ΔΙΑΛΕΞΗ 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Βασικοί ορισμοί
Σύγκλιση ακολουθιών
Κατ’ εκδοχή σύγκλιση

1.ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Ακολουθία στοιχείων ενός συνόλου Ε ονομάζεται κάθε απεικόνιση

$$\alpha : \mathbb{N}^* \to \mathrm{E}.$$

Σε αντίθεση με τη συνάρτηση f, όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή σημειώνεται συνήθως με x και η εικόνα της με f(x), στην ακολουθία α η ανεξάρτητη μεταβλητή θα σημειώνεται με n και η εικόνα της με α_n, η οποία θα ονομάζεται **γενικός** ή **n-οστός όρος** της ακολουθίας. Η ακολουθία αυτή θα σημειώνεται με $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ ή συνοπτικά με (α_n). Αν $\mathrm{E} = \mathbb{R}$ τότε η ακολουθία ονομάζεται **ακολουθία πραγματικών αριθμών**.

Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών ονομάζεται:

1.**Σταθερή**, αν $\alpha_n = \alpha_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

2.**Αριθμητική πρόοδος**, αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \lambda$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Στην περίπτωση αυτή θα είναι $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\lambda$.

3.**Γεωμετρική πρόοδος**, αν $\alpha_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και υπάρχει $\omega \in \mathbb{R}^*$ με $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \omega$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Στην περίπτωση αυτή θα είναι $\alpha_n = \alpha_1 \omega^{n-1}$.

4. **Αύξουσα** (αντ. **φθίνουσα**), αν $\alpha_n \le \alpha_{n+1}$ (αντ. $\alpha_n \ge \alpha_{n+1}$) για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

5. **Γνήσια αύξουσα** (αντ. **γνήσια φθίνουσα**) αν $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ (αντ. $\alpha_n > \alpha_{n+1}$) για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

6. **Μονότονη** (αντ. **γνήσια μονότονη**), αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα (αντ. γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα).

7. **Άνω** (αντ. **κάτω**) **φραγμένη**, αν υπάρχει $\varphi \in \mathbb{R}$ με $\alpha_n \le \varphi$ (αντ. $\alpha_n \ge \varphi$) για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Στην περίπτωση αυτή, ο αριθμός φ ονομάζεται **άνω** (αντ. **κάτω**) φράγμα της ακολουθίας (α_n). Το ελάχιστο άνω φράγμα (αντ. μέγιστο κάτω φράγμα) της (α_n) ονομάζεται **supremum** (αντ. **infimum**) της (α_n) και σημειώνεται με $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n$ (αντ. $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n$).

Παράδειγμα

Να ευρεθούν τα $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n$ και $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n$ της ακολουθίας (α_n) με $\alpha_n = \dfrac{1}{3n+1}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\alpha_n = \dfrac{1}{3n+1} \le \dfrac{1}{4} = \alpha_1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, οπότε $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n = \dfrac{1}{4}$.

Από την άλλη, είναι $\alpha_n \ge 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, άρα $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n \ge 0$.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι κάθε θετικός αριθμός θ δεν είναι κάτω φράγμα της, αφού όσο μικρός και αν είναι ο θ, μπορεί να επιλεγεί $n_0 \in \mathbb{N}^*$, ώστε $\alpha_{n_0} = \dfrac{1}{3n_0+1} < \theta$.

Πράγματι, ισχύει

$$\frac{1}{3n+1} < \theta \Leftrightarrow 3n+1 > \frac{1}{\theta} \Leftrightarrow 3n > \frac{1}{\theta} - 1 \Leftrightarrow n > \frac{1-\theta}{3\theta}$$

Οπότε, αρκεί να επιλεχθεί $n_0 = \left[\dfrac{1-\theta}{3\theta}\right] + 1 > \dfrac{1-\theta}{3\theta}$.

Κατόπιν τούτων, δεν μπορεί να είναι $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n > 0$, και άρα είναι $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n = 0$.

8.**Φραγμένη**, αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.

9.**Απόλυτα φραγμένη**, αν υπάρχει $\theta > 0$ με $|\alpha_n| \leq \theta$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Άσκηση

Μια ακολουθία (α_n) είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι απολύτως φραγμένη.

Λύση

Αν είναι απόλυτα φραγμένη, τότε υπάρχει $\theta > 0$, με

$$|\alpha_n| \leq \theta, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Όμως, $|\alpha_n| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq \alpha_n \leq \theta$, άρα το $-\theta$ είναι ένα κάτω φράγμα και το θ είναι ένα άνω φράγμα της (α_n), οπότε η ακολουθία είναι φραγμένη.

Αντίστροφα, αν η ακολουθία είναι φραγμένη, θα υπάρχουν $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$, με $\varphi_1 \leq \alpha_n \leq \varphi_2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Αν τεθεί $\theta = \max\{|\varphi_1|, |\varphi_2|\}$, τότε ισχύει

$$-\theta \leq -|\varphi_1| \leq \varphi_1 \leq \alpha_n \leq \varphi_2 \leq |\varphi_2| \leq \theta,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, οπότε τελικά $|\alpha_n| \leq \theta$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, δηλαδή η ακολουθία είναι απολύτως φραγμένη.

Υποακολουθίες

Μερικές σκέψεις και παραδείγματα

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \underline{\alpha_3} \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \underline{\alpha_6} \quad \underline{\alpha_7} \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \quad \underline{\alpha_{10}} \quad \alpha_{11} \quad \underline{\alpha_{12}} \quad \underline{\alpha_{13}} \quad \ldots$$

$$\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \beta_5 \quad \beta_6 \quad \ldots$$

$$\alpha_1 \quad \underline{\alpha_2} \quad \underline{\alpha_3} \quad \alpha_4 \quad \underline{\alpha_5} \quad \alpha_6 \quad \underline{\alpha_7} \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \quad \alpha_{10} \quad \underline{\alpha_{11}} \quad \underline{\alpha_{12}} \quad \alpha_{13} \quad \ldots$$

$$\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4 \quad \gamma_5 \quad \gamma_6 \quad \ldots$$

$$\alpha_1 \quad \underline{\alpha_2} \quad \alpha_3 \quad \underline{\alpha_4} \quad \alpha_5 \quad \underline{\alpha_6} \quad \alpha_7 \quad \underline{\alpha_8} \quad \alpha_9 \quad \underline{\alpha_{10}} \quad \alpha_{11} \quad \underline{\alpha_{12}} \quad \alpha_{13} \quad \ldots$$

$$\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4 \quad \delta_5 \quad \delta_6 \quad \ldots$$

Η κατασκευή όλων αυτών των ακολουθιών εξαρτάται από την ακολουθία (α_n) και τον <u>τρόπο επιλογής</u>. Η επιλογή αυτή, όπως φαίνεται και στα τρία προηγούμενα παραδείγματα, γίνεται με αύξοντα τρόπο, δηλαδή αφού επιλεχθεί ένας όρος α_n, ο επόμενος όρος α_m που θα επιλεχθεί θα έχει δείκτη m μεγαλύτερο του n.

Αυστηρότερα, ο τρόπος επιλογής μπορεί να περιγραφεί από μια γνησίως αύξουσα ακολουθία (κ_n) με τιμές στο $\mathbb{N}^*$.

Έτσι, για τα προηγούμενα παραδείγματα, είναι

$$\beta_1 = \alpha_3, \beta_2 = \alpha_6, \beta_3 = \alpha_7, \beta_4 = \alpha_{10}, \beta_5 = \alpha_{12}, \beta_6 = \alpha_{13}, \ldots$$

οπότε $\kappa_1 = 3, \kappa_2 = 6, \kappa_3 = 7, \kappa_4 = 10, \kappa_5 = 12, \kappa_6 = 13, \ldots$

$$\gamma_1 = \alpha_2, \gamma_2 = \alpha_3, \gamma_3 = \alpha_5, \gamma_4 = \alpha_7, \gamma_5 = \alpha_{11}, \gamma_6 = \alpha_{12}, \ldots$$

οπότε $\kappa_1 = 2, \kappa_2 = 3, \kappa_3 = 5, \kappa_4 = 7, \kappa_5 = 11, \kappa_6 = 12, \ldots$

$$\delta_1=\alpha_2,\ \delta_2=\alpha_4,\ \delta_3=\alpha_6,\ \delta_4=\alpha_8,\ \delta_5=\alpha_{10},\ \delta_6=\alpha_{12},\ldots$$

οπότε $\kappa_1=2,\ \kappa_2=4,\ \kappa_3=6,\ \kappa_4=8,\ \kappa_5=10,\ \kappa_6=12,\ldots$
και γενικά $\kappa_n=2n$.

Ορισμός

Αν (α_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και (κ_n) είναι μια **γνήσια αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων**, τότε η ακολουθία (β_n) με $\beta_n=\alpha_{\kappa_n}$ ονομάζεται **υποακολουθία** της (α_n).

Ουσιαστικά η υποακολουθία (β_n) προκύπτει από τη σύνθεση των ακολουθιών (κ_n) και (α_n), δηλαδή $\beta(n)=\alpha(\kappa(n))$.

Ειδικά αν $\kappa_n=2n$, (αντ. $\kappa_n=2n-1$) τότε προκύπτει η υποακολουθία των άρτιων (αντ. περιττών) δεικτών της ακολουθίας (α_n).

Παράδειγμα. Αν (α_n) είναι μια ακολουθία με

$$\alpha_n=\begin{cases}\dfrac{1}{3n+1}, & \text{αν n είναι άρτιος}\\ n^2-3, & \text{αν n είναι περιττός}\end{cases}$$

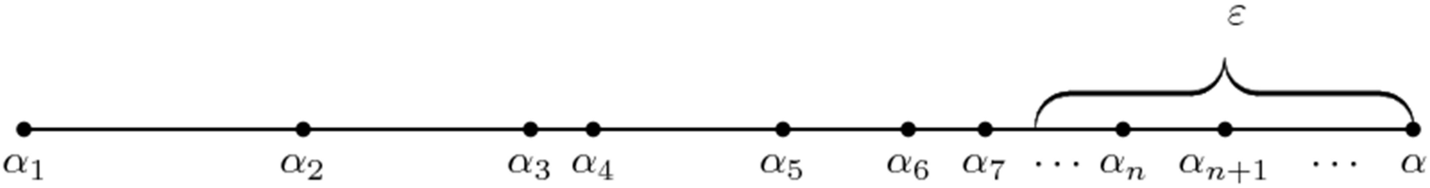
τότε οι υποακολουθίες των άρτιων και περιττών δεικτών της (α_n) είναι αντίστοιχα, $\alpha_{2n}=\dfrac{1}{6n+1}$ και $\alpha_{2n-1}=4n^2-4n-2$.

2. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Προκαταρκτικές σκέψεις για τη σύγκλιση ακολουθίας

Δίδεται μια ακολουθία (α_n) και $\alpha \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

<u>1$^\eta$ περίπτωση:</u> (α_n) αύξουσα και $\alpha = \sup \alpha_n$.



Τότε, όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, η απόσταση του όρου α_n από το α, δηλαδή η διαφορά $\alpha - \alpha_n$ θα γίνεται οσοδήποτε μικρή, καθώς αυξάνεται το n. Με άλλα λόγια, αν ε είναι ένας τυχαίος θετικός αριθμός, τότε υπάρχει κάποιος δείκτης $n_0 \in \mathbb{N}^*$, τέτοιος ώστε $\alpha - \alpha_{n_0} < \varepsilon$.

Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$, τέτοιος ώστε $\alpha - \alpha_n < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.

Ο αριθμός α είναι το όριο της ακολουθίας (α_n).

Για παράδειγμα, αν $\alpha_n = \dfrac{n-1}{n}$ και $\alpha = 1$, είναι

$$\alpha_1 = 0 < \alpha_2 = \frac{1}{2} < \alpha_3 = \frac{2}{3} < \alpha_4 = \frac{3}{4} < \alpha_5 = \frac{4}{5} < \cdots < 1$$

Αν θεωρήσουμε τη διαφορά

$$\alpha-\alpha_n = 1-\frac{n-1}{n} = \frac{n-(n-1)}{n} = \frac{1}{n},$$

τότε για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ είναι

$$\alpha-\alpha_n < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow n > 2 \Leftrightarrow n \geq 3,$$

οπότε μπορεί να ληφθεί $n_0 = 3$.

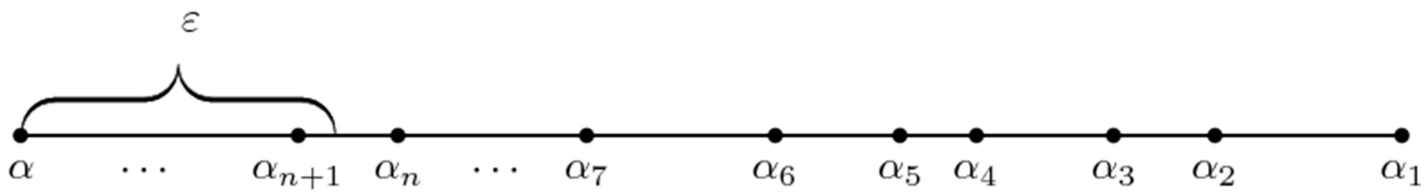
Αν όμως $\varepsilon = \frac{1}{3}$, τότε

$$\alpha-\alpha_n < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow n > 3 \Leftrightarrow n \geq 4,$$

Άρα σε αυτή την περίπτωση λαμβάνεται $n_0 = 4$.

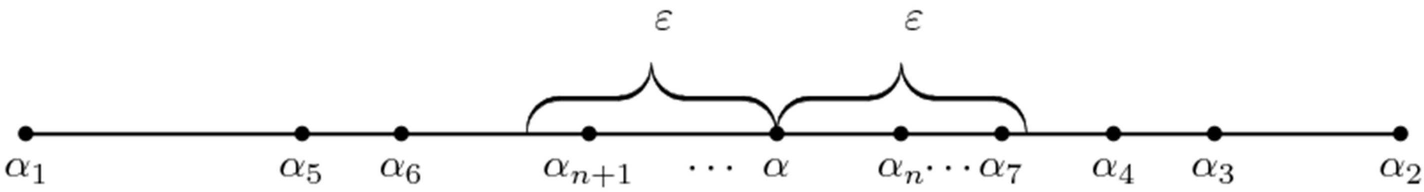
Με άλλα λόγια, το n_0 εξαρτάται κάθε φορά από το ε και για τον λόγο αυτόν σημειώνεται με $n_0 = n_0(\varepsilon)$

<u>2^{η} περίπτωση:</u> (α_n) φθίνουσα και $\alpha = \inf \alpha_n$.



Η περίπτωση αυτή είναι ανάλογη, δηλαδή για να είναι το α όριο της ακολουθίας (α_n), θα πρέπει για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_n - \alpha < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.

3^{η} περίπτωση (Γενική περίπτωση):



Εδώ, δεν γνωρίζουμε ποιο από τα α_n, α είναι μεγαλύτερο, οπότε η απόστασή τους είναι ίση με $|\alpha_n - \alpha|$, δηλαδή το α θα είναι το όριο της ακολουθίας (α_n) όταν
για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ με $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.

Ορισμός. Μια ακολουθία (α_n) **συγκλίνει** στο $\alpha \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν

> για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ με
> $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.

Ο αριθμός α είναι μοναδικός και ονομάζεται **όριο** της ακολουθίας (α_n). Όταν υπάρχει το όριο α μιας ακολουθίας (α_n) τότε σημειώνεται με $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ ή $\alpha_n \to \alpha$ και η ακολουθία ονομάζεται **συγκλίνουσα**.

Παράδειγμα
Να αποδειχθεί ότι το όριο της ακολουθίας (α_n) με $\alpha_n = \dfrac{3n+5}{2n}$ είναι το $\dfrac{3}{2}$.

Λύση.
Θεωρούμε τη διαφορά

$$\alpha_n - \frac{3}{2} = \frac{3n+5}{2n} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2n}.$$

Για $\varepsilon > 0$, ψάχνουμε $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\left|\alpha_n - \dfrac{3}{2}\right| < \varepsilon$. Όμως,

$$\left|\alpha_n - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{5}{2\varepsilon},$$

Οπότε αρκεί να επιλεχθεί $n_0 = \left[\dfrac{5}{2\varepsilon}\right] + 1$.

Κατόπιν τούτου, για $n \geq n_0 = \left[\dfrac{5}{2\varepsilon}\right] + 1 > \dfrac{5}{2\varepsilon}$ θα είναι $\left|\alpha_n - \dfrac{3}{2}\right| < \varepsilon$, και επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \dfrac{3}{2}$.

Ειδικά, αν το όριο μιας ακολουθίας είναι το μηδέν, τότε η ακολουθία ονομάζεται **μηδενική**.
Το κλασικότερο παράδειγμα μηδενικής ακολουθίας είναι η (α_n) με $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$.

Ιδιότητες

1. $\alpha_n \to \alpha \Rightarrow \alpha_{\kappa_n} \to \alpha$.

2. $\alpha_n \to \alpha \Rightarrow$ η (α_n) είναι φραγμένη.

3. $\alpha_n \to \alpha \Rightarrow |\alpha_n| \to |\alpha|$.

4. $\alpha_n \to \alpha$ και $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\alpha_n \to \lambda\alpha$.

5. $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$ και $\alpha_n \leq \beta_n$ για κάθε $n \geq n_0 \Rightarrow \alpha \leq \beta$.

6. Αν $\gamma_n \leq \alpha_n \leq \beta_n$ για κάθε $n \geq n_0$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = \alpha$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$.

Ειδικά, αν $|\alpha_n| \leq \beta_n$ για κάθε $n \geq n_0$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, διότι $-\beta_n \leq \alpha_n \leq \beta_n$ και $\lim\limits_{n\to\infty}(-\beta_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$.

7. $\alpha_n \to \alpha$ και $\beta_n \to \beta \Rightarrow \alpha_n + \beta_n \to \alpha + \beta$.

8. $\alpha_n \to \alpha$ και $\beta_n \to \beta \Rightarrow \alpha_n - \beta_n \to \alpha - \beta$.

9. $\alpha_n \to \alpha$ και $\beta_n \to \beta \Rightarrow \alpha_n \cdot \beta_n \to \alpha \cdot \beta$.

10. $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$ και $\beta_n, \beta \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} \to \dfrac{\alpha}{\beta}$.

Πρόταση 2.1

Αν μια ακολουθία διαμερίζεται σε δύο υποακολουθίες που έχουν κοινό όριο, τότε και αυτή θα έχει το ίδιο όριο.

Παράδειγμα

Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (α_n) με

$$\alpha_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2}, & \text{αν n είναι άρτιος} \\ \dfrac{1}{n}, & \text{αν n είναι περιττός} \end{cases}$$

είναι μηδενική.

Λύση. Η ακολουθία (α_n) διαμερίζεται στις υποακολουθίες (α_{2n}) και (α_{2n-1}) των άρτιων και περιττών αντίστοιχα.

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(2n)^2} = 0$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n-1} = 0$, προκύπτει σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

Πρόταση 2.2

Κάθε φραγμένη και μονότονη ακολουθία (α_n) είναι συγκλίνουσα. Επιπλέον αν είναι αύξουσα (αντ. φθίνουσα) τότε $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\alpha_n$ (αντ. $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\alpha_n$).

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Μια ακολουθία (α_n) για την οποία δίδονται ο πρώτος όρος και ένας τύπος (που ονομάζεται αναδρομικός ή αναγωγικός τύπος) υπολογισμού κάθε όρου με την βοήθεια του προηγούμενου όρου ονομάζεται **αναδρομική ακολουθία**.

Παράδειγμα. Η ακολουθία (α_n) με

$$\alpha_1 = 3 \text{ και } \alpha_{n+1} = 2\alpha_n^2 + 5\alpha_n + 1$$

είναι μια αναδρομική ακολουθία.

Γενικότερα, στις αναδρομικές ακολουθίες μπορεί κάθε όρος να δίδεται μέσω δύο ή περισσότερων προηγούμενων όρων, αλλά τότε θα πρέπει να δίδονται και περισσότερες αρχικές τιμές.

Παράδειγμα. Οι ακολουθίες (α_n) και (β_n), με

$$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = -4 \text{ και } \alpha_{n+2} = 3\alpha_{n+1} - 2\alpha_n$$

και

$$\beta_1 = -2,\ \beta_2 = 5,\ \beta_3 = 1 \text{ και } \beta_{n+3} = \frac{2\beta_{n+2} + 3\beta_{n+1} + 4\beta_n}{\sqrt{\beta_{n+2}^2 + \beta_{n+1}^2 + \beta_n^2 + 1}}$$

είναι δύο αναδρομικές ακολουθίες.
Παρατηρήστε ότι για τον προσδιορισμό του όρου α_3, απαιτούνται οι όροι α_1 και α_2. Αν δεν είναι γνωστοί και οι δύο, τότε δεν μπορεί να υπολογισθεί ο α_3, και κατά συνέπεια ούτε και οι επόμενοι όροι.

Στην παράγραφο αυτή, θα περιοριστούμε, στην απλή περίπτωση, όπου δίνεται ο α_1 και ένας αναδρομικός τύπος της μορφής $\alpha_{n+1} = f(\alpha_n)$, όπου f μια πραγματική συνάρτηση, μέσω της οποίας υπολογίζεται ο α_{n+1} συναρτήσει του α_n. Θα δοθεί μια μεθοδολογία για την ύπαρξη και τον υπολογισμό του ορίου μιας αναδρομικής ακολουθίας.

Η μεθοδολογία αυτή στηρίζεται στην Πρόταση 2.2 και αφορά αναδρομικές ακολουθίες που είναι είτε

- Άνω φραγμένες και (τελικά) αύξουσες, είτε
- Κάτω φραγμένες και (τελικά) φθίνουσες.

Στις ακολουθίες, όταν λέμε ότι μια σχέση ή μια ιδιότητα ισχύει **τελικά**, εννοούμε ότι ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, μεγαλύτερο ή ίσο από κάποιο συγκεκριμένο $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Για παράδειγμα, μια άνω φραγμένη ακολουθία μπορεί να μην είναι αύξουσα για όλους τους όρους της, αλλά να είναι αύξουσα από κάποιον δείκτη $n_0 \in \mathbb{N}^*$ και μετά. Τότε, μπορεί να εφαρμοσθεί η Πρόταση 2.2 και η ακολουθία θα είναι συγκλίνουσα.

Μεθοδολογία

Βήμα 1. (Στο πρόχειρο, δεν μεταφέρεται στο καθαρό.) Υπολογίζουμε με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου ορισμένους αρχικούς όρους της ακολουθίας, βάσει των οποίων <u>εικάζουμε</u> το είδος της μονοτονίας. Προφανώς, η διαδικασία αυτή δεν αποτελεί απόδειξη και γι' αυτό δεν μεταφέρεται στο καθαρό.

Παράδειγμα. Για την ακολουθία (α_n), με

$$\alpha_1 = 1 \text{ και } \alpha_{n+1} = \sqrt{18 + 7\alpha_n}$$

είναι $\alpha_1 = 1 < \alpha_2 = 5 < \alpha_3 = \sqrt{53} < \alpha_4 = \sqrt{18 + 7\sqrt{53}}$,

οπότε η ακολουθία είναι μάλλον αύξουσα, οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι άνω φραγμένη. Δεν γνωρίζουμε από ποιον αριθμό, για τον λόγο αυτό, στο επόμενο βήμα υπολογίζουμε το $x = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \sup \alpha_n$. Επειδή όμως δεν γνωρίζουμε ακόμα ότι υπάρχει το όριο, το βήμα αυτό δεν μεταφέρεται στο καθαρό.

Βήμα 2. (Υπολογισμός του ορίου. Θα μεταφερθεί στο καθαρό όταν αποδείξουμε ότι η ακολουθία είναι συγκλίνουσα.) Έστω $x = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$. Τότε, $x = \lim_{n\to\infty} \alpha_{n+1}$ και με τη βοήθεια της αναδρομικής σχέσης $\alpha_{n+1} = \sqrt{18 + 7\alpha_n}$, προκύπτει ότι

$$x = \lim_{n\to\infty} \alpha_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{18+7\alpha_n} = \sqrt{18+7\lim_{n\to\infty}\alpha_n} = \sqrt{18+7x}$$

Επομένως, $x^2 - 7x - 18 = 0$ και οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι οι $x = 9$ και $x = -2$. Η τελευταία ρίζα απορρίπτεται, διότι η ακολουθία είναι μη αρνητικών όρων, οπότε

αν υπάρχει το όριο, τότε αυτό θα πρέπει να είναι το

$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 9$

και αν η ακολουθία είναι όντως αύξουσα, θα πρέπει να είναι

$\sup \alpha_n = 9$

Από το σημείο αυτό, τα υπόλοιπα βήματα γίνονται στο καθαρό.

Βήμα 3. Αποδεικνύουμε (συνήθως με επαγωγή) ότι η ακολουθία είναι άνω (ή κάτω) φραγμένη από το x που υπολογίσαμε.

Βήμα 4. Αποδεικνύουμε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα (ή φθίνουσα). Εδώ συνήθως χρησιμοποιείται το φράγμα που αποδείχθηκε στο Βήμα 3. Για το λόγο αυτό τα βήματα 3 και 4 δεν μπορούν να αλλάξουν σειρά.

Βήμα 5. Επειδή η ακολουθία είναι άνω φραγμένη και αύξουσα (ή κάτω φραγμένη και φθίνουσα), όπως έχει αποδειχθεί στα βήματα 3 και 4, θα είναι συγκλίνουσα σύμφωνα με την Πρόταση 2.2. Τέλος, αντιγράφουμε στο καθαρό τον υπολογισμό του ορίου από το πρόχειρο.

ΑΣΚΗΣΗ 16

Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (α_n) με

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_{n+1} = \sqrt{18 + 7\alpha_n}\text{, για } n \in \mathbb{N}^*$$

συγκλίνει, και στη συνέχεια να ευρεθεί (υπολογιστικά και γραφικά) το όριό της.

ΛΥΣΗ

Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία (α_n) είναι άνω φραγμένη και γνήσια αύξουσα.

Αρχικά, θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι ισχύει η ανισότητα

$$\alpha_n < 9\text{, για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ισχύει ότι $\alpha_1 = 1 < 9$.

Υποτίθεται ότι η ανισότητα ισχύει για $n = \kappa$, δηλαδή $\alpha_\kappa < 9$, και θα αποδειχθεί ότι ισχύει και για $n = \kappa + 1$, δηλαδή ότι $\alpha_{\kappa+1} < 9$.

Πραγματικά, είναι

$$\alpha_{\kappa+1} < 9 \Leftrightarrow \sqrt{18 + 7\alpha_\kappa} < 9 \Leftrightarrow 18 + 7\alpha_\kappa < 81 \Leftrightarrow \alpha_\kappa < 9.$$

Άρα η (α_n) είναι άνω φραγμένη από το 9.

Θεωρούμε τη διαφορά

$$\alpha_{n+1}-\alpha_n=\sqrt{18+7\alpha_n}-\alpha_n=\frac{\left(\sqrt{18+7\alpha_n}-\alpha_n\right)\left(\sqrt{18+7\alpha_n}+\alpha_n\right)}{\left(\sqrt{18+7\alpha_n}+\alpha_n\right)}$$

$$=\frac{-\alpha_n^2+7\alpha_n+18}{\sqrt{18+7\alpha_n}+\alpha_n} \qquad (1)$$

Επειδή το τριώνυμο $\varphi(x)=-x^2+7x+18$ έχει θετική διακρίνουσα και ρίζες τους αριθμούς –2 και 9 θα είναι $\varphi(x)>0$ για κάθε $x\in(-2,9)$ και συνεπώς $\varphi(\alpha_n)>0$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$. Τότε όμως, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\alpha_{n+1}>\alpha_n, \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N}^*$$

δηλαδή η ακολουθία (α_n) είναι γνήσια αύξουσα.

Επειδή η ακολουθία (α_n) είναι άνω φραγμένη και γνήσια αύξουσα, θα είναι και συγκλίνουσα.

Έστω $x=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$. Τότε $x=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{n+1}$, οπότε

$$x=\lim_{n\to\infty}\alpha_{n+1}=\sqrt{18+7\lim_{n\to\infty}\alpha_n}=\sqrt{18+7x}.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι το όριο της (α_n) θα είναι ρίζα της εξίσωσης

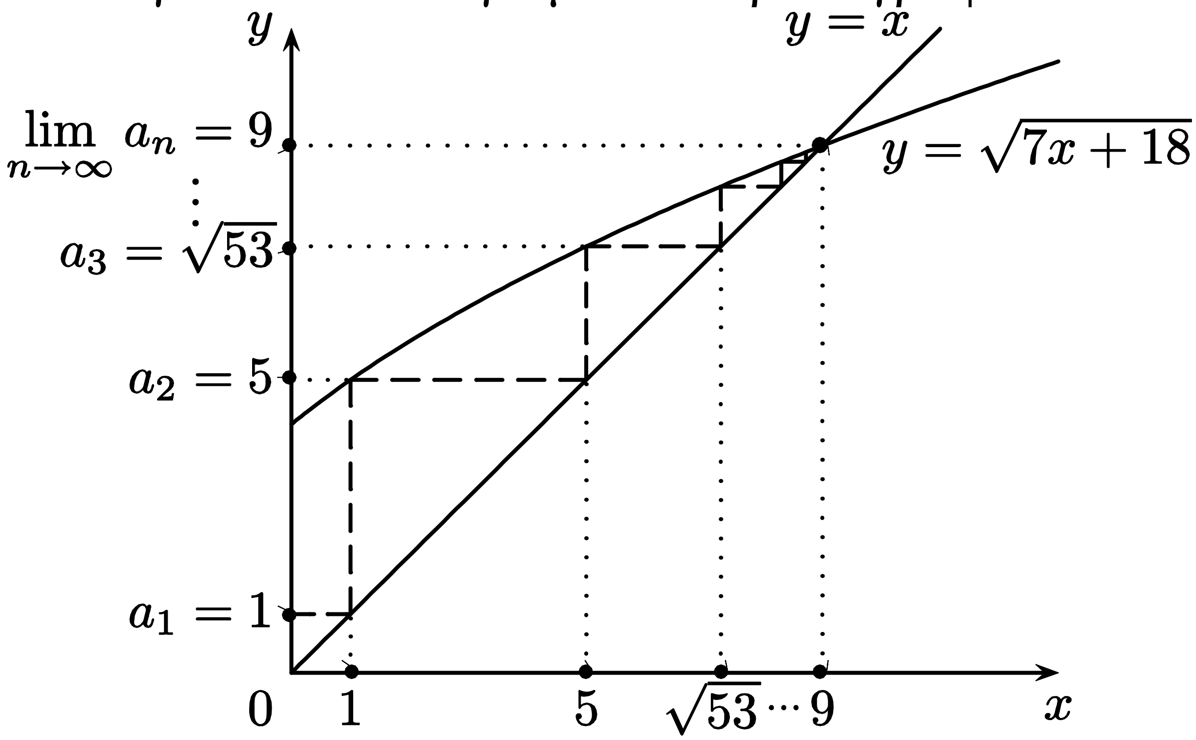
$$x^2-7x-18=0,$$

δηλαδή $x=9$, ή $x=-2$.

Η τελευταία ρίζα απορρίπτεται διότι η ακολουθία (α_n) είναι μη αρνητικών όρων, οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=9.$$

Στο επόμενο σχήμα περιγράφεται μια επαναληπτική διαδικασία για τον υπολογισμό του ορίου γραφικά.



Βήμα 1. Χαράζουμε την ευθεία y = x και την καμπύλη $y = \sqrt{18 + 7x}$

Βήμα 2. Σημειώνουμε το α_1 στον άξονα των y.

Βήμα 3. Αν έχει σημειωθεί ο όρος α_n, σημειώνεται επίσης ο όρος α_{n+1} πάνω στον άξονα y ως εξής:

Ξεκινάμε με οριζόντια ευθεία από το α_n μέχρι την ευθεία y = x. Συνεχίζουμε με κατακόρυφη ευθεία μέχρι την καμπύλη $y = \sqrt{18 + 7x}$. Τέλος, πάλι με οριζόντια ευθεία μέχρι τον άξονα των y.

Έτσι, όλοι οι όροι της ακολουθίας μαρκάρονται πάνω στον άξονα των y.

Τέλος, η τεταγμένη του σημείου τομής των y = x και $y = \sqrt{18 + 7x}$ δίδει την τιμή του ορίου, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 9$.

ΑΣΚΗΣΗ 17

Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (α_n) με

$$\alpha_1 = 4 \text{ και } \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2} + \frac{3}{2\alpha_n}, \text{ για } n \in \mathbb{N}^*$$

συγκλίνει, και στη συνέχεια να ευρεθεί (υπολογιστικά και γραφικά) το όριό της.

ΛΥΣΗ

Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία (α_n) είναι κάτω φραγμένη και γνήσια φθίνουσα.

Αρχικά, θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι ισχύει η ανισότητα $\sqrt{3} < \alpha_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Είναι $\alpha_1 = 4 > \sqrt{3}$.

Υποτίθεται ότι η ανισότητα ισχύει για $n = \kappa$, δηλαδή $\sqrt{3} < \alpha_\kappa$, και θα αποδειχθεί ότι ισχύει και για $n = \kappa + 1$, δηλαδή $\sqrt{3} < \alpha_{\kappa+1}$.

Πραγματικά, είναι

$$\alpha_{\kappa+1} - \sqrt{3} = \frac{\alpha_\kappa}{2} + \frac{3}{2\alpha_\kappa} - \sqrt{3} = \frac{\alpha_\kappa^2 - 2\sqrt{3}\alpha_\kappa + 3}{2\alpha_\kappa}$$

$$= \frac{\left(\alpha_\kappa - \sqrt{3}\right)^2}{2\alpha_\kappa} > 0$$

δηλαδή $\sqrt{3} < \alpha_{\kappa+1}$.

Άρα η ακολουθία (α_n) είναι κάτω φραγμένη από το $\sqrt{3}$. Θεωρούμε τη διαφορά

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{\alpha_n}{2} + \frac{3}{2\alpha_n} - \alpha_n = \frac{-\alpha_n^2 + 3}{2\alpha_n} < 0,$$

οπότε η ακολουθία (α_n) είναι γνήσια φθίνουσα.

Επειδή η ακολουθία (α_n) είναι κάτω φραγμένη και γνήσια φθίνουσα θα είναι και συγκλίνουσα.

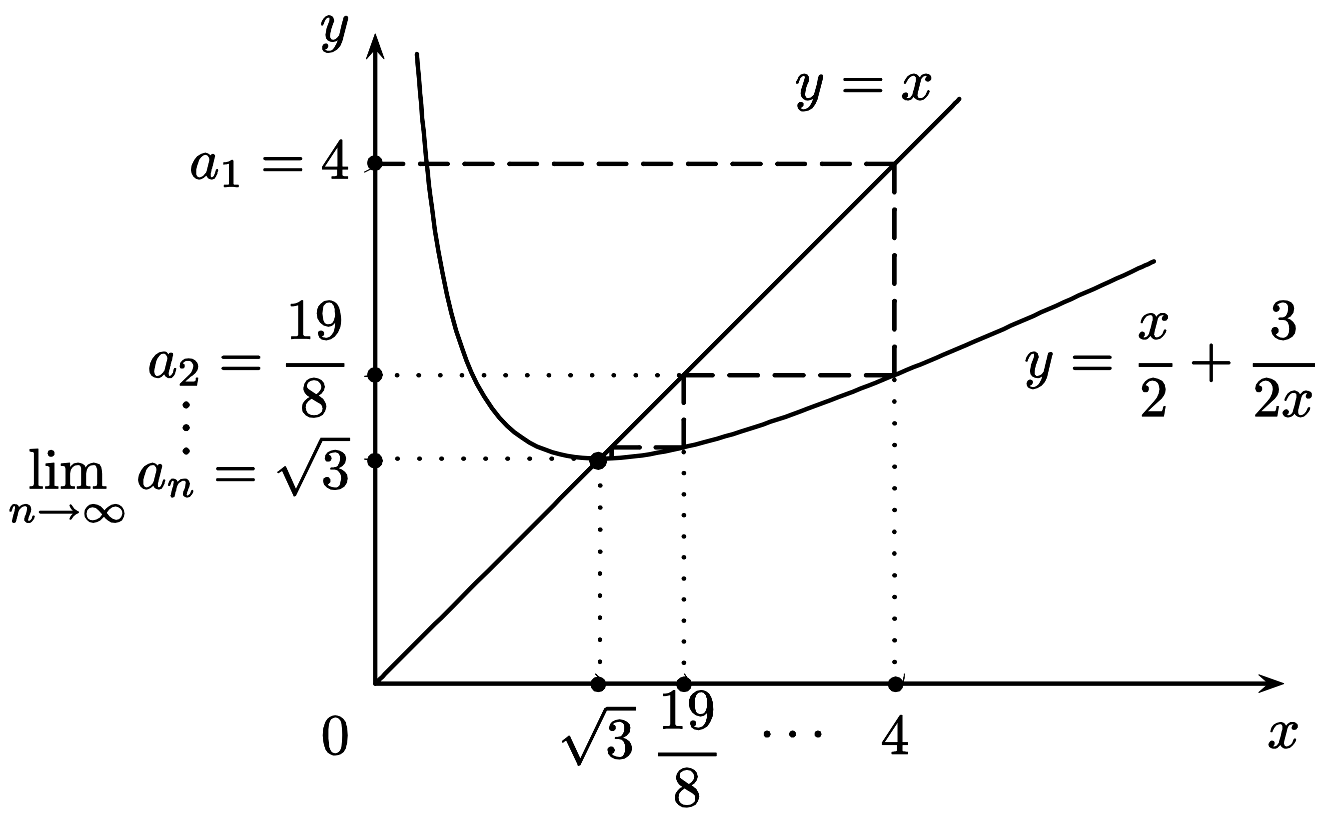
Έστω $x = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$. Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{n+1} = x$, οπότε

$$x = \lim_{n\to\infty} \alpha_{n+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n}{2} + \frac{3}{2\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n} = \frac{x}{2} + \frac{3}{2x}.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι το όριο της (α_n) θα είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 3 = 0$, δηλαδή $x = \sqrt{3}$, ή $x = -\sqrt{3}$. Η τελευταία ρίζα απορρίπτεται διότι η ακολουθία (α_n) είναι μη αρνητικών όρων, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \sqrt{3}.$$

Γραφική παράσταση του ορίου:



Το σύνολο $\overline{\mathbb{R}}$

Αν στο σύνολο $\mathbb{R}$ επισυναφθούν δύο νέα στοιχεία τα οποία ονομάζονται **άπειρα,** $-\infty$ και $+\infty$, προκύπτει το σύνολο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Οι βασικές πράξεις του $\overline{\mathbb{R}}$ ως εξής:

1. $-\infty < x < +\infty$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2. $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$.
3. $(+\infty) + x = x + (+\infty) = +\infty$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
4. $(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
5. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
6. $(+\infty) \cdot x = x \cdot (+\infty) = +\infty$ (αντ. $-\infty$) αν $x > 0$ (αντ. $x < 0$).
7. $(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty$ (αντ. $+\infty$) αν $x > 0$ (αντ. $x < 0$).
8. $\frac{x}{-\infty} = \frac{x}{+\infty} = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Στο σύνολο $\overline{\mathbb{R}}$ δεν έχουν νόημα οι πράξεις

$$+\infty + (-\infty),\ -\infty + (+\infty),$$

$$0 \cdot (\pm\infty),\ (\pm\infty) \cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{+\infty},\ \frac{\pm\infty}{-\infty},$$

γι’ αυτό και συνήθως ονομάζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

3. ΚΑΤ’ ΕΚΔΟΧΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Μια ακολουθία (α_n) **συγκλίνει κατ’ εκδοχή** προς το $+\infty$ (αντ. $-\infty$) αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_n > \frac{1}{\varepsilon}$ (αντ. $\alpha_n < -\frac{1}{\varepsilon}$), για κάθε $n \geq n_0$.

Στην περίπτωση αυτή σημειώνεται $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$ ή $\alpha_n \to +\infty$ (αντ. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = -\infty$ ή $\alpha_n \to -\infty$).

Για παράδειγμα, οι ακολουθίες (α_n), (β_n) με $\alpha_n = n^2 - n$ και $\beta_n = -n^3 + n + 5$ συγκλίνουν κατ’ εκδοχή στο $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα.

Υπάρχουν ακολουθίες που δεν συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$, αλλά ούτε συγκλίνουν κατ’ εκδοχή στο $+\infty$ ή $-\infty$. Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι οι ακολουθίες αυτές **δεν συγκλίνουν στο** $\overline{\mathbb{R}}$. Έτσι η ακολουθία (α_n) με $\alpha_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Ιδιότητες

1. $\alpha_n \to +\infty$ (αντ. $-\infty$) $\Rightarrow \alpha_{\kappa_n} \to +\infty$ (αντ. $-\infty$).

2. $\alpha_n \to +\infty$ (αντ. $-\infty$) και $\beta_n \to +\infty$ (αντ. $-\infty$) $\Rightarrow \alpha_n + \beta_n \to +\infty$ (αντ. $-\infty$).

3. $\alpha_n \to +\infty$ (αντ. $-\infty$) και $\beta_n \to \beta$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \alpha_n + \beta_n \to +\infty$ (αντ. $-\infty$).

4. $\alpha_n \to +\infty$ (αντ. $-\infty$) και $\beta_n \to \beta$, όπου $\beta \in \mathbb{R}^*$ $\Rightarrow \alpha_n\beta_n \to +\infty$ (αντ. $-\infty$) αν $\beta > 0$ και $\alpha_n\beta_n \to -\infty$ (αντ. $+\infty$) αν $\beta < 0$.

5. $\alpha_n \to +\infty$ (αντ. $-\infty$) και $\beta_n \to +\infty$ (αντ. $-\infty$) $\Rightarrow \alpha_n\beta_n \to +\infty$.

6. $\alpha_n \to +\infty$ και $\beta_n \to -\infty$ $\Rightarrow \alpha_n\beta_n \to -\infty$.

7. $\alpha_n \to \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta_n \to +\infty$ (ή $-\infty$) $\Rightarrow \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} \to 0$.

Στην κατ' εκδοχή σύγκλιση υπάρχουν περιπτώσεις που δεν ορίζονται άμεσα τα αποτελέσματα, όπως για παράδειγμα όταν $\alpha_n \to +\infty$ και $\beta_n \to -\infty$ δεν ορίζεται το όριο του αθροίσματος $\alpha_n + \beta_n$ ή όταν $\alpha_n \to +\infty$ και $\beta_n \to 0$ δεν ορίζεται το όριο του γινομένου $\alpha_n\beta_n$.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να ευρεθούν τα όρια των ακολουθιών (α_n), (β_n) και (γ_n) με

α) $$\alpha_n = \frac{8n^3 + 4n^2 - 5n + 7}{4n^3 + 10n^2 - 6n + 3},$$

β) $$\beta_n = \frac{3n^3 + 5n^2 + 6n - 2}{2n^4 + 3n^3 - 6n^2 + 11},$$

γ) $$\gamma_n = \frac{2n^3 + 4n^2 - 7n + 3}{n^2 - 5n + 12}.$$

ΛΥΣΗ

α) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8 + 4\frac{1}{n} - 5\frac{1}{n^2} + 7\frac{1}{n^3}}{4 + 10\frac{1}{n} - 6\frac{1}{n^2} + 3\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8 + 4\frac{1}{n} - 5\frac{1}{n^2} + 7\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4 + 10\frac{1}{n} - 6\frac{1}{n^2} + 3\frac{1}{n^3}\right)}$$

$$= \frac{8 + 4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} - 5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} + 7\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{4 + 10\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} - 6\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} + 3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}} = \frac{8 - 4\cdot 0 - 5\cdot 0 + 7\cdot 0}{4 + 10\cdot 0 - 6\cdot 0 + 3\cdot 0}$$

$$= 2.$$

β) $\beta_n = \dfrac{3n^3+5n^2+6n-2}{2n^4+3n^3-6n^2+11}$

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3\frac{1}{n}+5\frac{1}{n^2}+6\frac{1}{n^3}-2\frac{1}{n^4}}{2+3\frac{1}{n}-6\frac{1}{n^2}+11\frac{1}{n^4}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3\frac{1}{n}+5\frac{1}{n^2}+6\frac{1}{n^3}-2\frac{1}{n^4}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+3\frac{1}{n}-6\frac{1}{n^2}+11\frac{1}{n^4}\right)}$$

$$=\frac{3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+6\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}-2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}}{2+3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-6\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+11\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}}$$

$$=\frac{3\cdot 0+5\cdot 0+6\cdot 0-2\cdot 0}{2+3\cdot 0-6\cdot 0+11\cdot 0}=0.$$

$$\gamma) \quad \gamma_n = \frac{2n^3 + 4n^2 - 7n + 3}{n^2 - 5n + 12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n + 4 - 7\frac{1}{n} + 3\frac{1}{n^2}}{1 - 5\frac{1}{n} + 12\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n + 4 - 7\frac{1}{n} + 3\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - 5\frac{1}{n} + 12\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{2\lim\limits_{n\to\infty} n + 4 - 7\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1 - 5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 12\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{+\infty + 4 - 0 + 0}{1 - 0 + 0}$$

$$= +\infty.$$

Παρατήρηση

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της παραπάνω άσκησης προκύπτει ότι το όριο κάθε ακολουθίας (α_n) που ο γενικός της όρος είναι ρητή συνάρτηση του n, δηλαδή

$$\alpha_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

όπου $P(n)$, $Q(n)$ είναι πολυώνυμα του n, είναι

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \begin{cases} \dfrac{p}{q}, & \text{αν βαθμός } P(n) = \text{βαθμός } Q(n) \\ 0, & \text{αν βαθμός } P(n) < \text{βαθμός } Q(n) \\ \dfrac{p}{q}\cdot(+\infty), & \text{αν βαθμός } P(n) > \text{βαθμός } Q(n) \end{cases}$$

όπου p, q είναι οι συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των πολυωνύμων $P(n)$ και $Q(n)$ αντίστοιχα.

Πρόταση 3.1

Κάθε αύξουσα (αντ. φθίνουσα) και μη άνω (αντ. κάτω) φραγμένη ακολουθία συγκλίνει κατ' εκδοχή στο $+\infty$ (αντ. $-\infty$).

ΔΙΑΛΕΞΗ 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Ειδικές ακολουθίες

4. ΕΙΔΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

1. Η ακολουθία $\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{n}}\right)$, όπου $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$

Αποδεικνύεται ότι η ακολουθία αυτή είναι συγκλίνουσα στο $\overline{\mathbb{R}}$ αν και μόνο αν $\alpha \in (-1, +\infty)$ με

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \begin{cases} 0, & \text{αν } |\alpha| < 1 \\ 1, & \text{αν } \alpha = 1 \\ +\infty, & \text{αν } \alpha > 1. \end{cases}$$

2. Η ακολουθία $\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{\alpha}}\right)$ όπου $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$

Αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1.$

3. Η ακολουθία $\left(\sqrt[n]{\mathbf{n}}\right)$

Αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

ΑΣΚΗΣΗ 25

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία $\left(\alpha_n\right)$ με $\alpha_n = \alpha^n$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1) Αν $\alpha = 1$, τότε προφανώς $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$.

2) Αν $|\alpha| < 1$, τότε $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

Πραγματικά, αν $\alpha \neq 0$ (για $\alpha = 0$ είναι προφανές) τότε υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{|\alpha|} = 1 + \theta,$$

οπότε από την ανισότητα του Bernoulli, προκύπτει ότι

$$|\alpha_n| = |\alpha^n| = \frac{1}{(1+\theta)^n} \leq \frac{1}{1+n\theta} < \frac{1}{n\theta}.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\theta} = 0$ θα είναι και $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

3) Αν $\alpha > 1$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$.

Πραγματικά, τότε θα υπάρχει $\theta > 0$ με

$$\alpha = 1 + \theta,$$

οπότε θα είναι

$$\alpha_n = (1+\theta)^n \geq 1 + n\theta > n\theta.$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} n\theta = +\infty$, προκύπτει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$.

4) Αν $\alpha \leq -1$, τότε η ακολουθία δεν συγκλίνει στο $\overline{\mathbb{R}}$. Τούτο συμβαίνει διότι οι υποακολουθίες (α_{2n}) και (α_{2n-1}) συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια.

Πράγματι, αν $\alpha = -1$, τότε

$$\alpha_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{n άρτιος} \\ -1, & \text{n περιττός} \end{cases}$$

οπότε, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{2n} = 1 \neq -1 = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{2n-1}$.

Επιπλέον, αν $\alpha < -1$, οπότε $\alpha = -\beta$, όπου $\beta > 1$, τότε

$$\alpha_n = \begin{cases} \beta^n, & \text{n άρτιος} \\ -\beta^n, & \text{n περιττός} \end{cases}$$

οπότε, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \beta^n = +\infty \neq -\infty = \lim\limits_{n\to\infty}(-\beta^n) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{2n-1}$.

Εφαρμογή. Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία $\left(\alpha_n\right)$, με $\alpha_n = \dfrac{6\cdot 3^n - 4\lambda^n}{3^{n+1} + 2\lambda^n}$, όπου $\lambda > 0$.

Λύση. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. Αν $\lambda = 3$, τότε

$$\alpha_n = \frac{6\cdot 3^n - 4\cdot 3^n}{3^{n+1} + 2\cdot 3^n} = \frac{6-4}{3+2} = \frac{2}{5}, \text{ οπότε } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{2}{5}$$

2. Αν $\lambda > 3$, τότε

$$\alpha_n = \frac{6\cdot (3/\lambda)^n - 4}{3\cdot (3/\lambda)^n + 2},$$

οπότε $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{6\lim\limits_{n\to\infty}(3/\lambda)^n - 4}{3\lim\limits_{n\to\infty}(3/\lambda)^n + 2} = \frac{0-4}{0+2} = -2$, αφού $|3/\lambda| < 1$.

3. Αν $\lambda < 3$, τότε

$$\alpha_n = \frac{6 - 4(\lambda/3)^n}{3 + 2(\lambda/3)^n},$$

οπότε $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{6 - 4\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda/3)^n}{3 + 2\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda/3)^n} = \frac{6-0}{3+0} = 2$, αφού $|\lambda/3| < 1$.

Παρατήρηση. Αν δεν δίνεται ότι $\lambda > 0$, τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις $|\lambda| = 3, |\lambda| > 3$ και $|\lambda| < 3$.

ΑΣΚΗΣΗ 27

Να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha}=1$, για κάθε $\alpha>0$.

ΛΥΣΗ

1^{ος} Τρόπος. Για $\alpha=1$ προφανώς ισχύει.
Αν $\alpha>1$, θέτουμε

$$x_n=\sqrt[n]{\alpha}-1.$$

Τότε $x_n>0$ και $\left(1+x_n\right)^n=\alpha$.

Από την ανισότητα του Bernoulli προκύπτει ότι

$$\alpha=\left(1+x_n\right)^n\geq 1+nx_n>nx_n,$$

οπότε

$$0<x_n<\frac{\alpha}{n} \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N}^*.$$

Κατόπιν τούτου, $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ και $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha}=1$.

Αν $0<\alpha<1$ τότε $\dfrac{1}{\alpha}>1$,

οπότε θα είναι $\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{\alpha}}=1$

και επομένως $\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha}=1.$

2ος Τρόπος

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Cauchy για τους αριθμούς $\underbrace{1,1,\ldots,1}_{\text{n}-1 \text{ φορές}}$, α, προκύπτει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ότι

$$\frac{\overbrace{1+\cdots+1}^{n-1 \text{ φορές}}+\alpha}{n} \geq \sqrt[n]{\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{n-1 \text{ φορές}}\cdot\alpha} \geq \frac{n}{\underbrace{1+\cdots+1}_{n-1 \text{ φορές}}+\frac{1}{\alpha}}$$

$$\frac{n-1+\alpha}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha} \geq \frac{n}{n-1+\frac{1}{\alpha}}.$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1+\alpha}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1+\frac{1}{\alpha}} = 1,$$

έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha} = 1.$$

ΑΣΚΗΣΗ 29

Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

ΛΥΣΗ

Όπως και στην άσκηση 27, θα δοθούν δύο τρόποι επίλυσης. Ο πρώτος βασίζεται στην ανισότητα Bernoulli και ο δεύτερος στην ανισότητα Cauchy.

Σκέψεις για τον 1^{o} τρόπο. Αν προσπαθήσουμε να δουλέψουμε όπως στη λύση της άσκησης 27, θέτοντας $x_n=\sqrt[n]{n}-1$, τότε θα είναι

$$n=(1+x_n)^n\geq 1+nx_n>nx_n \qquad (1)$$

οπότε $0\leq x_n<1$, από όπου δεν προκύπτει ότι $x_n\to 0$.

Επομένως, θα πρέπει να θεωρήσουμε μια άλλη ακολουθία (θ_n), αντί της (x_n), ώστε να καταλήξουμε σε μια σχέση της μορφής $0\leq\theta_n<\dfrac{1}{n^{\lambda}}$ (όπου $\lambda>0$).

Για το σκοπό αυτό, θα πρέπει, η αντίστοιχη σχέση (1) για τη (θ_n) να είναι

$$n^{1-\lambda}=(1+\theta_n)^n\geq 1+n\theta_n>n\theta_n$$

Με άλλα λόγια, πρέπει να ορίσουμε $\theta_n=\sqrt[n]{n^{1-\lambda}}-1=n^{\frac{1-\lambda}{n}}-1$.

Για απλούστευση, επιλέγουμε $\lambda = 1/2$ και ορίζουμε

$$\theta_n=\sqrt[2n]{n}-1=n^{\frac{1}{2n}}-1.$$

$1^{ος}$ Τρόπος

Για κάθε $n \geq 2$, επειδή $\sqrt[2n]{n} > 1$ θα υπάρχει $\theta_n > 0$ με $\sqrt[2n]{n} = 1 + \theta_n$. Τότε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Bernoulli προκύπτει ότι

$$\sqrt{n} = (1+\theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n > n\theta_n.$$

Άρα,

$$0 < \theta_n < \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ για κάθε } n \geq 2,$$

οπότε $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0$.

Είναι όμως $\sqrt[n]{n} = (1+\theta_n)^2 = 1 + 2\theta_n + \theta_n^2$, οπότε προκύπτει ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$2^{ος}$ Τρόπος

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Cauchy για τους αριθμούς $1,1,\ldots,1$ ($n-2$ φορές), $\sqrt{n}, \sqrt{n}$, όπου $n \geq 2$, προκύπτει ότι

$$\frac{n-2+2\sqrt{n}}{n} > \sqrt[n]{\sqrt{n}\sqrt{n}}.$$

Άρα $1 < \sqrt[n]{n} < 1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Επειδή $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1$, προκύπτει ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 30

Να ευρεθεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4n^3+3n^2+5n+3}.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή

$$\sqrt[n]{3}\le\sqrt[n]{4n^3+3n^2+5n+3}\le\sqrt[n]{15n^3}$$

και

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1,$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{15n^3}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{15}\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)^3=1\cdot1^3=1,$

προκύπτει ότι $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4n^3+3n^2+5n+3}=1.$

4. Η ακολουθία $(\boldsymbol{\alpha_n})$ με $\boldsymbol{\alpha_{n+1} = \beta\alpha_n + \gamma}$ και $\boldsymbol{\alpha_1 = \alpha}$, όπου $\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}}$

Η ακολουθία αυτή συναντάται σε πολλά υποδείγματα της δυναμικής Οικονομικής και παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη διερεύνησή της:

- Για $\beta = 1$ και $\gamma = 0$, η (α_n) είναι σταθερή.
- Για $\beta = 1$ και $\gamma \neq 0$, η (α_n) είναι μια αριθμητική πρόοδος, οπότε $\alpha_n = \alpha + (n-1)\gamma$ και
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \begin{cases} +\infty, \text{αν } \gamma > 0 \\ -\infty, \text{αν } \gamma < 0. \end{cases}$$
- Για $\beta \neq 1$ και $\gamma = 0$, η ακολουθία (α_n) είναι μια γεωμετρική πρόοδος, οπότε $\alpha_n = \alpha\beta^{n-1}$ και
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \begin{cases} 0, \ \text{αν } |\beta| < 1 \\ +\infty, \text{αν } \beta > 1 \text{ και } \alpha > 0 \\ -\infty, \text{αν } \beta > 1 \text{ και } \alpha < 0. \end{cases}$$
- Τέλος, στη γενική περίπτωση όπου $\beta \neq 1$ και $\gamma \neq 0$, αποδεικνύεται ότι
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{1-\beta}, \quad \text{αν } |\beta| < 1 \text{ ή } \mu = 0 \\ +\infty, \text{αν } \beta > 1 \text{ και } \mu > 0 \\ -\infty, \text{αν } \beta > 1 \text{ και } \mu < 0. \end{cases}$$

όπου $\mu = \alpha - \dfrac{\gamma}{1-\beta}$.

ΑΣΚΗΣΗ 31

Να ευρεθεί ο τύπος της ακολουθίας (α_n) που ορίζεται από την αναδρομική σχέση

$$\alpha_{n+1} = \beta\alpha_n + \gamma,$$

όταν $\alpha_1 = \alpha$, $\gamma \neq 0$ και $\beta \neq 1$. Στη συνέχεια να μελετηθεί η ακολουθία αυτή ως προς τη σύγκλιση για τις διάφορες πραγματικές τιμές των α, β, γ.

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι

$$\alpha_2 = \beta\alpha_1 + \gamma = \beta\alpha + \gamma\frac{1-\beta}{1-\beta},$$

$$\alpha_3 = \beta\alpha_2 + \gamma = \beta(\beta\alpha + \gamma) + \gamma = \beta^2\alpha + \gamma(1+\beta) = \beta^2\alpha + \gamma\frac{1-\beta^2}{1-\beta},$$

$$\alpha_4 = \beta\alpha_3 + \gamma = \beta\left[\beta^2\alpha + \gamma(1+\beta)\right] + \gamma = \beta^3\alpha + \gamma\left(1+\beta+\beta^2\right)$$

$$= \beta^3\alpha + \gamma\frac{1-\beta^3}{1-\beta}.$$

Θα αποδειχθεί επαγωγικά η σχέση

$$\alpha_n = \beta^{n-1}\alpha + \gamma\frac{1-\beta^{n-1}}{1-\beta} \qquad (1)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Προφανώς, ισχύει για $n = 1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = \kappa$, δηλαδή $\alpha_\kappa = \beta^{\kappa-1}\alpha + \gamma\dfrac{1-\beta^{\kappa-1}}{1-\beta}$ και θα αποδειχθεί για $n = \kappa + 1$, δηλαδή

$$\alpha_{\kappa+1}=\beta^{\kappa}\alpha+\gamma\frac{1-\beta^{\kappa}}{1-\beta}.$$

Πραγματικά, είναι

$$\alpha_{\kappa+1}=\beta\alpha_{\kappa}+\gamma=\beta\left(\beta^{\kappa-1}\alpha+\gamma\frac{1-\beta^{\kappa-1}}{1-\beta}\right)+\gamma$$

$$=\beta^{\kappa}\alpha+\gamma\frac{\left(1-\beta^{\kappa-1}\right)\beta+\left(1-\beta\right)}{1-\beta}$$

$$=\beta^{\kappa}\alpha+\gamma\frac{\beta-\beta^{\kappa}+1-\beta}{1-\beta}$$

$$=\beta^{\kappa}\alpha+\gamma\frac{1-\beta^{\kappa}}{1-\beta}.$$

Επομένως η σχέση (1) ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$, οπότε θα είναι

$$\alpha_n=\beta^{n-1}\mu+\nu,$$

όπου $\mu=\alpha-\dfrac{\gamma}{1-\beta}$ και $\nu=\dfrac{\gamma}{1-\beta}$.

Άρα η ακολουθία $\left(\alpha_n\right)$ συγκλίνει στο $\overline{\mathbb{R}}$ αν και μόνο αν $\mu=0$, ή $\beta\in\left(-1,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

Συγκεκριμένα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\begin{cases}\dfrac{\gamma}{1-\beta}, & \text{αν } |\beta|<1 \text{ ή } \dfrac{\gamma}{1-\beta}=\alpha\\ +\infty, & \text{αν } \beta>1 \text{ και } \dfrac{\gamma}{1-\beta}<\alpha\\ -\infty, & \text{αν } \beta>1 \text{ και } \dfrac{\gamma}{1-\beta}>\alpha.\end{cases}$$

5.**Οι ακολουθίες** $\boldsymbol{\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ **και** $\boldsymbol{\beta_n = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{1}{\kappa!}}$

Οι ακολουθίες αυτές είναι γνήσια αύξουσες και φραγμένες, οπότε συγκλίνουν. Αποδεικνύεται επιπλέον ότι είναι ισοσυγκλίνουσες. Το κοινό τους όριο συμβολίζεται με e και είναι ο γνωστός αριθμός του Euler που αποτελεί τη βάση των λογαρίθμων του Napier.

Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός e είναι άρρητος και υπολογίζεται κατά προσέγγιση ότι

$$e = 2,718281828459045235\ldots$$

Τέλος, όπως απέδειξε ο Hermite ο αριθμός e είναι υπερβατικός, δηλαδή δεν υπολογίζεται με τη βοήθεια αλγεβρικών εξισώσεων με συντελεστές ακέραιους.

ΑΣΚΗΣΗ 33

Να ευρεθούν τα όρια των ακολουθιών (x_n), (y_n) και (z_n) με

α) $x_n = \left(1+\frac{1}{5n}\right)^n$,

β) $y_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$,

γ) $z_n = \left(1+\frac{2}{3n}\right)^n$.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ τότε είναι

$$x_n = \left(\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}\right)^{\frac{1}{5}} = \alpha_{5n}^{\frac{1}{5}}.$$

$$y_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n+2} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^2 \frac{n+1}{n+2}$$

$$= \alpha_{n+2}\alpha_{n+1}\alpha_n \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^2 \frac{n+1}{n+2}$$

και

$$z_n = \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^n \left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n$$

$$= \left(\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{3n+1} \left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{3n}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \alpha_{3n+1}^{\frac{1}{3}} \alpha_{3n}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Επομένως, επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = e$ προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_{5n}^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}},$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \left(\lim_{n\to\infty} \alpha_{n+2}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \alpha_{n+1}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n\right) \times$$

$$\times \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$= e \cdot e \cdot e \cdot 1 \cdot 1$$

$$= e^3$$

και

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \left(\lim_{n\to\infty} \alpha_{3n+1}^{\frac{1}{3}}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \alpha_{3n}^{\frac{1}{3}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= e^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{3}} \cdot 1$$

$$= e^{\frac{2}{3}}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 34

Να ευρεθούν τα όρια των ακολουθιών (x_n), (y_n) και (z_n), με $x_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$, $\quad y_n = \left(1-\dfrac{3}{n}\right)^n$, $\quad z_n = \left(1-\dfrac{2}{3n}\right)^n$.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $\alpha_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ τότε είναι

$$x_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}}\frac{n-1}{n} = \alpha_{n-1}^{-1}\frac{n-1}{n},$$

$$y_n = \left(\frac{n-3}{n}\right)^n = \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^n\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$= \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^{n-2}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\left(\frac{n-3}{n-2}\right)^2\frac{n-2}{n-1}$$

$$= x_{n-2}x_{n-1}x_n\left(\frac{n-3}{n-2}\right)^2\frac{n-2}{n-1}$$

και

$$z_n = \left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^n\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^n$$

$$= \left(\left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^{3n-1}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{3n}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^{\frac{1}{3}} = x_{3n-1}^{\frac{1}{3}}x_{3n}^{\frac{1}{3}}\left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_{n-1}^{-1} \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = e^{-1} \cdot 1 = e^{-1},$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} y_n &= \left(\lim_{n\to\infty} x_{n-2}\right)\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right)\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n-2}\right)^2\right)\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n-1}\\ &= e^{-1}\cdot e^{-1}\cdot e^{-1}\cdot 1\cdot 1\\ &= e^{-3}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} z_n &= \left(\lim_{n\to\infty} x_{3n-1}^{\frac{1}{3}}\right)\left(\lim_{n\to\infty} x_{3n}^{\frac{1}{3}}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n-1}\right)^{\frac{1}{3}}\\ &= e^{-\frac{1}{3}}\cdot e^{-\frac{1}{3}}\cdot 1\\ &= e^{-\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

Παρατήρηση

Χρησιμοποιώντας την τεχνική που χρησιμοποιήθηκε στη λύση των προηγούμενων δύο ασκήσεων μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\kappa}{n}\right)^n = e^{\kappa}$$

για κάθε $\kappa \in \mathbb{Q}$. Γενικότερα, χρησιμοποιώντας τα όρια των συναρτήσεων αποδεικνύεται ότι η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

ΔΙΑΛΕΞΗ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Σημεία συσσωρεύσεως

Κριτήρια σύγκλισης

5.ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΕΩΣ

Σημείο συσσωρεύσεως μιας ακολουθίας (α_n) ονομάζεται κάθε αριθμός $\alpha \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει: Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}^*$ με $m \geq n$ και $|\alpha_m - \alpha| < \varepsilon$, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ για άπειρο πλήθος όρων της ακολουθίας.

Παρατηρήσεις

1. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, τότε η ανισότητα $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ τελικά (δηλαδή για κάθε $n \geq n_0$), οπότε και για άπειρο πλήθος όρων, το οποίο σημαίνει ότι το όριο α της ακολουθίας είναι και (το μοναδικό) σημείο συσσωρεύσεως αυτής.

Αντίθετα, αν το α είναι σημείο συσσωρεύσεως της ακολουθίας, τότε δεν είναι κατ' ανάγκη όριο αυτής, διότι η ανισότητα τότε ισχύει για άπειρο πλήθος όρων αλλά όχι κατ' ανάγκη τελικά, δηλαδή για ΟΛΟΥΣ τους όρους α_n με $n \geq n_0$.

Για παράδειγμα, αν $\alpha_n = (-1)^n$ και α = 1, τότε

n άρτιος $\Rightarrow |\alpha_n - 1| = |(-1)^n - 1| = 0 < \varepsilon$, για κάθε $\varepsilon > 0$,

δηλαδή η ανισότητα ισχύει για άπειρο πλήθος όρων, δεν ισχύει όμως τελικά, αφού για ε=1, και n περιττό, είναι

n περιττός $\Rightarrow |\alpha_n - 1| = |(-1)^n - 1| = 2 > 1 = \varepsilon$.

2. Μια ακολουθία μπορεί να έχει περισσότερα από ένα σημεία συσσωρεύσεως. Έτσι, η ακολουθία $\left(\alpha_n\right)$ με $\alpha_n = \left(-1\right)^n$ έχει δύο σημεία συσσωρεύσεως, τους αριθμούς 1 και -1.

3. Το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας είναι το μοναδικό σημείο συσσωρεύσεώς της.

Πράγματι, αν $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$ και β σημείο συσσωρεύσεως, τότε, από τον ορισμό του ορίου, για κάθε ε > 0 υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, ώστε να ισχύει

$$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon, \text{ για κάθε } n \geq n_0,$$

και, από τον ορισμό του σημείου συσσωρεύσεως, ισχύει

$$|\alpha_n - \beta| < \varepsilon, \text{ για άπειρα } n.$$

Επομένως, θα υπάρχει $n \geq n_0$, για το οποίο θα ισχύουν ταυτόχρονα οι δύο παραπάνω ανισότητες, οπότε

$$|\alpha - \beta| = |(\alpha_n - \beta) - (\alpha_n - \alpha)| \leq |\alpha_n - \beta| + |\alpha_n - \alpha| < 2\varepsilon$$

Κατόπιν τούτων, επειδή ο αριθμός $\dfrac{|\alpha-\beta|}{2} \geq 0$ είναι μικρότερος από κάθε ε > 0, θα ισχύει ότι $\dfrac{|\alpha-\beta|}{2} = 0$, και επομένως α = β.

4. Υπάρχουν ακολουθίες που δεν έχουν σημεία συσσωρεύσεως. Έτσι, η ακολουθία $\left(\alpha_n\right)$ με $\alpha_n = n^2$ δεν έχει σημεία συσσωρεύσεως.

Πρόταση 5.1

Για κάθε ακολουθία (α_n) **και** $\alpha \in \mathbb{R}$ **ισχύει ότι το α είναι σημείο συσσωρεύσεώς της** (α_n) **αν και μόνο αν υπάρχει υποακολουθία της** (α_n) **που συγκλίνει στο α.**

Πρόταση 5.2

Αν μια ακολουθία (α_n) **διαμερίζεται σε κ συγκλίνουσες υποακολουθίες, τότε τα όριά τους είναι τα μοναδικά σημεία συσσωρεύσεως της** (α_n)**.**

Πρόταση 5.3 (Bolzano-Weierstrass)

Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσωρεύσεως.

Παρακάτω, δίδεται μια αναλυτική κατασκευή ενός τουλάχιστον σημείου συσσωρεύσεως μιας φραγμένης ακολουθίας (α_n):

Αρχικά ορίζονται οι ακολουθίες (β_n) και (γ_n) με γενικούς όρους

$$\beta_n = \sup_{m\geq n} \alpha_m \text{ και } \gamma_n = \inf_{m\geq n} \alpha_m .$$

δηλαδή

$$\beta_n = \sup(\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots) \text{ και } \gamma_n = \inf(\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots).$$

Για παράδειγμα,

$$\beta_1 = \sup(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) , \qquad \gamma_1 = \inf(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$$
$$\beta_2 = \sup(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots) , \qquad \gamma_2 = \inf(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots)$$
$$\beta_3 = \sup(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \ldots) , \qquad \gamma_3 = \inf(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \ldots)$$

Προφανώς ισχύει $\gamma_n \leq \alpha_n \leq \beta_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι ακολουθίες (β_n) και (γ_n) είναι μονότονες (συγκεκριμένα η (β_n) είναι φθίνουσα και η (γ_n) είναι αύξουσα) και φραγμένες. Κατόπιν τούτου, θα είναι και συγκλίνουσες.

Επιπλέον, θα ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \beta_n \text{ και } \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \gamma_n .$$

Το όριο της ακολουθίας (β_n) ονομάζεται **limes superior (άνω πέρας)** της (α_n) και σημειώνεται με $\limsup \alpha_n$. Αντίστοιχα, το όριο της ακολουθίας (γ_n) ονομάζεται **limes inferior (κάτω πέρας)** της (α_n) και σημειώνεται με $\liminf \alpha_n$.

Έτσι, προκύπτουν τελικά οι σχέσεις

$$\limsup \alpha_n = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \sup_{m\geq n} \alpha_m \text{ και } \liminf \alpha_n = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \inf_{m\geq n} \alpha_m .$$

Τα limes superior και limes inferior μιας ακολουθίας (α_n), όχι κατ' ανάγκη φραγμένης, ορίζονται επίσης από τους παραπάνω τύπους, αλλά στη γενική περίπτωση δεν είναι κατ' ανάγκη πραγματικοί αριθμοί (όπως στην περίπτωση της φραγμένης ακολουθίας), αλλά ανήκουν στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Παράδειγμα Δίνεται η ακολουθία (α_n) με

$$\alpha_n = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{n}, & \text{αν n περιττός} \\ \dfrac{1}{n^2}, & \text{αν n άρτιος.} \end{cases}$$

Τότε, είναι

$$\beta_n = \sup_{m\geq n} \alpha_m = \sup_{m\geq n} \left\{ 1+\frac{1}{m} : \text{m περιττός} \right\}$$

$$= \begin{cases} 1+\dfrac{1}{n}, & \text{αν n περιττός} \\ 1+\dfrac{1}{n+1}, & \text{αν n άρτιος.} \end{cases}$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_{2n-1} = 1$ έπεται ότι

$$\limsup \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 1.$$

Επιπλέον, είναι

$$\gamma_n = \inf_{m\geq n} \alpha_m = \inf_{m\geq n} \left\{ \frac{1}{m^2} : \text{m άρτιος} \right\} = 0,$$

οπότε $\liminf \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0.$

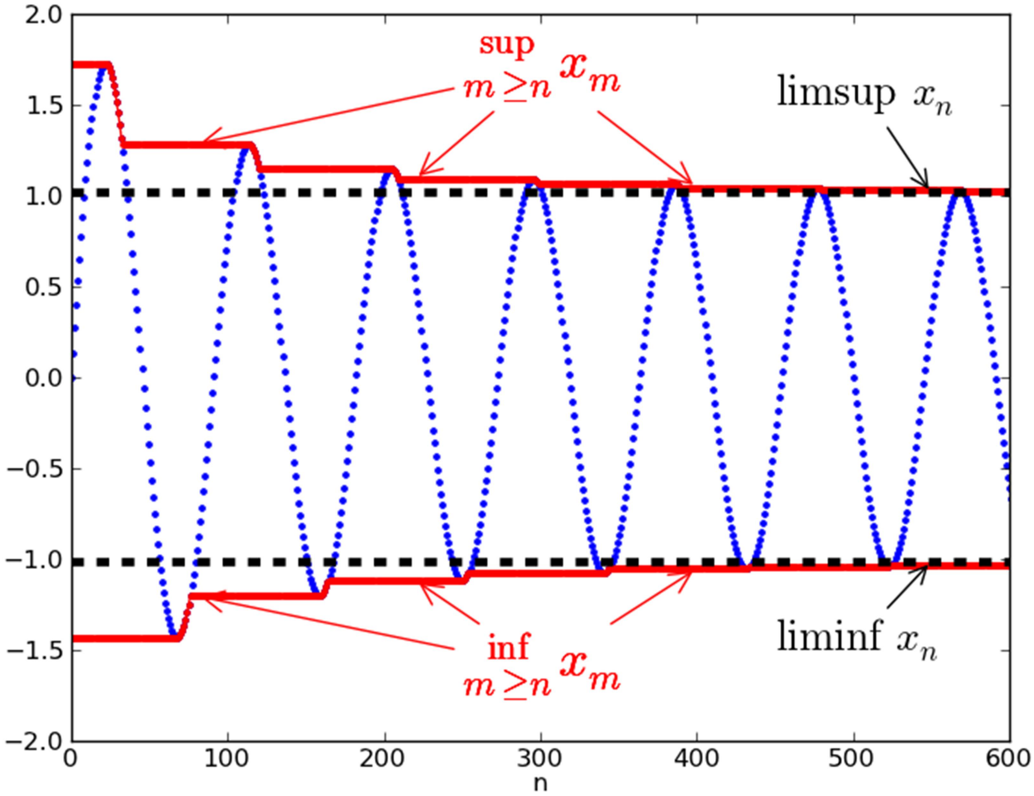
Πρόταση 5.4

Το limes superior (αντ. limes inferior) μιας φραγμένης ακολουθίας (α_n) είναι το μέγιστο (αντ. ελάχιστο) σημείο συσσωρεύσεώς της.

Πρόταση 5.5

Αν μια ακολουθία (α_n) είναι φραγμένη και $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ αν και μόνο αν $\limsup \alpha_n = \alpha = \liminf \alpha_n$.

Από τις προηγούμενες δύο προτάσεις προκύπτει ότι αν μια ακολουθία (α_n) έχει μοναδικό σημείο συσσωρρεύσεως το α, τότε $\alpha_n \to \alpha$.



ΑΣΚΗΣΗ 41

Να ευρεθούν τα σημεία συσσωρεύσεως της ακολουθίας (α_n) με

$$\alpha_n = \begin{cases} \sqrt[n]{n}, & \text{αν } n = 3\rho,\ \rho \in \mathbb{N}^* \\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, & \text{αν } n = 3\rho+1,\ \rho \in \mathbb{N} \\ \dfrac{n+1}{2n}, & \text{αν } n = 3\rho+2,\ \rho \in \mathbb{N} \end{cases}$$

και στη συνέχεια να ευρεθούν τα $\limsup \alpha_n$ και $\liminf \alpha_n$.

ΛΥΣΗ

Η ακολουθία (α_n) διαμερίζεται στις τρεις υποακολουθίες (x_n), (y_n) και (z_n), με $x_n = \sqrt[3n]{3n}$, $y_n = \left(1+\dfrac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}$ και $z_n = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{3n+2}\right)$, οι οποίες συγκλίνουν αντίστοιχα στους αριθμούς 1, e και $\dfrac{1}{2}$.

Άρα σύμφωνα με την πρόταση 5.2, τα σημεία συσσωρεύσεως της ακολουθίας (α_n) θα είναι οι αριθμοί 1, e και $\dfrac{1}{2}$.

Τέλος, σύμφωνα με την πρόταση 5.4, προκύπτει ότι

$$\limsup \alpha_n = e \text{ και } \liminf \alpha_n = \frac{1}{2}.$$

Πρόταση 5.6

Για κάθε ακολουθία (α_n) θετικών αριθμών ισχύουν οι σχέσεις

(i) $\limsup \sqrt[n]{\alpha_n} \le \limsup \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$**.**

(ii) $\liminf \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \le \liminf \sqrt[n]{\alpha_n}$ **.**

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει η ανισότητα

$$\liminf \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \le \liminf \sqrt[n]{\alpha_n} \le \limsup \sqrt[n]{\alpha_n} \le \limsup \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$$

στην οποία στηρίζεται το 3^{o} κριτήριο σύγκλισης, που θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

6. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

Για τον υπολογισμό του ορίου μιας ακολουθίας, εκτός από τις ιδιότητες, συχνά χρησιμοποιούνται ορισμένα κριτήρια, τα κυριότερα των οποίων δίδονται σ' αυτή την παράγραφο.

Το πρώτο κριτήριο στηρίζεται στην έννοια της βασικής ακολουθίας.

Μια ακολουθία $\left(\alpha_n\right)$ ονομάζεται **βασική** αν και μόνο αν

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0\left(\varepsilon\right) \in \mathbb{N}^*$ με $\left|\alpha_n - \alpha_m\right| < \varepsilon$, για κάθε $m, n \geq n_0$.

Παραδείγματα

1.Η ακολουθία (α_n) με γενικό όρο, $\alpha_n = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{1}{\kappa^2}$ είναι βασική.

Πράγματι, για $m, n \in \mathbb{N}^*$ με $m > n$ είναι

$$\begin{aligned}
|\alpha_n - \alpha_m| &= \sum_{\kappa=n+1}^{m} \frac{1}{\kappa^2} \\
&< \sum_{\kappa=n+1}^{m} \frac{1}{\kappa(\kappa-1)} \\
&= \sum_{\kappa=n+1}^{m} \left(\frac{1}{\kappa-1} - \frac{1}{\kappa} \right) \\
&= \sum_{\kappa=n+1}^{m} \frac{1}{\kappa-1} - \sum_{\kappa=n+1}^{m} \frac{1}{\kappa} \\
&\overset{\lambda=\kappa-1}{=} \sum_{\lambda=n}^{m-1} \frac{1}{\lambda} - \sum_{\kappa=n+1}^{m} \frac{1}{\kappa} \overset{\kappa=\lambda}{=} \sum_{\kappa=n}^{m-1} \frac{1}{\kappa} - \sum_{\kappa=n+1}^{m} \frac{1}{\kappa} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \\
&< \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Κατόπιν τούτου, για $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}^*$, είναι

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$$

οπότε αν τεθεί $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, προκύπτει ότι $|\alpha_n - \alpha_m| < \frac{1}{n} < \varepsilon$, για κάθε $m, n \in \mathbb{N}^*$ με $m > n \geq n_0$, και επομένως η ακολουθία (α_n) είναι βασική.

2. Για την ακολουθία (α_n) με γενικό όρο $\alpha_n=\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{1}{\kappa}$ να αποδειχθεί η ανισότητα $|\alpha_{2n}-\alpha_n|\geq\frac{1}{2}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$, και στη συνέχεια να αποδειχθεί ότι δεν είναι βασική.

Λύση. Για $n\in\mathbb{N}^*$, είναι

$$
\begin{aligned}
|\alpha_{2n}-\alpha_n| &= \sum_{\kappa=1}^{2n}\frac{1}{\kappa}-\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{1}{\kappa}=\sum_{\kappa=n+1}^{2n}\frac{1}{\kappa}\\
&\geq \sum_{\kappa=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}\\
&=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Η ακολουθία δεν είναι βασική, αφού για $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ και $m=2n$ ισχύει

$$|\alpha_m-\alpha_n|\geq\frac{1}{2}>\varepsilon$$

ΑΣΚΗΣΗ 42

Να αποδειχθεί ότι κάθε βασική ακολουθία (α_n) είναι φραγμένη.

ΛΥΣΗ

Εφαρμόζοντας τον ορισμό της βασικής ακολουθίας για $\varepsilon = 1$, προκύπτει ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ με

$$|\alpha_n| - |\alpha_{n_0}| \leq |\alpha_n - \alpha_{n_0}| \leq 1$$

για κάθε $n \geq n_0$.

Αν εκλεγεί $M = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \cdots, |\alpha_{n_0-1}|, |\alpha_{n_0}| + 1\}$, τότε θα είναι $|\alpha_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και επομένως η ακολουθία (α_n) είναι φραγμένη.

1^o Κριτήριο (Cauchy)

Κάθε ακολουθία είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι βασική.

Το κριτήριο του Cauchy είναι πολύ χρήσιμο διότι μας επιτρέπει να συμπεραίνουμε αν μια ακολουθία συγκλίνει, χωρίς να γνωρίζουμε το όριό της.

ΑΣΚΗΣΗ 43

Να αποδειχθεί το κριτήριο του Cauchy.

ΛΥΣΗ

Αν (α_n) είναι μια συγκλίνουσα ακολουθία με $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$, τότε για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}^*$ με

$$|\alpha_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ για κάθε } n\geq n_0.$$

Αν ληφθεί $n\geq n_0$ και $m\geq n_0$ θα είναι

$$|\alpha_m-\alpha_n|\leq|\alpha_n-\alpha|+|\alpha_m-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

δηλαδή η ακολουθία (α_n) είναι βασική.

Αντίστροφα, αν η ακολουθία (α_n) είναι βασική τότε θα αποδειχθεί ότι είναι συγκλίνουσα. Καταρχήν, σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση προκύπτει ότι η (α_n) είναι φραγμένη οπότε θα υπάρχει ένα σημείο συσσωρεύσεως α της (α_n).

Θα αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$:

Επειδή το α είναι σημείο συσσωρεύσεως της ακολουθίας (α_n), για $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}^*$ θα υπάρχει $m \in \mathbb{N}^*$ με

$$m \geq n \text{ και } |\alpha_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

Επιπλέον, επειδή η ακολουθία (α_n) είναι βασική, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ με

$$|\alpha_m - \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ για κάθε } m, n \geq n_0 \qquad (2)$$

Άρα για $n \geq n_0$ υπάρχει $m \geq n$ που ικανοποιεί τη σχέση (1) οπότε, χρησιμοποιώντας και τη σχέση (2), προκύπτει ότι

$$|\alpha_n - \alpha| \leq |\alpha_m - \alpha| + |\alpha_m - \alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

δηλαδή $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

2^{o} Κριτήριο (μηδενικής ακολουθίας)

Αν για μια ακολουθία (α_n) με μη μηδενικούς όρους ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|=\lambda$ με $\lambda<1$, τότε η ακολουθία αυτή είναι μηδενική.

ΑΣΚΗΣΗ 47

Να ευρεθούν τα όρια των ακολουθιών (α_n), (β_n), (γ_n) με

$$\alpha_n=\frac{1}{n!}\cdot 4^n,\qquad \beta_n=(-1)^n\cdot\frac{n^3}{2^n},\qquad \gamma_n=\frac{n!}{n^n},\qquad n\in\mathbb{N}^*.$$

ΛΥΣΗ

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{4^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n+1}=0<1.$$

Επομένως, σύμφωνα με το δεύτερο κριτήριο της σύγκλισης των ακολουθιών, $\alpha_n\to 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=\frac{1}{2}<1.$$

Επομένως, $\beta_n\to 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1.$$

Επομένως, $\gamma_n\to 0$.

3^o Κριτήριο

Αν για μια ακολουθία (α_n) θετικών όρων υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$ το

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n},$$

τότε θα υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$ και το

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_n}$$

και μάλιστα

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 48

Να ευρεθούν τα όρια των ακολουθιών (α_n), (β_n) και (γ_n) με

α) $\alpha_n = \sqrt[n]{5n^3 + 6n^2 + 7n + 11}$, β) $\beta_n = \sqrt[n]{\dfrac{(n+1)^n}{n!}}$,

γ) $\gamma_n = \sqrt[n]{\dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}}$.

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $x_n = 5n^3 + 6n^2 + 7n + 11$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)^3 + 6(n+1)^2 + 7(n+1) + 11}{5n^3 + 6n^2 + 7n + 11} = 1.$$

Αλλά τότε, από το τρίτο κριτήριο της σύγκλισης των ακολουθιών, προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1.$$

β) $\beta_n = \sqrt[n]{\dfrac{(n+1)^n}{n!}}$.

Θέτουμε $x_n = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$,

οπότε

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{(n+1)^n}{n!}} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

και συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e.$$

Αλλά τότε, η ακολουθία $\left(\sqrt[n]{x_n}\right)$ θα συγκλίνει, και μάλιστα θα ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = e.$$

γ) $\gamma_n = \sqrt[n]{\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}}$.

Θέτουμε $x_n = \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}$

και συνεπώς,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 5\cdots(3n+2)}}{\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}} = \frac{2n+1}{3n+2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{3}.$$

Αλλά τότε, η ακολουθία $\left(\sqrt[n]{x_n}\right)$ θα συγκλίνει, και μάλιστα θα ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{3}.$$

4ο Κριτήριο (Stolz)

Αν για μια ακολουθία (α_n) και μια γνήσια αύξουσα και μη φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών (A_n) υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$ το

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{A_{n+1}-A_n},$$

τότε θα υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$ και το $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{A_n}$ και μάλιστα

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{A_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{A_{n+1}-A_n}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 49

Δίδεται μια ακολουθία (x_n) με $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$ και μια ακολουθία (ν_n) με $\nu_n \in \mathbb{N}^*$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_n x_n}{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n} = x.$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε

$$\alpha_n = \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_n x_n,$$
$$A_n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n$$

και σχηματίζουμε το λόγο

$$\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{A_{n+1} - A_n} = \frac{(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_{n+1} x_{n+1}) - (\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_n x_n)}{(\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n + \nu_{n+1}) - (\nu_1 + \nu_2 + \cdots \nu_n)}$$

$$= \frac{\nu_{n+1} x_{n+1}}{\nu_{n+1}} = x_{n+1}.$$

Σύμφωνα με το κριτήριο του Stolz, ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{A_{n+1} - A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{A_n},$$

οπότε $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_n x_n}{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$

Παρατήρηση Αν εφαρμοσθεί η προηγούμενη άσκηση με $\nu_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε προκύπτει το γνωστό **θεώρημα του Césaro**:

Αν $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ **τότε** $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = x$.

ΑΣΚΗΣΗ 52

Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1.$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε

$$\alpha_n=1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n},$$
$$A_n=n$$

και σχηματίζουμε το λόγο

$$\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{A_{n+1}-A_n}=\frac{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n+1]{n+1}\right)-\left(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}\right)}{(n+1)-n}$$
$$=\sqrt[n+1]{n+1}.$$

Σύμφωνα με το κριτήριο του Stolz, ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{A_{n+1}-A_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{A_n},$$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{n+1}=1.$$