# ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

## ΚΕΦ. 6: Αόριστο ολοκλήρωμα - Διαφορικές εξισώσεις

Σημειώσεις Φροντιστηρίου

Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

# Αόριστο ολοκλήρωμα

## Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f/A$, όπου το πεδίο ορισμού $A$ είναι διάστημα (ή ένωση διαστημάτων). Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων $F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$ και $F'(x) = f(x)$. δηλαδή είναι

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x).$$

Η συνάρτηση $F$ ονομάζεται παράγουσα της $f$.

Ως πεδίο ορισμού της $F$ θεωρούμε το ευρύτερο υποσύνολο του $A$ στο οποίο η $F$ είναι παραγωγίσιμη.
Από τον ορισμό προκύπτουν οι ιδιότητες:

- $\int f'(x)dx = f(x) + c$
- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
- $\int (kf(x) + \lambda g(x))dx = k \int f(x)dx + \lambda \int g(x)dx$

### Άσκηση

Να ευρεθούν οι παράγουσες των συναρτήσεων:

$$x^2 + 3x + 2, \quad e^{2x+3}, \quad \sqrt{x}, \quad \frac{2x+1}{x^2+x+2}, \quad \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}.$$

### Απάντηση

$$\left(\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 2x + c\right)' = x^2 + 3x + 2, \qquad \left(\frac{e^{2x+3}}{2} + c\right)' = e^{2x+3},$$

$$\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)' = x^{1/2},$$

$$\left(\ln(x^2+x+2)\right)' = \frac{2x+1}{x^2+x+2},$$

$$\left(2\sqrt{x^2+x+2}\right)' = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}.$$

### Άσκηση

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx, \qquad I_2 = \int \frac{1}{x^2 + 4x + 8} dx$$

### Λύση

Αφού $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx = \int \frac{A}{x-1} dx + \int \frac{B}{x+2} dx \\ &= A \ln|x-1| + B \ln|x+2| + c. \end{aligned}$$

## Λύση (συνέχεια)

Τα $A, B$ προσδιορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\
\Leftrightarrow &1 = A(x+2) + B(x-1)
\end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση, θέτοντας $x = 1$, προκύπτει ότι $A = 1/3$ και, θέτοντας $x = -2$, προκύπτει ότι $B = -1/3$.

**Λύση (συνέχεια)**

Για το $I_2$, έχουμε ότι

$$x^2 + 4x + 8 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4 + 4 = (x+2)^2 + 4.$$

Επομένως, θέτοντας $2y = x + 2$, οπότε $2dy = dx$, έχουμε ότι

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 4} = \int \frac{2dy}{4y^2 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y + c$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + c.$$

Γενικά, για την επίλυση του $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$, με $b^2-4ac<0$, ακολουθούμε την ίδια μέθοδο όπως στο $I_2$ της προηγούμενης άσκησης. Έστω $p(x)=ax^2+bx+c$, με $a\neq 0$ και $\Delta=b^2-4ac<0$. Ως γνωστό, όταν η διακρίνουσα $\Delta$ είναι αρνητική, τότε το $p(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και επιπλέον είναι ομόσημο του $a$, για κάθε $x$.
Η επίλυση του ολοκληρώματος

$$I=\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

γίνεται με τη βοήθεια της συνάρτησης $\mathrm{arctg}$, για την οποία ως γνωστό ισχύει

$$\frac{d(\mathrm{arctg}\, y)}{dy}=\frac{1}{1+y^2}, \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad c+\mathrm{arctg}\, y=\int \frac{1}{1+y^2}dy, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Προσπαθούμε λοιπόν να μετατρέψουμε το $ax^2+bx+c$ στη μορφή $y^2+1$, για κάποιο $y$ το οποίο είναι συνάρτηση του $x$. Η διαδικασία μετατροπής έχει ως εξής: αρχικά δημιουργούμε ένα τέλειο τετράγωνο (το άθροισμα των τετραγώνων δύο ποσοτήτων και του διπλάσιου γινομένου τους) και στη συνέχεια βγάζουμε κοινό παράγοντα τον σταθερό όρο.

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2\right).
\end{aligned}$$

Επειδή $\Delta<0$, για απλότητα στις πράξεις, τέθηκε $k=\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}$.

Θέτοντας

$$ky = x + \frac{b}{2a}, \qquad \text{οπότε} \qquad kdy = dx,$$

έχουμε ότι $ax^2 + bx + c = a(k^2y^2 + k^2) = ak^2(y^2+1)$, επομένως

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{ak^2(y^2+1)}kdy \\ &= \frac{1}{ak}\int \frac{1}{y^2+1}dy = c + \frac{1}{ak}\operatorname{arctg} y \\ &= c + \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) \end{aligned}$$

### Άσκηση

Να λυθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $I = \int \frac{3-5x}{6x^2-2x+4}dx$.

### Λύση

το πολυώνυμο $p(x) = 6x^2 - 2x + 4$ έχει αρνητική διακρίνουσα και παράγωγο $p'(x) = 12x - 2$. Μπορούμε να εμφανίσουμε την παράγωγο στον αριθμητή ως εξής:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{3-5x}{6x^2-2x+4}dx = \int \frac{\frac{-5}{12}(12x-2) - 2\frac{5}{12} + 3}{6x^2-2x+4}dx \\
&= \frac{-5}{12}\int \frac{(6x^2-2x+4)'}{6x^2-2x+4}dx + \frac{13}{6}\int \frac{1}{6x^2-2x+4}dx \\
&= \frac{-5}{12}\ln(6x^2-2x+4) + \frac{13}{36}\int \frac{1}{x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}dx
\end{aligned}
$$

## Λύση (συνέχεια)

Για την επίλυση του τελευταίου ολοκληρώματος, έχουμε

$$x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} = x^2 - 2\frac{1}{6}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} + \frac{2}{3} = \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{36},$$

άρα, θέτοντας $\frac{\sqrt{23}}{6}y = x - \frac{1}{6}$, οπότε $\frac{\sqrt{23}}{6}dy = dx$, έχουμε

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}dx = \int \frac{1}{(x - \frac{1}{6})^2 + \frac{23}{36}}dx \\ &= \int \frac{1}{\frac{23}{36}y^2 + \frac{23}{36}} \frac{\sqrt{23}}{6}dy = \frac{6}{\sqrt{23}} \int \frac{1}{y^2 + 1}dy = c + \frac{6}{\sqrt{23}} \operatorname{arctg} y \\ &= c + \frac{6}{\sqrt{23}} \operatorname{arctg}\left(\frac{6x - 1}{\sqrt{23}}\right) \end{aligned}$$

## Άσκηση

Να λυθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $I = \int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$.

## Λύση

Σύμφωνα με την ανάλυση σε απλά κλάσματα, υπάρχουν σταθερές $A, B, \Gamma, \Delta$, ώστε

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma x + \Delta}{x^2+1},$$

οπότε

$$\begin{aligned} I &= A\int \frac{1}{x-1} dx + B\int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \Gamma \int \frac{x}{x^2+1} dx + \Delta \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= A \ln|x-1| - B\frac{1}{x-1} + \frac{\Gamma}{2}\ln(x^2+1) + \Delta \operatorname{arctg} x + c. \end{aligned}$$

## Λύση (συνέχεια)

Τα $A, B, \Gamma, \Delta$ προσδιορίζονται ως εξής:

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma x + \Delta}{x^2+1}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+1)A + (x^2+1)B + (x-1)^2(\Gamma x + \Delta) = 1$$

θέτοντας $x = 1$, βρίσκουμε ότι $B = 1/2$, οπότε, εκτελώντας τις πράξεις, παίρνουμε την ισοδύναμη σχέση

$$(A+\Gamma)x^3 - (A - 1/2 + 2\Gamma - \Delta)x^2 + (A + \Gamma - 2\Delta)x - (A - 1/2 - \Delta) = 1.$$

Επειδή η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $x$, εξισώνοντας τους συντελεστές των δύο πολυωνύμων στο πρώτο και δεύτερο μέλος, προκύπτει ότι τα $A, \Gamma, \Delta$ ικανοποιούν τις σχέσεις

## Λύση (συνέχεια)

$$\begin{cases} A+\Gamma &= 0 \\ A+2\Gamma-\Delta &= 1/2 \\ A+\Gamma-2\Delta &= 0 \\ A-\Delta &= -1/2 \end{cases}$$

Από την 1η και την 3η σχέση, βρίσκουμε ότι $\Delta = 0$.
Έπειτα, από την 4η σχέση, βρίσκουμε ότι $A = -1/2$.
Τέλος, από την 1η σχέση, βρίσκουμε ότι $\Gamma = 1/2$.
Επομένως, τελικά είναι

$$I = -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + c.$$

# Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Από τον κανόνα παραγώγισης $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, ολοκληρώνοντας κατά μέλη, προκύπτει ο τύπος της παραγοντικής ολοκλήρωσης:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx,$$

ο οποίος, λαμβάνοντας υπόψη ότι $df = f'(x)dx$ και $dg = g'(x)dx$, μπορεί να γραφτεί συνοπτικά ως εξής:

$$\int g\ df = fg - \int f\ dg.$$

Στις επόμενες περιπτώσεις εφαρμόζεται ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

- $\int e^{ax+b}p(x)dx$, όπου $p(x)$ πολυώνυμο.
  Θέτουμε
  $$e^{ax+b} = (\frac{1}{a}e^{ax+b})'.$$
  Εφαρμογές: $\int x^2 e^x dx$, $\int (x^2 + 6x - 1)e^x dx$.

- $\int \sin(ax+b)p(x)dx$ και $\int \cos(ax+b)p(x)dx$, όπου $p(x)$ πολυώνυμο.
  Θέτουμε αντίστοιχα
  $$\sin(ax+b) = (\frac{-1}{a}\cos(ax+b))' \quad \text{και} \quad \cos(ax+b) = (\frac{1}{a}\sin(ax+b))'.$$
  Εφαρμογές: $\int x \sin(3x-1)dx$, $\int (2x^2 - 3x + 5)\cos 4x dx$.

- $\int e^{ax+b}\sin(cx+d)dx$ και $\int e^{ax+b}\cos(cx+d)dx$.
  Θέτουμε $e^{ax+b} = (\frac{1}{a}e^{ax+b})'$ και εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση 2 φορές.
  Εφαρμογές: $\int e^{2x}\sin x dx$, $\int e^{x}\cos 3x dx$, $\int xe^{x}\cos 3x dx$.

- $\int f(x)\ln(g(x))dx$, $\int f(x)\arctan(g(x))dx$ και $\int f(x)\arcsin(g(x))dx$, όπου $f(x)$ ρητή συνάρτηση.
  Βρίσκουμε μια $F(x)$ ώστε $F'(x) = f(x)$.
  Εφαρμογές: $\int(3x^2+4x+1)\ln(\frac{x^2+1}{x})dx$,
  $\int(4x^3+x)\arctan(x^2-1)dx$, $\int \arcsin x dx$.

- Αναγωγικοί τύποι, δηλαδή ολοκληρώματα της μορφής
  $I_n = \int A(x,n)dx$.
  Εφαρμογές: $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$, $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$, $\int x^n e^{-x}dx$.

### Άσκηση

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int \operatorname{arctg} x \; dx, \qquad I_2 = \int e^x \cos x \; dx$$

### Λύση

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x' \operatorname{arctg} x \; dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c \end{aligned}$$

## Λύση (συνέχεια)

$$I_2 = \int (e^x)' \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + \int (e^x)' \sin x dx$$
$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - I_2 + c_1$$

Άρα

$$2I_2 = e^x(\cos x + \sin x) + c_1 \Rightarrow I_2 = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + c$$

## Άσκηση (Λυμένη άσκηση 16)

Αν $J_n = \int (1+x^2)^{-n} dx$, να αποδειχθεί ότι

$$J_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} J_n, \qquad n \geq 1.$$

## Λύση

$$\begin{aligned}
J_n &= \int x'(1+x^2)^{-n} dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int x(-n)(1+x^2)^{-n-1}(2x) dx \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}} dx \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nJ_n - 2nJ_{n+1}
\end{aligned}$$

και, λύνοντας ως προς $J_{n+1}$, προκύπτει το ζητούμενο.

# Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Ο γενικός τύπος αντικατάστασης έχει ως εξής:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy.$$

Θέτουμε $y = g(x)$, οπότε $dy = g'(x)dx$ και αντικαθιστώντας στο πρώτο μέλος παίρνουμε το δεύτερο.
Γενικά, για τον μετασχηματισμό $f(y) = g(x)$, η σχέση μεταξύ $dy$ και $dx$ προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη ότι $dy = y'dx$ και παραγωγίζοντας ως προς $x$, οπότε είναι

$$\begin{aligned} f(y) = g(x) &\Rightarrow f'(y)y' = g'(x) \Rightarrow f'(y)y'dx = g'(x)dx \\ &\Rightarrow f'(y)dy = g'(x)dx. \end{aligned}$$

# Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Το διαφορικό $dx$ στον συμβολισμό του ολοκληρώματος υποδηλώνει ότι η $x$ είναι η μεταβλητή ολοκλήρωσης (και παραγώγισης). Την θέση της μεταβλητής $x$ μπορεί να έχει οποιαδήποτε (παραγωγίσιμη) συνάρτηση και έτσι έχουμε για παράδειγμα ότι

$$\int df = f + c, \qquad \text{όπως έχουμε και ότι } \int dx = x + c.$$

Αυτό εξάλλου επαληθεύεται και από τη σχέση $df = f'(x)dx$.
Η αντικατάσταση αλλάζει την μεταβλητή ολοκλήρωσης, οδηγώντας πολλές φορές σε μια παράσταση της οποίας προσδιορίζουμε πιο εύκολα την παράγουσα.
Για παράδειγμα, θέτοντας $y = 1 + x^2$, οπότε $dy = 2xdx$, έχουμε ότι

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{y}dy = \ln y + c = \ln(1+x^2) + c,$$

το οποίο πιο συνοπτικά, αλλά ισοδύναμα, μπορεί να γραφτεί ως

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2) = \ln(1+x^2) + c.$$

Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int R(\cos x, \sin x)dx$, όπου $R(x, y)$ είναι μια ρητή συνάρτηση (δηλαδή πηλίκο δύο πολυωνύμων), ως προς τις μεταβλητές $x, y$, λύνονται (ανάγονται σε ρητή μορφή ως προς $y$) με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, ή ισοδύναμα $x = 2\,\mathrm{arctg}\,y$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \qquad \sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+y^2}dy.$$

Οι τύποι αυτοί αποδεικνύονται εύκολα με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad \sin 2x = 2\sin x\cos x, \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Ο τρίτος τύπος προκύπτει πιο άμεσα από τη σχέση $x = 2\,\mathrm{arctg}\,y$.

Οι επόμενες τρεις περιπτώσεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες αντικαταστάσεις, οι οποίες οδηγούν συνήθως σε απλούστερες πράξεις:

- Αν $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (δηλαδή, η $R$ είναι περιττή ως προς το $\sin x$), τότε τίθεται $y = \cos x$.
- Αν $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ (δηλαδή, η $R$ είναι περιττή ως προς το $\cos x$), τότε τίθεται $y = \sin x$.
- Αν $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ (δηλαδή, η $R$ είναι άρτια ως προς τα $\sin x$ και $\cos x$), τότε τίθεται $y = \operatorname{tg} x$, ή ισοδύναμα $x = \operatorname{arctg} y$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}, \qquad \sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}, \qquad dx = \frac{1}{1+y^2}dy$$

**Παρατήρηση**: Οι παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad t \in (-\infty, +\infty),$$

περιγράφουν το σύνολο όλων των σημείων $(x, y)$ του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$, εκτός του $(-1, 0)$.
Αντίστοιχα, οι παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \qquad y(t) = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad t \in (-1, 1),$$

περιγράφουν το σύνολο όλων των σημείων $(x, y)$, με $x > 0$, της υπερβολής με εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$.

### Άσκηση

Να λυθούν τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{1+\cos x+\sin x}dx, \qquad \int \frac{1}{\cos x}dx, \qquad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx.$$

### Λύση

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, θέτουμε $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, οπότε είναι

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\cos x+\sin x}dx &= \int \frac{1}{1+\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{2y}{1+y^2}}\frac{2}{1+y^2}dy \\
&= \int \frac{2}{1+y^2+1-y^2+2y}dy \\
&= \int \frac{1}{1+y}dy \\
&= \ln|1+y|+c = \ln|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+c
\end{aligned}$$

## Λύση (συνέχεια)

Για το $\int \frac{1}{\cos x}dx$, θέτουμε $y = \sin x$ (διότι η παράσταση είναι περιττή ως προς το $\cos x$), οπότε είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\cos x dx = \int \frac{1}{1-y^2}dy = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right) dy \\ &= \frac{1}{2}(\ln|1+y| - \ln|1-y|) + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + c \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{(1+y)^2}{|1-y^2|} + c \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin x^2} + c = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x} + c \\ &= \ln\frac{1+\sin x}{|\cos x|} + c\end{aligned}$$

## Λύση (συνέχεια)

Για το $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx$, η παράσταση είναι και περιττή ως προς το $\sin x$, και περιττή ως προς το $\cos x$, και άρτια ως προς τα $\cos x, \sin x$, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε από τις διαθέσιμες αντικαταστάσεις. Αν επιλέξουμε την αντικατάσταση $y = \operatorname{tg} x$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx &= \int \frac{y^3}{1+y^2}dy = \int \frac{y^3+y-y}{1+y^2}dy \\
&= \int \frac{y^3+y}{1+y^2}dy - \int \frac{y}{1+y^2}dy = \int ydy - \frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}dy \\
&= \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + c = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + c \\
&= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\cos^2 x} + c = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + c
\end{aligned}$$

## Άσκηση

Να λυθούν τα ολοκληρώματα $\displaystyle\int \cos^2 x dx, \qquad \int \sin^2 x dx.$

## Λύση

Για τα ολοκληρώματα αυτά είναι πιο εύκολο, αντί για αντικατάσταση, να εφαρμόσουμε απευθείας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1,$$

οπότε

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c,$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c.$$

Για την επίλυση ολοκληρωμάτων της μορφής $\int R(\cosh x, \sinh x)dx$, όπου $R(x, y)$ είναι μια ρητή συνάρτηση, ως προς τις μεταβλητές $x, y$, χρησιμοποιούνται ταυτότητες με υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις, ανάλογες με αυτές της προηγούμενης ενότητας. Γενικά, τα ολοκληρώματα αυτής της μορφής λύνονται (ανάγονται σε ρητή μορφή ως προς $y$) με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y = \mathrm{tgh}\,\frac{x}{2}$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cosh x = \frac{1+y^2}{1-y^2}, \qquad \sinh x = \frac{2y}{1-y^2}, \qquad dx = \frac{2}{1-y^2}dy.$$

# Η μορφή $\int R(\cosh x, \sinh x)dx$

Οι επόμενες τρεις περιπτώσεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις, όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες αντικαταστάσεις, οι οποίες οδηγούν συνήθως σε απλούστερες πράξεις:

- Αν $R(\cosh x, -\sinh x) = -R(\cosh x, \sinh x)$ (δηλαδή, η $R$ είναι περιττή ως προς το $\sinh x$), τότε τίθεται $y = \cosh x$.
- Αν $R(-\cosh x, \sinh x) = -R(\cosh x, \sinh x)$ (δηλαδή, η $R$ είναι περιττή ως προς το $\cosh x$), τότε τίθεται $y = \sinh x$.
- Αν $R(-\cosh x, -\sinh x) = R(\cosh x, \sinh x)$ (δηλαδή, η $R$ είναι άρτια ως προς τα $\sinh x$ και $\cosh x$), τότε τίθεται $y = \mathrm{tgh}\, x$, οπότε προκύπτουν οι τύποι

$$\cosh^2 x = \frac{1}{1-y^2}, \qquad \sinh^2 x = \frac{y^2}{1-y^2}, \qquad dx = \frac{1}{1-y^2}dy.$$

# Η μορφή $\int R(x, \sqrt{b^2 - a^2x^2})dx$

Η παράσταση $\sqrt{b^2 - a^2x^2}$, όπου $a, b > 0$, έχει νόημα όταν

$$b^2 - a^2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}].$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, θέτουμε

$$ax = b\sin t, \qquad \text{όπου } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

οπότε είναι $a\ dx = b\cos t\ dt$ και

$$\begin{aligned}\sqrt{b^2 - a^2x^2} &= \sqrt{b^2 - b^2\sin^2 t} = b\sqrt{1 - \sin^2 t} = b\sqrt{\cos^2 t} = b|\cos t| \\ &= b\cos t.\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει επειδή είναι $\cos t \geq 0$, όταν $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Επομένως, το ολοκλήρωμα $\int R(x, \sqrt{b^2 - a^2x^2})dx$ μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα ρητής παράστασης ως προς $\sin t$ και $\cos t$ και λύνεται σύμφωνα με τα προηγούμενα.

Για το αόριστο ολοκλήρωμα $I = \int R(x, \sqrt{a^2x^2 + b^2})dx$, όπου $a, b > 0$, λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα

$$\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x,$$

θέτουμε

$$ax = b \sinh t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

οπότε είναι $a\ dx = b \cosh t\ dt$ και

$$\sqrt{a^2x^2 + b^2} = \sqrt{b^2 \sinh^2 t + b^2} = b\sqrt{\sinh^2 t + 1} = b\sqrt{\cosh^2 t} = b \cosh t.$$

Επομένως, το $I$ μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα ρητής παράστασης ως προς $\sinh t$ και $\cosh t$ και λύνεται σύμφωνα με τα προηγούμενα.

Η παράσταση $\sqrt{a^2x^2 - b^2}$, όπου $a, b > 0$, έχει νόημα όταν

$$a^2x^2 - b^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{b}{a}] \cup [\frac{b}{a}, +\infty).$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα $\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$, διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

*i)* Αν $x \geq \frac{b}{a}$, τότε θέτουμε $ax = b\cosh t$, όπου $t \geq 0$.

*ii)* Αν $x \leq -\frac{b}{a}$, τότε θέτουμε $ax = -b\cosh t$, όπου $t \leq 0$.

Επομένως, είναι $\sqrt{a^2x^2 - b^2} = b|\sinh t|$ και, επειδή $\sinh t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$, και στις δύο περιπτώσεις προκύπτει ότι $adx = b|\sinh t|dt$.
Τελικά, το $\int R(x, \sqrt{a^2x^2 - b^2}dx)$ μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα ρητής παράστασης ως προς $\sinh t$ και $\cosh t$ και λύνεται σύμφωνα με τα προηγούμενα.

## Άσκηση (Λυμένη άσκηση 27)

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$I_1 = \int \frac{x^2 + 3x + 5}{\sqrt{9 - x^2}}dx, \qquad I_2 = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}}dx, \qquad I_3 = \int \sqrt{3x^2 + 2}dx.$$

## Λύση

Για το $I_1$, θέτοντας $x = 3\sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x^2 + 3x + 5}{\sqrt{9 - x^2}}dx = \int \frac{9\sin^2 t + 9\sin t + 5}{\sqrt{9 - 9\sin^2 t}} 3\cos t dt \\ &= \int (9\sin^2 t + 9\sin t + 5)dt = \frac{9}{2}\int (1 - \cos 2t)dt + 9\int \sin t dt + 5\int dt \\ &= \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\sin 2t - 9\cos t + 5t + c = \frac{19}{2}t - \frac{9}{2}\sin t\cos t - 9\cos t + c \\ &= \frac{19}{2}\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{2}x\sqrt{9 - x^2} - 3\sqrt{9 - x^2} + c \end{aligned}$$

## Λύση (συνέχεια)

Για το $I_2 = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx$, θέτοντας $x = 2\cosh t$, προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{8\cosh^3 t}{\sqrt{4\cosh^2 t - 4}} 2\sinh t dt = 8\int \cosh^3 t dt \\
&= 8\int (1+\sinh^2 t) d(\sinh t) = 8\sinh t + \frac{8}{3}\sinh^3 t + c \\
&= \frac{8}{3}(3+\sinh^2 t)\sinh t + c = \frac{8}{3}(2+\cosh^2 t)\sqrt{\cosh^2 - 1} + c \\
&= \frac{1}{3}(8+4\cosh^2 t)\sqrt{4\cosh^2 - 4} + c = \frac{1}{3}(8+x^2)\sqrt{x^2-4} + c
\end{aligned}
$$

## Λύση (συνέχεια)

Για το $I_3=\int\sqrt{3x^2+2}dx$, θέτοντας $\sqrt{3}x=\sqrt{2}\sinh t$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int\sqrt{2\sinh^2 t+2}\sqrt{2/3}\cosh t dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \cosh^2 t dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\int (e^t+e^{-t})^2 dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int (e^{2t}+e^{-2t}+2)dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}+2t)+c = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sinh(2t)+2t)+c \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sinh t\cosh t+t)+c = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t}+t)+c \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{3}{2}x^2}+\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right)\right)+c \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{2+3x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right)+c
\end{aligned}$$

Διαφορική εξίσωση (μίας μεταβλητής) (ΔΕ) είναι κάθε εξίσωση που περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή $x$, μια άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ και κάποιες παραγώγους της $y$.
Η μεγαλύτερη παράγωγος που εμφανίζεται σε αυτήν καθορίζει την τάξη της.
Ο μεγαλύτερος εκθέτης της μεγαλύτερης παραγώγου καθορίζει τον βαθμό της.
Λύση της εξίσωσης είναι κάθε συνάρτηση που την επαληθεύει.
Καμπύλη ολοκλήρωσης της εξίσωσης ονομάζεται η καμπύλη μιας λύσης της.
Στη συνέχεια, θα δούμε ορισμένες μορφές διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.
Η κανονική μορφή μιας τέτοιας εξίσωσης είναι η

$$y' = f(x, y),$$

όπου $f$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών.

**Χωριζομένων μεταβλητών**: Είναι οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, \tag{1}$$

οπότε είναι $g(y)dy = f(x)dx$ και ολοκληρώνοντας έχουμε ότι $\int g(y)dy = \int f(x)dx$. Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα, προκύπτει η μορφή των λύσεών τους.

**Ομογενείς**: Είναι οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}, \qquad \text{όπου} \quad \frac{f(tx,ty)}{g(tx,ty)} = \frac{t^k f(x,y)}{t^k g(x,y)} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}. \tag{2}$$

Μετατρέπονται σε χωριζομένων μεταβλητών, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $y = ux$.

## Άσκηση

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

$$i)\ y'\cos^2 x = y(y-1), y(0) = 2, \qquad ii)\ y' = a - by, b \neq 0.$$

## Λύση

$i$) Η δοσμένη ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, αφού γράφεται στη μορφή

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

όταν $y \neq 0, 1$. Επομένως, ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε ότι

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy = \int (\mathrm{tg}\, x)' dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y-1| - \ln|y| = k + \mathrm{tg}\, x, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |(y-1)/y| = e^{k+\mathrm{tg}\, x}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 1/y = \pm e^k e^{\mathrm{tg}\, x} \Leftrightarrow 1/y = 1 - ce^{\mathrm{tg}\, x}, \quad c \in \mathbb{R}^*.$$

### Λύση (συνέχεια)

Κατόπιν τούτων, η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = (1 - ce^{\operatorname{tg} x})^{-1}, \quad c \in \mathbb{R}, \qquad \text{ή} \qquad y = 0.$$

Στη συνέχεια, βάσει της αρχικής συνθήκης $y(0) = 2$, υπολογίζουμε τη σταθερά $c$ ως

$$2 = y(0) = (1 - c)^{-1} \Leftrightarrow 1 - c = 1/2 \Leftrightarrow c = 1/2$$

οπότε η ειδική λύση με $y(0) = 2$ είναι η $y = (1 - e^{\operatorname{tg} x}/2)^{-1}$.

## Λύση (συνέχεια)

*ii*) Η δοσμένη ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, αφού γράφεται στη μορφή (για $y \neq a/b$, η οποία είναι λύση της ΔΕ)

$$\frac{dy}{a - by} = dx.$$

Επομένως, ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε ότι

$$\int \frac{dy}{a - by} = \int dx \Leftrightarrow \frac{-1}{b} \ln|a - by| = k + x, k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \ln|a - by| = -bk - bx \Leftrightarrow |a - by| = e^{-bk-bx} \Leftrightarrow a - by = \pm e^{-bk} e^{-bx}$$

$$\Leftrightarrow a - by = c_1 e^{-bx}, c_1 \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow by = a - c_1 e^{-bx}, c_1 \in \mathbb{R}^*$$

Κατόπιν τούτων, η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = \frac{a}{b} - ce^{-bx}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

## Άσκηση

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y, x > 0$.

## Λύση

Η ΔΕ γράφεται στη μορφή $y' = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$ και είναι ομογενής.
Θέτοντας $y = ux$, έχουμε ότι $y' = u + u'x$ και

$$
\begin{aligned}
y' =& u + u'x = \frac{\sqrt{x^2(1-u^2)} + ux}{x} \\
\Leftrightarrow& u'x = \frac{x\sqrt{1-u^2} + ux}{x} - u = \sqrt{1-u^2} \Leftrightarrow \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}
\end{aligned}
$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, προκύπτει ότι
$\arcsin u = c + \ln x, \qquad c \in \mathbb{R}^*$, δηλαδή $u = \sin(c + \ln x)$ και τελικά η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = x\sin(c + \ln x), \qquad c \in \mathbb{R}^*.$$

**Η μορφή:** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$. Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

*i*) Αν $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, τότε τίθεται

$$z = a_1 x + b_1 y.$$

Ο μετασχηματισμός αυτός μετατρέπει την ΔΕ σε χωριζομένων μεταβλητών, η οποία λύνεται σύμφωνα με τα προηγούμενα.

*ii*) Αν $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, τότε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση, έστω την $(x_0, y_0)$, οπότε, θέτοντας

$$X = x - x_0 \qquad \text{και} \qquad Y = y - y_0,$$

η διαφορική εξίσωση ανάγεται σε ομογενή, η οποία λύνεται με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $Y = UX$.

## Άσκηση

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' = \dfrac{x+2y+5}{2x+4y+6}$.

## Λύση

Θέτοντας $z = x+2y$, οπότε $z' = 1+2y'$, προκύπτει ότι

$$y' = \frac{z'-1}{2} = \frac{z+5}{2z+6} \Rightarrow z' = \frac{2z+10}{2z+6} + 1 = \frac{4z+16}{2z+6} = \frac{2z+8}{z+3}$$
$$\Rightarrow \frac{z+3}{2z+8}dz = dx \Rightarrow \frac{2z+6}{2z+8}dz = 2dx \Rightarrow \left(1 - \frac{2}{2z+8}\right)dz = 2dx$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη, έχουμε ότι

$$2x + c = \int 2dx = \int \left(1 - \frac{1}{z+4}\right)dz = z - \ln|z+4|$$
$$= x + 2y - \ln|x+2y+4|$$

οπότε η γενική λύση της ΔΕ σε πεπλεγμένη μορφή είναι η

$$2y = x + \ln|x+2y+4| + c.$$

## Άσκηση

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' = \dfrac{x+y-2}{-x+y-4}$.

## Λύση

Βάσει του ακόλουθου συστήματος

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ -x+y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ 2y-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$$

θέτουμε $X = x+1$ και $Y = y-3$, οπότε $dY = dy$, $dX = dx$, $y' = dY/dX$ και η ΔΕ μετατρέπεται στην

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(X-1)+(Y+3)-2}{-(X-1)+(Y+3)-4} = \frac{X+Y}{-X+Y}.$$

Η νέα ΔΕ είναι ομογενής, οπότε θέτοντας $Y = UX$, μετατρέπεται στην

## Λύση (συνέχεια)

$$X\frac{dU}{dX} + U = \frac{X + UX}{-X + UX} = \frac{U+1}{U-1} \Rightarrow X\frac{dU}{dX} = \frac{U+1}{U-1} - U = \frac{2U + 1 - U^2}{U-1},$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών, αφού γράφεται ως

$$\frac{U-1}{2U+1-U^2}dU = \frac{dX}{X}.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη,

$$\begin{aligned} c_1 + \ln|X| &= \int \frac{dX}{X} = -\int \frac{U-1}{U^2-2U-1}dU = \frac{-1}{2}\int \frac{(U^2-2U-1)'}{U^2-2U-1}dU \\ &= \frac{-1}{2}\ln|U^2-2U-1|, \end{aligned}$$

όπου $c_1 \in \mathbb{R}$, και τελικά

## Λύση (συνέχεια)

$$\ln|U^2-2U-1| = -2c_1 - \ln X^2 \Rightarrow |U^2-2U-1| = e^{-2c_1}e^{-\ln X^2}$$

$$\Rightarrow U^2-2U-1 = \frac{c_2}{X^2}, \quad c_2 \in \mathbb{R}^*$$

Αντικαθιστώντας, είναι $U = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{y-3}{x+1}$ και

$$U^2-2U-1 = \left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2 - 2\frac{y-3}{x+1} - 1 = \left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2 - \frac{2y-x-7}{x+1}$$

$$= \frac{(y-3)^2+(x-2y+7)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{y^2+x^2-2xy+8x-8y-2}{(x+1)^2}$$

οπότε η γενική λύση σε πεπλεγμένη μορφή της αρχικής ΔΕ είναι η

$$y^2+x^2-2xy+8x-8y = c, \qquad c \in \mathbb{R}\setminus\{2\}.$$

Μια γραμμική διαφορική εξίσωση (ΓΔΕ) πρώτης τάξης έχει τη μορφή:

$$\frac{dy}{dx} + \phi(x)y = \sigma(x). \tag{3}$$

Έστω $\Phi = \Phi(x)$ μια παράγουσα της $\phi(x)$, δηλαδή $\Phi'(x) = \phi(x)$.
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
1) Αν $\sigma(x) = 0$, τότε η ΔΕ ονομάζεται **γραμμική ομογενής** και λύνεται άμεσα ως χωριζομένων μεταβλητών:

$$y' = -\phi(x)y \overset{y\neq 0}{\Rightarrow} \frac{y'}{y} = -\phi(x) \Rightarrow (\ln|y|)' = -\phi(x) \Rightarrow \ln|y| = k - \Phi(x)$$
$$\Rightarrow |y| = e^k e^{-\Phi(x)}$$

οπότε τελικά η γενική λύση της γραμμικής ομογενούς είναι η

$$y = ce^{-\Phi(x)} = cy_0, \quad c \in \mathbb{R}, \qquad \text{όπου } y_0 = y_0(x) = e^{-\Phi(x)} \tag{4}$$

είναι η μερική λύση της γραμμικής ομογενούς, για $c = 1$, η οποία παίζει σημαντικό ρόλο και στην γενική περίπτωση, όπως φαίνεται παρακάτω.

2) Στη γενική περίπτωση, αναζητάμε μια θετική συνάρτηση $I = I(x)$, η οποία ονομάζεται **ολοκληρωτικός παράγοντας**, τέτοια ώστε $(Iy)' = (y' + \phi y)I$, έτσι ώστε, πολλαπλασιάζοντας την (3) με $I$, να προκύψει

$$(y' + \phi y)I = \sigma I \Rightarrow (Iy)' = \sigma I$$

Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $I(x) = e^{\Phi(x)} = \dfrac{1}{y_0(x)}$, αφού $I'(x) = \phi(x)e^{\Phi(x)} = \phi(x)I(x)$, οπότε

$$(y' + \phi y)I = y'I + \phi Iy = y'I + I'y = (Iy)'$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$(I(x)y)' = I(x)\sigma(x) \Rightarrow I(x)y = c + \int I(x)\sigma(x)dx \Rightarrow y = \frac{c + \int I(x)\sigma(x)dx}{I(x)}$$

οπότε, η γενική λύση της (3) είναι η

$$y = cy_0(x) + y_0(x)\int \frac{\sigma(x)}{y_0(x)}dx, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Εναλλακτικά, σύμφωνα με τη γενική θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, η γενική λύση της εξίσωσης (3) προκύπτει ως το άθροισμα της γενικής λύσης $cy_0$ της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης και μιας (οποιασδήποτε) μερικής λύσης $\psi$ της (3), δηλαδή είναι

$$y = cy_0 + \psi,$$

οπότε το πρόβλημα της επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης ανάγεται στην εύρεση μιας μερικής λύσης $\psi$.
Για το σκοπό αυτό, ακολουθείται η **μέθοδος του Lagrange**, σύμφωνα με την οποία αναζητείται συνάρτηση $\psi$ της μορφής $\psi = gy_0$. Αφού η $\psi$ είναι λύση της (3), έπεται ότι

$$\psi' + \phi\psi = \sigma \Rightarrow g'y_0 + gy_0' + \phi g y_0 = \sigma \Rightarrow g'y_0 + g(y_0' + \phi y_0) = \sigma \Rightarrow g'y_0 = \sigma.$$

Η τελευταία σχέση προέκυψε διότι η $y_0$ είναι λύση της ομογενούς, δηλαδή $y_0' + \phi y_0 = 0$.

Επομένως, είναι

$$g' = \frac{\sigma}{y_0},$$

οπότε, μια κατάλληλη συνάρτηση $g$ είναι η

$$g = \int \frac{\sigma(x)}{y_0(x)} dx = \int \sigma(x) e^{\Phi(x)} dx,$$

ώστε η ζητούμενη γενική λύση είναι η

$$y = cy_0 + \psi = cy_0 + y_0 g = cy_0 + y_0 \int \frac{\sigma}{y_0} dx,$$

όπως προέκυψε και με την προηγούμενη μέθοδο (βλ. (5)).

## Άσκηση (ΦΕΒ 2019)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{\sin x}{x^3}, \qquad y(\pi/2) = 1.$$

## Λύση

Πολλαπλασιάζοντας την ΔΕ κατά μέλη με $x^3$, παίρνουμε τις ισοδύναμες σχέσεις

$$x^3y' + 3x^2y = \sin x \Leftrightarrow (x^3y)' = (-\cos x)' \Leftrightarrow x^3y = c - \cos x, \qquad c \in \mathbb{R}$$

και τελικά η γενική λύση της ΔΕ είναι η $y = \dfrac{c - \cos x}{x^3}$.
Θέτοντας $x = \pi/2$, έχουμε ότι $1 = y(\pi/2) = \dfrac{c - 0}{(\pi/2)^3}$, οπότε $c = (\pi/2)^3$
και η ζητούμενη μερική λύση είναι η $y = \dfrac{(\pi/2)^3 - \cos x}{x^3}$.

## Άσκηση

Να λυθεί η (γραμμική) διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{1}{x}y = 3\sin(2x), \quad x > 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi} \tag{6}$$

1. Με τη μέθοδο του ολοκληρωτικού παράγοντα.
2. Σύμφωνα με τη γενική θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

## Λύση

Η δοσμένη διαφορική εξίσωση είναι γραμμική, με $\phi(x) = \dfrac{1}{x}$ και $\sigma(x) = 3\sin(2x)$ (βλ. (3)). Μια παράγουσα της $\phi(x)$ είναι η $\Phi(x) = \ln x$.

## Λύση (συνέχεια)

1) Θέτοντας $I(x) = e^{\Phi(x)} = x$, έχουμε ότι

$$I(x)y' + I(x)\frac{1}{x}y = (I(x)y)'.$$

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας την (6) με $I(x)$, έχουμε

$$xy' + y = 3x\sin(2x) \Rightarrow (xy)' = 3x\sin(2x) \Rightarrow xy = c_1 + \int 3x\sin(2x)dx$$
$$\Rightarrow y = \frac{c_1}{x} + \frac{1}{x}\int 3x\sin(2x)dx$$

Στη συνέχεια, προσδιορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα $\int 3x\sin(2x)dx$ ως εξής:

## Λύση (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
\int 3x\sin(2x)dx &= \int \frac{-3}{2}x\left(\cos(2x)\right)' dx \\
&= \frac{-3}{2}x\cos(2x) - \int \left(\frac{-3}{2}x\right)' \cos(2x)dx \\
&= \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{2}\int \cos(2x)dx \\
&= \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{2}\int \left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)' dx \\
&= c_2 + \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x)
\end{aligned}
$$

## Λύση (συνέχεια)

Άρα, η γενική λύση της (6) είναι η

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{c_1}{x} + \frac{1}{x}\left(c_2 - \frac{3x}{2}\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x)\right) \\
&= \frac{c}{x} + \frac{3}{2}\left(\frac{\sin(2x)}{2x} - \cos(2x)\right), \qquad (7)
\end{aligned}
$$

όπου $c = c_1 + c_2$.
Χρησιμοποιώντας την δοσμένη τιμή $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi}$, προσδιορίζουμε την τιμή της σταθεράς $c$, ως εξής:

$$\frac{1}{\pi} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4c}{\pi} + \frac{3}{2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\pi} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4c}{\pi} + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\pi} - 0\right) = \frac{4c+3}{\pi}$$

Άρα, $\dfrac{4c+3}{\pi} = \dfrac{1}{\pi} \Rightarrow 4c + 3 = 1 \Rightarrow c = -\dfrac{1}{2}$ και αντικαθιστώντας την τιμή της $c$ στην (7), βρίσκουμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

## Λύση (συνέχεια)

2) Μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς: $y' + \frac{1}{x}y = 0$, είναι ως γνωστό η $y_0 = e^{-\Phi(x)} = \frac{1}{x}$. οπότε η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$y = \frac{c}{x}, \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Στη συνέχεια, αναζητούμε μερική λύση της (6), της μορφής $\psi = gy_0$. Ως γνωστό, μια κατάλληλη συνάρτηση $g$ είναι μια παράγουσα της $\sigma(x)e^{\Phi(x)} = 3x\sin(2x)$, οπότε επιλύοντας το ολοκλήρωμα, επιλέγουμε την

$$g = \frac{-3}{2}x\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x).$$

### Λύση (συνέχεια)

Τελικά, η γενική λύση της (6) είναι το άθροισμα της λύσης (8) της αντίστοιχης ομογενούς και της μερικής λύσης $\psi$, δηλαδή

$$y = \frac{c}{x} + \psi = \frac{c}{x} + y_0 g = \frac{c}{x} + \frac{1}{x} g = \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\left(\frac{-3}{2} x\cos(2x) + \frac{3}{4}\sin(2x)\right)$$
$$= \frac{c}{x} + \frac{3}{2}\left(\frac{\sin(2x)}{2x} - \cos(2x)\right),$$

όπως άλλωστε προέκυψε και στο προηγούμενο ερώτημα.
Η τιμή της σταθεράς $c$ προσδιορίζεται όπως και πριν, θέτοντας $x = \dfrac{\pi}{4}$ στον παραπάνω τύπο.

Οι διαφορικές εξισώσεις Bernoulli έχουν την μορφή:

$$\frac{dy}{dx} + \phi(x)y = \sigma(x)y^a.$$

Αν $a = 0$ ή $a = 1$, τότε η ΔΕ είναι γραμμική.
Αλλιώς, θέτουμε $u = y^{1-a}$. Ο μετασχηματισμός αυτός μετατρέπει την εξίσωση σε γραμμική.
Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με $(1-a)y^{-a}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} &(1-a)y^{-a}\frac{dy}{dx} + (1-a)\phi(x)y^{1-a} = (1-a)\sigma(x) \\ \Leftrightarrow &(y^{1-a})' + (1-a)\phi(x)y^{1-a} = (1-a)\sigma(x) \\ \Leftrightarrow &u' + (1-a)\phi(x)u = (1-a)\sigma(x). \end{aligned}$$

### Άσκηση (ΦΕΒ 2015)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{4}{x} y = 12\sqrt{y}x^3, \qquad y(1) = 4.$$

### Λύση

Επειδή $\sqrt{y} = y^{1/2}$, θέτουμε $a = 1/2$ και πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τη ΔΕ με $(1-a)y^{-a} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, παίρνοντας την

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{2}{x}\sqrt{y} = 6x^3.$$

Θέτοντας $u = y^{1-a} = \sqrt{y}$, οπότε $u' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$, η τελευταία ΔΕ μετατρέπεται στην

## Λύση (συνέχεια)

$$u' + \frac{2}{x}u = 6x^3.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $x^2$, παίρνουμε τις ισοδύναμες σχέσεις

$$x^2u' + 2xu = 6x^5 \Leftrightarrow (x^2u)' = (x^6)' \Leftrightarrow x^2u = x^6 + c, \Leftrightarrow x^2\sqrt{y} = x^6 + c$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = x^4 + \frac{c}{x^2}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

οπότε η γενική λύση της αρχικής ΔΕ είναι η $y = \left(x^4 + \dfrac{c}{x^2}\right)^2, \quad c \in \mathbb{R}.$
Θέτοντας $x = 1$, έχουμε ότι

$$4 = y(1) = (1 + c)^2 \Rightarrow 1 + c \in \{-2, 2\} \Rightarrow c \in \{-3, 1\}$$

και έτσι προκύπτουν δύο μερικές λύσεις για $y(1) = 4$, οι

$$y = \left(x^4 - \frac{3}{x^2}\right)^2, \qquad y = \left(x^4 + \frac{1}{x^2}\right)^2.$$