ΚΕΦ. 7: ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ
Σημειώσεις Φροντιστηρίου

Πρόταση 2.3

Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ισχύει ο τύπος

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S\left(f,\delta_n,\gamma_n\right),$$

όπου $\left(\delta_n\right)$ είναι μια ακολουθία διαμερίσεων του $[a,b]$ με $\lim_{n\to\infty}\lambda\left(\delta_n\right)=0$ και γ_n οποιαδήποτε επιλογή ενδιάμεσων σημείων της δ_n.

Πόρισμα 2.4

Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f/\left[\alpha,\beta\right]$ ισχύει ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\beta-\alpha}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}i\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να υπολογισθούν με τη βοήθεια του πορίσματος 2.4 τα όρια των ακολουθιών (α_n), (β_n)και (γ_n), όταν:

(i) $\alpha_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$, (ii) $\beta_n = \dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{2n^2}$,

(iii) $\gamma_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n^2}}$.

ΛΥΣΗ

Θα εφαρμοσθεί ο τύπος

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta-\alpha}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{n} i\right).$$

Σε κάθε μια από τις δοσμένες ακολουθίες πρέπει να προσδιορισθεί η κατάλληλη συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ για την εφαρμογή του τύπου.

(i) $\alpha_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n+i} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1+\dfrac{i}{n}}$,

οπότε στην περίπτωση αυτή ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{1+x} / [0,1]$ και είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(0+\frac{1-0}{n}i\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{i}{n}} = \lim_{n\to\infty}\alpha_n .$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

(ii) $\beta_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{2n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$,

οπότε ορίζεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \,/\, [0,1]$$

και είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(0 + \frac{1-0}{n} i\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \beta_n .$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

(iii) $\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n^2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+(i/n)^2}}$

οπότε ορίζεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} / [0,1]$ και είναι

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(0 + \frac{1-0}{n} i\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+(i/n)^2}} = \lim_{n\to\infty} \gamma_n .$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, τίθεται $x = \sinh t$, οπότε θα είναι

$dx = \cosh t\, dt$, $\sqrt{1+x^2} = \cosh t$ και $t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, διότι

$$x = \sinh t \Leftrightarrow x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Leftrightarrow e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0 \overset{y=e^t}{\Leftrightarrow} y^2 - 2xy - 1 = 0, \quad y > 0$$

$$\Leftrightarrow y = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Επομένως, προκύπτει ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh t}{\cosh t} dt = [t]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

Κατόπιν τούτων, προκύπτει ότι $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

Θεώρημα 4.1 (1^{o} θεμελιώδες θεώρημα του Απ. Λογ.)

Αν η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η συνάρτηση $F/[\alpha,\beta]$ με

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο $\xi\in[\alpha,\beta]$, τότε η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο ξ και ισχύει ότι

$$F'(\xi)=f(\xi).$$

Θεώρημα 4.2 (2^{o} θεμελιώδες θεώρημα του Απ. Λογ.)

Αν η συνάρτηση $f/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής και $F/[\alpha,\beta]$ είναι μια παράγουσά της, τότε ισχύει ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=F(\beta)-F(\alpha).$$

Πρόταση 4.3 (Ολοκλήρωση με αντικατάσταση)
Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $\phi/[c,d]$ τέτοια ώστε η παράγωγός της να είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$ και $\phi([c,d])=[\alpha,\beta]$. Αν $f/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε η συνάρτηση $(f\circ\phi)\phi'/[c,d]$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει ότι

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\,dt.$$

Πρόταση 4.4 (Παραγοντική Ολοκλήρωση)
Έστω δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g/[\alpha,\beta]$ με παραγώγους f',g' ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta]$. Τότε ισχύει η σχέση

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)\,dx = \big[f(x)g(x)\big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)\,dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 19(β)

Να ευρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης G με $G(x)=\int_0^{\cos(3x^2+2x+5)}\frac{1}{\sqrt{2-t^2}}dt\ /\ \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x)=\cos(3x^2+2x+5)\ /\ \mathbb{R}$ και $F(x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{2-t^2}}dt\ /\ (-\sqrt{2},\sqrt{2})$. Επειδή η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\ /\ (-\sqrt{2},\sqrt{2})$ είναι συνεχής, έπεται ότι η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ για κάθε $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. Εξάλλου, επειδή $R(g)\subset(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ορίζεται η σύνθεση των συναρτήσεων g, F και είναι $G=F\circ g$. Τότε, προκύπτει ότι

$$G'(x)=(F\circ g)'(x)=F'(g(x))g'(x)=\frac{-\sin(3x^2+2x+5)(3x^2+2x+5)'}{\sqrt{2-\cos^2(3x^2+2x+5)}}$$

$$=-\frac{6x+2}{\sqrt{1+\sin^2(3x^2+2x+5)}}\sin(3x^2+2x+5).$$

ΑΣΚΗΣΗ 21(α)

Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x \frac{t^3}{t^4+2}dt$,

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $F(x)=\int_0^x \frac{t^3}{t^4+2}dt \,/\, \mathbb{R}$ τότε επειδή η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{x^4+2} \,/\, \mathbb{R}$ είναι συνεχής, έπεται ότι η συνάρτηση $F/\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=\frac{x^3}{x^4+2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Κατόπιν τούτων, είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x \frac{t^3}{t^4+2}dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{\left(x^4\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{x^4+2}}{4x^3}=\frac{1}{8}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 26

α) Αν για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f/[0,\alpha]$, όπου $\alpha>0$, ισχύει η σχέση $f(\alpha-x)=f(x)$, για κάθε $x\in[0,\alpha]$, να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^\alpha xf(x)dx=\frac{1}{2}\alpha\int_0^\alpha f(x)dx.$$

β) Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $I=\int_0^\alpha xf(x)dx$, οπότε, για $y=\alpha-x$, προκύπτει ότι

$$I=-\int_\alpha^0(\alpha-y)f(\alpha-y)dy=\alpha\int_0^\alpha f(y)dy-\int_0^\alpha yf(y)dy=\alpha\int_0^\alpha f(x)dx-I.$$

Άρα,

$$2I=\alpha\int_0^\alpha f(x)dx$$

οπότε

$$I=\frac{1}{2}\alpha\int_0^\alpha f(x)dx.$$

β) Αν εφαρμοσθεί το α) για τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}/[0,\pi]$$

$R(\sin x, \cos x)$

προκύπτει ότι

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \qquad (1)$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος θέτουμε $z=\cos x$, οπότε $dz=-\sin x dx$ και άρα,

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\int_1^{-1}\frac{dz}{1+z^2}=\int_{-1}^{1}\frac{dz}{1+z^2}=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 31

Να υπολογισθούν οι τιμές των ορισμένων ολοκληρωμάτων:

α) $\int_0^1 x\text{arctg}x dx$, β) $\int_1^e x^2(\ln x)^2 dx$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\int_0^1 x\text{arctg}x dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \text{arctg}x dx = \left[\frac{x^2}{2}\text{arctg}x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}(\text{arctg}x)' dx$$

$$= \frac{1}{2}\text{arctg}1 - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx \overset{*}{=} \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[x]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[\text{arctg}x]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(\pi - 2).$$

$$* \quad \int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = x + \text{arctg}x + C$$

β) Είναι

$$\int_1^e x^2(\ln x)^2 dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)'(\ln x)^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\left((\ln x)^2\right)' dx$$

$$= \frac{e^3}{3}(\ln e)^2 - \frac{1}{3}(\ln 1)^2 - \frac{2}{3}\int_1^e x^3 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e + \frac{2}{3}\int_1^e \frac{x^3}{3}(\ln x)' dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\frac{e^3}{3}\ln e + \frac{2}{3}\frac{1}{3}\ln 1 + \frac{2}{9}\int_1^e x^3 \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{9}e^3 + \frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{9} + \frac{2}{27}\left(e^3 - 1\right)$$

$$= \frac{1}{27}\left(5e^3 - 2\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 32

Να υπολογισθεί το όριο της ακολουθίας $\left(\alpha_n\right)$ με $\alpha_n = \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x} dx$.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$\alpha_n = \int_0^1 \frac{\left(x^n\right)'}{1+x} dx = \left[\frac{x^n}{1+x}\right]_0^1 - \int_0^1 x^n \left(\frac{1}{1+x}\right)' dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx. \qquad (1)$$

Επειδή $0 \le \frac{x^n}{(1+x)^2} \le x^n$, για κάθε $x \in [0,1]$, προκύπτει ότι

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \le \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Συνεπώς, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\frac{1}{2} \le \alpha_n \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και επομένως είναι $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.

Θεώρημα 5.2

Αν δύο συναρτήσεις $f, g/[\alpha,\beta]$ είναι συνεχείς και η δεύτερη δεν αλλάζει πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει (ένα τουλάχιστον) σημείο $\xi \in (\alpha,\beta)$ με

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx.$$

Σημειώνεται ότι το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος 5.2 για $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = 1/[\alpha,\beta]$.

Για το λόγο αυτό το θεώρημα 5.2 αναφέρεται συνήθως στη βιβλιογραφία ως **Γενικευμένο Θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού**.

Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι το θεώρημα αυτό χρησιμοποιείται συχνά για τον προσδιορισμό του σφάλματος στους τύπους της αριθμητικής ολοκλήρωσης.

ΑΣΚΗΣΗ (ΦΕΒ 2019). Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο $z \in (-2,2)$, για το οποίο ισχύει η σχέση $\frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin\left(4x^2-2\right)}{1+x^2}dx = \sin z$.

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με το Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, αν $f, g / [a,b]$ συνεχείς και η g δεν αλλάζει πρόσημο, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$, τέτοιο ώστε $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

Οι $f, g / [0,1]$, με $f(x) = \sin(4x^2-2)$ και $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος, οπότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$, ώστε

$$I = \frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin\left(4x^2-2\right)}{1+x^2}dx = \frac{4}{\pi}\int_0^1 f(x)g(x)dx = \frac{4}{\pi}f(\xi)\int_0^1 g(x)dx = \frac{4}{\pi}f(\xi)\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{4}{\pi}f(\xi)\left[\text{arctg } x\right]_0^1 = \frac{4}{\pi}f(\xi)\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = f(\xi) = \sin(4\xi^2-2)$$

Τελικά, θέτοντας $z = 4\xi^2 - 2$, προκύπτει το ζητούμενο.

Κριτήριο του ολοκληρώματος

Έστω $f/[1,+\infty)$ μια μη αρνητική φθίνουσα συνάρτηση. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία (S_n), με $S_n = \int_1^n f(x)dx$ συγκλίνει και στην περίπτωση αυτή ισχύει η ανισότητα

$$\lim_{n\to\infty} S_n \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le f(1) + \lim_{n\to\infty} S_n .$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος, η παραπάνω ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Τέλος, πρέπει να τονισθεί ότι για την εφαρμογή του κριτηρίου αυτού δεν είναι απαραίτητο η συνάρτηση f να ορίζεται σε όλο το διάστημα $[1,+\infty)$ αλλά σε ένα υποδιάστημα της μορφής $[m,+\infty)$, αρκεί η συνάρτηση να είναι μη αρνητική και φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

ΑΣΚΗΣΗ 42

Να αποδειχθεί το κριτήριο του ολοκληρώματος.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(i)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε πρέπει να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (σ_n) συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία (S_n) συγκλίνει.

Επειδή η συνάρτηση $f / [1,+\infty)$ είναι μη αρνητική, προκύπτουν οι σχέσεις

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \sum_{i=1}^{n+1} f(i) - \sum_{i=1}^{n} f(i) = f(n+1) \geq 0$$

και

$$S_{n+1} - S_n = \int_1^{n+1} f(x)\,dx - \int_1^{n} f(x)\,dx$$

$$= \int_1^{n} f(x)\,dx + \int_n^{n+1} f(x)\,dx - \int_1^{n} f(x)\,dx = \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, οπότε οι ακολουθίες (σ_n) και (S_n) είναι αύξουσες. Τότε όμως, αρκεί να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (σ_n) είναι άνω φραγμένη αν και μόνο αν η ακολουθία (S_n) είναι άνω φραγμένη.

Για το σκοπό αυτό, θα αποδειχθεί η ανισότητα

$$S_{n+1} \le \sigma_n \le f(1) + S_n \qquad (1)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Πράγματι,

$$S_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} f(x)\,dx \le \sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} f(i)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

$$=\sigma_n$$

και

$$S_n = \int_1^{n} f(x)\,dx = \sum_{i=2}^{n} \int_{i-1}^{i} f(x)\,dx \ge \sum_{i=2}^{n} \int_{i-1}^{i} f(i)\,dx = \sum_{i=2}^{n} f(i)$$

$$=\sigma_n - f(1).$$

Κατόπιν τούτων, ισχύει η ανισότητα (1), από όπου προκύπτει ότι η ακολουθία (σ_n) είναι άνω φραγμένη αν και μόνο αν η ακολουθία (S_n) είναι άνω φραγμένη.

Τέλος, στην περίπτωση αυτή, για $n \to \infty$ η σχέση (1) δίδει

$$\lim_{n\to\infty} S_n \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le f(1) + \lim_{n\to\infty} S_n .$$

ΑΣΚΗΣΗ (ΦΕΒ 2018). Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του ολοκληρώματος, να αποδειχθεί η ανισότητα $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3} \le \frac{1}{4} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2+3} / [1,+\infty)$, η οποία είναι φθίνουσα και μη αρνητική, οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος, ισχύει η σχέση

$$\lim_{n\to\infty} S_n \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le f(1) + \lim_{n\to\infty} S_n,$$

όπου

$$S_n = \int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{dx}{x^2+3} \overset{x=y\sqrt{3}}{=} \int_{1/\sqrt{3}}^{n/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}dy}{3y^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}[\text{arctg } y]_{1/\sqrt{3}}^{n/\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\text{arctg}\frac{n}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\lim_{n\to\infty}\text{arctg}\frac{n}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, και $f(1) = \frac{1}{4}$, προκύπτει τελικά η ζητούμενη ανισότητα.

ΑΣΚΗΣΗ 45

Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^q}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $q>1$. Επιπλέον, να αποδειχθεί η σχέση $\frac{1}{(q-1)(\ln 2)^{q-1}}\leq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^q}\leq\frac{q-1+2\ln 2}{2(q-1)(\ln 2)^q}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^q}\,/\left[2,+\infty\right)$$

η οποία είναι μη αρνητική, με παράγωγο

$$f'(x)=-\frac{\left[x(\ln x)^q\right]'}{x^2(\ln x)^{2q}}=-\frac{(\ln x)^q+qx\frac{1}{x}(\ln x)^{q-1}}{x^2(\ln x)^{2q}}=-\frac{\ln x+q}{x^2(\ln x)^{q+1}}.$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left[m,+\infty\right)$, όπου $m=\max\{2,e^{-q}\}$, έπεται ότι η συνάρτηση $f\,/\left[m,+\infty\right)$ είναι φθίνουσα, οπότε ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του κριτήριου του ολοκληρώματος.

Επιπλέον, για $q \neq 1$, είναι

$$S_n = \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^q}dx \overset{y=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{\ln n} y^{-q}dy = \left[\frac{y^{-q+1}}{-q+1}\right]_{\ln 2}^{\ln n} = \frac{(\ln n)^{1-q}}{1-q} + \frac{(\ln 2)^{1-q}}{q-1}.$$

Ανάλογα, για $q = 1$, είναι $S_n = \int_2^n \frac{dx}{x\ln x} = [\ln(\ln(x))]_2^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$.

Κατόπιν τούτου, προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{(\ln 2)^{1-q}}{q-1}, & \text{αν}\, q > 1 \\ +\infty, & \text{αν}\, q \leq 1 \end{cases}$$

οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο του ολοκληρώματος, η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $q > 1$και ισχύει ότι

$$\frac{(\ln 2)^{1-q}}{q-1} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^q} \leq \frac{1}{2(\ln 2)^q} + \frac{(\ln 2)^{1-q}}{q-1}$$

ή, ισοδύναμα, $\displaystyle \frac{1}{(q-1)(\ln 2)^{q-1}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^q} \leq \frac{q-1+2\ln 2}{2(q-1)(\ln 2)^q}$.