \left((xa_k - b_k)^2\right)' = 2\sum_{k=1}^{n} (xa_k - b_k)a_k = 2ax - 2c$$

## Λύση (συνέχεια)

και $f''(x) = 2a > 0$. Επομένως, είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = c/a$, δηλαδή το $c/a$ είναι θέση τοπικού ακροτάτου, το οποίο είναι ελάχιστο, διότι $f''(c/a) > 0$. Μάλιστα, είναι το ολικό ελάχιστο της $f$, διότι δεν υπάρχουν άλλα κρίσιμα σημεία.

$ii$) Η $f(x)$ γράφεται στη μορφή

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(xa_k - b_k)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x^2 a_k^2 - 2xa_k b_k + b_k^2) = ax^2 - 2cx + b.$$

Αφού η $f$ είναι μη αρνητική (ως άθροισμα τετραγώνων), έπεται ότι

$$0 \leq f(c/a) = a(c/a)^2 - 2c(c/a) + b = \frac{ab - c^2}{a}$$

και άρα προκύπτει ότι $c^2 \leq ab$, δηλαδή η ζητούμενη ανισότητα.

Σημείωση: Η ανισότητα του ($ii$) προφανώς ισχύει και όταν $a = 0$.

### Θεώρημα (Taylor)

*Έστω συνάρτηση $f(t)$, για την οποία υπάρχουν και είναι συνεχείς οι $f, f', \ldots, f^{(n)}/[a,b]$ και υπάρχει και η $f^{(n+1)}/(a,b)$. Τότε, για κάθε $x, x_0 \in [a,b]$ και για κάθε $\nu \in [n+1]$, υπάρχει $\xi$ μεταξύ των $x$, $x_0$ τέτοιο ώστε*

$$f(x) = R_n(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

*όπου* $R_n(x) = \dfrac{(x-x_0)^\nu (x-\xi)^{n-\nu+1}}{\nu n!} f^{(n+1)}(\xi)$.

Για $\nu = 1$, η $R_n(x)$ ονομάζεται *υπόλοιπο Cauchy*, ενώ για $\nu = n+1$, ονομάζεται *υπόλοιπο Lagrange*.

Αν $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ και μόνο τότε είναι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Η έκφραση αυτή ονομάζεται *σειρά Taylor* της συνάρτησης $f$ γύρω από το σημείο $x = x_0$. Ειδικά για $x_0 = 0$ προκύπτει η *σειρά Maclaurin* της συνάρτησης $f$, δηλαδή

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

**Βασικές σειρές Maclaurin:**

- $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n, \; x \in (-1,1).$
- $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, \; x \in \mathbb{R}.$
- $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ και $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \; x \in \mathbb{R}.$
- $\sinh x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ και $\cosh x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \; x \in \mathbb{R}.$
- $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}, \; x \in (-1,1].$
- $(1+x)^r = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{r}{n} x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n, \; x \in (-1,1)$
  και $r \in \mathbb{R}.$

Οι διωνυμικοί συντελεστές ορίζονται από τον τύπο

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \dfrac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}, & k>0 \\ 1, & k=0 \\ 0, & k<0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}.$$

Μια σημαντική ταυτότητα των διωνυμικών συντελεστών είναι η ακόλουθη:

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}, \qquad k \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Πράγματι,

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{(-r)(1-r)(2-r)\cdots(k-r-1)}{k!}$$

$$=(-1)^k \frac{(k-r-1)(k-r-1-1)\cdots((k-r-1)-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}.$$

Για παράδειγμα, εφαρμόζοντας την (5), για $r = -1$, έχουμε

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k \binom{k-(-1)-1}{k} = (-1)^k \binom{k}{k} = (-1)^k.$$

Βάσει του παραπάνω αποτελέσματος, προκύπτει ο τύπος της γεωμετρικής σειράς ως μια ειδική περίπτωση της διωνυμικής σειράς:

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k} x^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Σε ορισμένες περιπτώσεις, όπου ο $r$ δεν είναι ακέραιος, ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{r}{k}$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει απλούστερων διωνυμικών συντελεστών. Για παράδειγμα,

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k} \quad \text{και} \quad \binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k}.$$

Πράγματι,

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2k-1}{2})}{k!}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{(1)(3)\cdots(2k-1)}{k!} = \frac{(-1)^k(2k)!}{2^k k! 2\cdot 4\cdots(2k)} = \frac{(-1)^k(2k)!}{2^k k! 2^k k!}$$

$$= \frac{(-1)^k(2k)!}{4^k k! k!} = \frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k}$$

και

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})\cdots(-\frac{2k-3}{2})}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\frac{(1)(1)\cdots(2k-3)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^k k! 2\cdot 4\cdots(2k)(2k-1)}$$

$$= \frac{(-1)^k(2k)!}{2^k k! 2^k k!(2k-1)} = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{4^k k! k!(2k-1)} = \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)}\binom{2k}{k}$$

### Άσκηση

Να αναπτυχθούν σε σειρές MacLaurin οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}, \quad x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \qquad g(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad x \in (-1,1).$$

### Λύση

Βάσει των προηγούμενων σχέσεων καθώς και του τύπου της διωνυμικής σειράς, έχουμε ότι

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-4x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k$$

και

$$g(x) = \sqrt{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} x^{2k}.$$

## Άλυτη άσκηση 85

Να αποδειχθεί ο τύπος $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.

## Λύση

Αρχικά θα αποδειχθεί με επαγωγή ότι $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Για $n = 1$ ισχύει, αφού

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x = (\cos x)'.$$

Αν ισχύει για $n \geq 1$, τότε

$$\begin{aligned}\cos(x+(n+1)\frac{\pi}{2}) &= \cos(x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}) = \cos(x+\frac{n\pi}{2}) \cos \frac{\pi}{2} - \sin(x+\frac{n\pi}{2}) \sin \frac{\pi}{2} \\ &= -\sin(x+\frac{n\pi}{2}) = (\cos(x+\frac{n\pi}{2}))' = (\cos^{(n)} x)' = \cos^{(n+1)} x.\end{aligned}$$

Επομένως, το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

### Λύση (συνέχεια)

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor για τη συνάρτηση $f(t) = \cos t$ στο διάστημα $[-a, a]$, για $a > 0$ και για $x_0 = 0$, προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [-a, a]$ και $\nu \in [n+1]$ υπάρχει $\xi$ μεταξύ των 0 και $x$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^\nu (x-\xi)^{n-\nu+1}}{\nu n!} f^{(n+1)}(\xi) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\pi/2)}{k!} x^k + \frac{x^\nu (x-\xi)^{n-\nu+1}}{\nu n!} \cos(\xi + (n+1)\pi/2) \end{aligned}$$

Θέτοντας $\nu = n+1$, έχουμε ότι $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos(\xi + (n+1)\pi/2)$, οπότε $|R_n(x)| \leq \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Θέτοντας $a_n = \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, προκύπτει ότι

## Λύση (συνέχεια)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}} = \frac{|x|}{n+2} \to 0 < 1.$$

Επομένως, από το κριτήριο της μηδενικής ακολουθίας, είναι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, οπότε και $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.
Επιπλέον, για $k, n \in \mathbb{N}$, είναι

$$\cos(k\pi/2) = \begin{cases} 0, & k = 2n-1 \\ \cos(n\pi), & k = 2n \end{cases} = \begin{cases} 0, & k = 2n-1 \\ (-1)^n, & k = 2n \end{cases}$$

Κατόπιν τούτων, έχουμε ότι

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k\pi/2)}{k!} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

### Λυμένη άσκηση 65

Να αναπτυχθούν σε σειρές οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sin^3 x/\mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{(4-x^2)^2}/(-2,2), \quad h(x) = \ln\frac{2+x}{1-x}/(-1,1).$$

### Λύση

Θα εκφράσουμε το $\sin^3 x$ συναρτήσει του $\sin(3x)$. Είναι

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(x+2x) = \sin x\cos(2x) + \cos x\sin(2x)\\ &= \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos x(2\sin x\cos x)\\ &= \sin x(1-2\sin^2 x) + 2\cos^2 x\sin x\\ &= (1-2\sin^2 x)\sin x + 2(1-\sin^2 x)\sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x,\end{aligned}$$

επομένως $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin(3x)$.

## Λύση (συνέχεια)

Χρησιμοποιώντας τον γνωστό τύπο της σειράς του ημιτόνου

$$\sin y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1}, \qquad y \in \mathbb{R},$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x) \\ &= \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(3x)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{3}{4} - \frac{3^{2n+1}}{4}\right) x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n(1-9^n)}{4(2n+1)!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

## Λύση (συνέχεια)

Για τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{(4-x^2)^2}/(-2,2)$, έχουμε ότι

$$g(x) = (4-x^2)^{-2} = 4^{-2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-2}.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο της διωνυμικής σειράς για $y = -x^2/4 \in (-1,1)$, προκύπτει ότι

$$g(x) = \frac{1}{16}(1+y)^{-2} = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}y^n = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+1}{n}\frac{(-x^2)^n}{4^n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4^{n+2}}x^{2n}, \qquad x \in (-2,2).$$

(Απάντηση.)

## Λύση (συνέχεια)

Για την συνάρτηση $h(x) = \ln \frac{2+x}{1-x}/(-1,1)$, θα χρησιμοποιηθεί ο τύπος της λογαριθμικής σειράς

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} y^n, \qquad y \in (-1,1].$$

$$\begin{aligned}
h(x) &= \ln(2+x) - \ln(1-x) = \ln(2(1+x/2)) - \ln(1-x) \\
&= \ln 2 + \ln(1+x/2) - \ln(1-x) \\
&= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x/2)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-x)^n \\
&= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \\
&= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) x^n.
\end{aligned}$$

### Άσκηση (ΣΕΠ. 2020)

Να ευρεθούν οι συντελεστές της σειράς Taylor της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$, γύρω από το σημείο $x_0 = 1$.

### Λύση

Θα χρησιμοποιηθεί ο τύπος της γεωμετρικής σειράς $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$. Θέτουμε $y = x - x_0 = x - 1$, οπότε

$$f(x) = \frac{x+1}{2-x} = \frac{(y+1)+1}{2-(y+1)} = \frac{y+2}{1-y} = \frac{y-1+3}{1-y} = -1 + \frac{3}{1-y}$$
$$= -1 + 3\sum_{n=0}^{\infty} y^n = -1 + 3 + 3\sum_{n=1}^{\infty} y^n = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 3(x-1)^n.$$

Άρα, ο συντελεστής της σειράς είναι ο $a_n = \begin{cases} 3, & n > 0, \\ 2, & n = 0. \end{cases}$

**Άσκηση (βλ. λυμένη άσκηση 66)**

Να ευρεθεί η σειρά Taylor των συναρτήσεων

*i)* $f(x) = \cos x$, γύρω από το σημείο $x_0 = \pi$.

*ii)* $g(x) = \ln(4 - x)$, γύρω από το σημείο $x_0 = 2$.

*iii)* $h(x) = \dfrac{x-1}{(3x-5)^2}$, γύρω από το σημείο $x_0 = 1$.

**Λύση**

*i)* Θέτοντας $y = x - \pi$, προκύπτει ότι

$$f(x) = \cos x = \cos(y+\pi) = \cos y \cos\pi - \sin y \sin\pi = -\cos y$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} (x-\pi)^{2n}$$

**Λύση (συνέχεια)**

*ii*) Θέτοντας $y = x - 2$, προκύπτει ότι

$$g(x) = \ln(4 - x) = \ln(4 - (y + 2)) = \ln(2 - y) = \ln(2(1 - y/2))$$
$$= \ln 2 + \ln(1 - y/2) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-y/2)^n = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} y^n$$
$$= \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(x - 2)^n$$

όταν $-y/2 \in (-1, 1)$, ή ισοδύναμα $x \in (0, 4)$.

## Λύση (συνέχεια)

*iii*) Θέτοντας $y = x - 1$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{x-1}{(3x-5)^2} = \frac{y}{(3(y+1)-5)^2} = \frac{y}{(3y-2)^2} = \frac{y}{4(1-3y/2)^2} \\
&= \frac{y}{4}(1-3y/2)^{-2} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-3/2)^n y^{n+1} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2-1}{n}(-1)^n(-3/2)^n y^{n+1} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)3^n}{2^n} y^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)3^n}{2^{n+2}}(x-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

όταν $-3y/2 \in (-1,1)$, ή ισοδύναμα $x \in (1/3, 5/3)$.

### Άσκηση (βλ. άλυτη άσκηση 88)

Να ευρεθεί με τη βοήθεια ενός πολυωνύμου Taylor μια κατά προσέγγιση τιμή του αριθμού $\cos 1$ με ακρίβεια $10^{-4}$.

### Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \cos x$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Taylor για $x = 1$ και $x_0 = 0$. Αναπτύσσοντας την $f(x)$ γύρω από το 0, έχουμε ότι

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos(\xi + (n+1)\pi/2) = p_n(x) + R_n(x)$$

όπου

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \qquad R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos(\xi + (n+1)\pi/2)$$

## Λύση (συνέχεια)

Για $x = 1$, έχουμε

$$|R_n(1)| = \frac{|\cos(\xi + (n+1)\pi/2)|}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

Επειδή $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{10000} \Leftrightarrow (n+1)! \geq 10^4 \Leftrightarrow n \geq 7$,
προκύπτει ότι, για $n \geq 7$, είναι $|\cos 1 - p_7(1)| = |R_7(1)| \leq 10^{-4}$, δηλαδή η προσέγγιση

$$\cos 1 \approx p_7(1) = \sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} = \frac{389}{720} = 0.5402\overline{7}$$

έχει την απαιτούμενη ακρίβεια.

Σύμφωνα με τον παρακάτω κώδικα Python, είναι

$$\cos(1) \approx 0.5403023058681397174, \quad p_7(1) \approx 0.5402777777777778$$

```python
from sympy import Symbol, cos, series
x = Symbol('x')
N, point = 7, 1
f = series(cos(x), x, x0 = 0, n = N)
poly = f.removeO() #remove O() term
val = poly.subs(x,point) #evaluate at x = point
val2 = cos(point).evalf(22)
print("cos(x) =", f, "(Maclaurin series)")
print("p(x) = ", poly, "(Taylor polynomial of degree %d)"%N)
print("p(%d) = %0.22f"%(point, val), "(Approximation of cos
    (%d))"%point)
print("cos(%d) ="%1, val2, "(Higher order approximation)")
print("Error =", val2-val)
```

Ouput:

```
cos(x) = 1-x**2/2+x**4/24-x**6/720+O(x**7)(MacLaurin series)
p(x) =  -x**6/720 + x**4/24 - x**2/2 + 1 (Taylor polynomial
    of degree 7)
p(1) = 0.5402777777777777457047 (Approximation of cos(1))
cos(1) = 0.5403023058681397174009 (Higher order
    approximation)
Error = 0.00002452809036193962314881
```