ΔΙΑΛΕΞΗ 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Βασικές έννοιες
Ολοκλήρωση με αντικατάσταση
Παραγοντική ολοκλήρωση
Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο Α.

Ένα από τα βασικότερα προβλήματα της Μαθηματικής Ανάλυσης είναι ο προσδιορισμός μιας συνάρτησης F/A με

$$F'(x) = f(x)$$

για κάθε $x \in A$.

Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση F ονομάζεται **παράγουσα** ή **αντιπαράγωγος** ή **αρχική συνάρτηση** της συνάρτησης f.

Το σύνολο όλων των παραγουσών συναρτήσεων μιας συνάρτησης f ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της f και σημειώνεται με $\int f(x)dx$.

Αν F είναι μια παράγουσα της f τότε κάθε συνάρτηση της μορφής $F + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, θα είναι επίσης παράγουσα της f.

Από την άλλη, αν F_1 είναι μια άλλη παράγουσα της f τότε ισχύει ότι

$$F_1'(x) = F'(x) = f(x)$$

για κάθε $x \in A$, οπότε θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ με $F_1(x) = F(x) + c$.

Το αόριστο ολοκλήρωμα αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις της μορφής $F + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Το αόριστο ολοκλήρωμα μπορεί να θεωρηθεί σαν μια συνάρτηση, ο τύπος της οποίας περιέχει όλες τις παράγουσες της f

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

όπου F είναι μια παράγουσα της f και $c \in \mathbb{R}$.

Η ολοκλήρωση και η παραγώγιση μπορούν να θεωρηθούν σαν αντίστροφες πράξεις,

$$\int f'(x)dx = f(x) + c \quad \text{και} \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Βασικές παραγωγίσεις Ι

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$

Βασικά αόριστα ολοκληρώματα

1. $\int \mathbf{x}^{\alpha}\mathbf{dx} = \dfrac{\mathbf{x}^{\alpha+1}}{\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{1}} + \mathbf{c}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. $\int \mathbf{x}^{-1}\mathbf{dx} = \mathbf{ln}|\mathbf{x}| + \mathbf{c}$.
3. $\int \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{x}}\mathbf{dx} = \dfrac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{x}}}{\mathbf{ln}\,\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{c}$, όπου $\alpha \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

   Ειδικά, $\int \mathbf{e}^{\mathbf{x}}\mathbf{dx} = \mathbf{e}^{\mathbf{x}} + \mathbf{c}$.
4. $\int \mathbf{sin\,x\,dx} = -\mathbf{cos\,x} + \mathbf{c}$.
5. $\int \mathbf{cos\,x\,dx} = \mathbf{sin\,x} + \mathbf{c}$.
6. $\int \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos}^{2}\,\mathbf{x}}\mathbf{dx} = \mathbf{tg\,x} + \mathbf{c}$.
7. $\int \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{sin}^{2}\,\mathbf{x}}\mathbf{dx} = -\mathbf{ctg\,x} + \mathbf{c}$.
8. $\int \mathbf{sinh\,x\,dx} = \mathbf{cosh\,x} + \mathbf{c}$.
9. $\int \mathbf{cosh\,x\,dx} = \mathbf{sinh\,x} + \mathbf{c}$.
10. $\int \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{cosh}^{2}\,\mathbf{x}}\mathbf{dx} = \mathbf{tgh\,x} + \mathbf{c}$.
11. $\int \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{sinh}^{2}\,\mathbf{x}}\mathbf{dx} = -\mathbf{ctgh\,x} + \mathbf{c}$.

12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$.

13. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + c$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι προηγούμενοι τύποι ισχύουν για τα $x \in \mathbb{R}$ όπου ορίζονται οι υπό ολοκλήρωση συναρτήσεις.

Ειδικά ο πρώτος τύπος ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όταν $\alpha \in \mathbb{N}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ όταν $\alpha = -n$ με $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ και τέλος για κάθε $x \in (0, +\infty)$ όταν $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Γραμμική ιδιότητα αορίστου ολοκληρώματος

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις που έχουν παράγουσα και $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\kappa^2 + \lambda^2 > 0$, τότε και η συνάρτηση $\kappa f + \lambda g$ θα έχει παράγουσα και ισχύει ότι

$$\int (\kappa f + \lambda g)(x)dx = \kappa \int f(x)dx + \lambda \int g(x)dx$$

2. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

Η **μέθοδος της αντικατάστασης** ή **αλλαγής μεταβλητής** στηρίζεται στον επόμενο τύπο:

$$\int (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy \qquad (1)$$

όπου f είναι μία συνάρτηση με παράγουσα και $y = \varphi(x)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $R(\varphi) \subseteq D(f)$.

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, εισάγεται μια καινούργια μεταβλητή $y = \varphi(x)$ και εφαρμόζεται ο παραπάνω τύπος, έτσι ώστε το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους του να είναι απλούστερο από το αρχικό.

Παραδείγματα

1. Αν εφαρμοσθεί ο τύπος (1) για $y=\varphi(x)=\alpha x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha\neq 0$ προκύπτει ότι $dy=\varphi'(x)dx=\alpha dx$ και

$$\boldsymbol{\int f(\alpha x+\beta)dx=\frac{1}{\alpha}\int f(y)dy}.$$

Για παράδειγμα, αν $f(x)=x^{100}$ και $\alpha=3$, $\beta=5$ προκύπτει ότι

$$\int(3x+5)^{100}dx=\frac{1}{3}\int y^{100}dy=\frac{1}{3}\frac{y^{101}}{101}+c=\frac{(3x+5)^{101}}{303}+c.$$

2. Αν εφαρμοσθεί ο τύπος (1) για $f(x)=\dfrac{1}{x}$ προκύπτει ότι

$$\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int f(y)dy=\int\frac{dy}{y}=\ln|y|+c$$

οπότε $$\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\ln|\varphi(x)|+c.$$

Για παράδειγμα, αν $\varphi(x)=\cos x$ τότε $\varphi'(x)=-\sin x$,

οπότε $$\int \operatorname{tg}x\,dx=-\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|+c.$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι

$$\int \operatorname{ctg}x\,dx=\ln|\sin x|+c.$$

3. Αν εφαρμοσθεί ο τύπος (1) για $y=\varphi(x)=e^x$ προκύπτει ότι $dy=e^x dx$ οπότε

$$\int f(e^x)e^x dx=\int f(y)dy.$$

Για παράδειγμα, αν $f(x)=\cos^2 x$ τότε

$$\begin{aligned}\int \cos^2(e^x)e^x dx &= \int \cos^2 y dy\\ &= \int \frac{1+\cos 2y}{2}dy\\ &= \frac{1}{2}\left(\int 1dy+\frac{1}{2}\int \cos 2y d(2y)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{2}\sin 2y\right)+c\\ &= \frac{1}{2}e^x+\frac{1}{4}\sin 2e^x+c\end{aligned}$$

3. ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Η **μέθοδος της παραγοντικής ολοκλήρωσης** ή **ολοκλήρωση κατά παράγοντες** στηρίζεται στον επόμενο τύπο

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \quad (1)$$

και εφαρμόζεται για αόριστα ολοκληρώματα γινομένων.

Έτσι, για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$I = \int f(x)h(x)dx$$

επιλέγεται μια εκ των συναρτήσεων f, h η οποία αντικαθίσταται από την παράγωγο μιας παράγουσάς της και στη συνέχεια εφαρμόζεται ο τύπος (1).

Αν τεθεί $h = g'$ τότε σύμφωνα με τον τύπο (1) θα είναι

$$I = \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Η μέθοδος αυτή έχει αξία όταν το τελευταίο ολοκλήρωμα της προηγούμενης σχέσης είναι απλούστερο του αρχικού.
Τούτο εξαρτάται από την αρχική επιλογή μιας εκ των συναρτήσεων f, h προκειμένου να εφαρμοσθεί ο τύπος (1).

1. Οι μορφές $\int p(x)e^{\alpha x+\beta}dx$, $\int p(x)\sin(\alpha x+\beta)dx$, $\int p(x)\cos(\alpha x+\beta)dx$, $\int p(x)\sinh(\alpha x+\beta)dx$, $\int p(x)\cosh(\alpha x+\beta)dx$

όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ και $p(x)$ πολυώνυμο.

Στις περιπτώσεις αυτές, τίθεται

$$e^{\alpha x+\beta} = \left(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x+\beta}\right)',$$

$$\sin(\alpha x+\beta) = \left(-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x+\beta)\right)',$$

$$\cos(\alpha x+\beta) = \left(\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x+\beta)\right)'$$

και

$$\sinh(\alpha x+\beta) = \left(\frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha x+\beta)\right)',$$

$$\cosh(\alpha x+\beta) = \left(\frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha x+\beta)\right)'$$

αντίστοιχα.

Παραδείγματα

$$1. \int (2x+1)e^{3x+7}dx = \int (2x+1)\left(\frac{1}{3}e^{3x+7}\right)' dx$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x+7} - \frac{1}{3}\int (2x+1)' e^{3x+7}dx$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x+7} - \frac{2}{3}\int e^{3x+7}dx$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x+7} - \frac{2}{9}\int e^{3x+7}d(3x+7)$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x+7} - \frac{2}{9}e^{3x+7} + c$$

$$= \frac{1}{9}(6x+1)e^{3x+7} + c.$$

$$2.\int\left(3x^2+4x+6\right)\sin 5x\,dx$$

$$=\int\left(3x^2+4x+6\right)\left(-\frac{1}{5}\cos 5x\right)'dx$$

$$=-\frac{1}{5}\left(3x^2+4x+6\right)\cos 5x+\frac{1}{5}\int\left(3x^2+4x+6\right)'\cos 5x\,dx$$

$$=-\frac{1}{5}\left(3x^2+4x+6\right)\cos 5x+\frac{2}{5}\int(3x+2)\cos 5x\,dx$$

$$=-\frac{1}{5}\left(3x^2+4x+6\right)\cos 5x+\frac{2}{25}\int(3x+2)(\sin 5x)'\,dx$$

$$=-\frac{1}{5}\left(3x^2+4x+6\right)\cos 5x+\frac{2}{25}(3x+2)\sin 5x$$

$$-\frac{2}{25}\int(3x+2)'\sin 5x\,dx$$

$$=-\frac{1}{5}\left(3x^2+4x+6\right)\cos 5x+\frac{2}{25}(3x+2)\sin 5x$$

$$-\frac{6}{25}\int\sin 5x\,dx$$

$$=-\frac{1}{5}\left(3x^2+4x+6\right)\cos 5x+\frac{2}{25}(3x+2)\sin 5x$$

$$+\frac{6}{125}\cos 5x+c$$

Πρέπει να τονισθεί ότι στην περίπτωση αυτή ο τύπος της παραγοντικής ολοκλήρωσης εφαρμόζεται n φορές, όπου n είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $p(x)$.

2. Οι μορφές $\int e^{\alpha x+\beta}\sin(\gamma x+\delta)dx$, $\int e^{\alpha x+\beta}\cos(\gamma x+\delta)dx$, $\int e^{\alpha x+\beta}\sinh(\gamma x+\delta)dx$, $\int e^{\alpha x+\beta}\cosh(\gamma x+\delta)dx$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$.

Στις περιπτώσεις αυτές, τίθεται $e^{\alpha x+\beta}=\left(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x+\beta}\right)'$ και εφαρμόζεται ο τύπος της παραγοντικής ολοκλήρωσης δύο φορές.

Παράδειγμα

Για εύρεση του ολοκληρώματος $\int e^{3x}\cos 2x dx$ τίθεται

$$I(x)=\int e^{3x}\cos 2x dx$$

οπότε είναι

$$\begin{aligned}I(x)&=\frac{1}{3}\int (e^{3x})'\cos 2x dx\\&=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x-\frac{1}{3}\int e^{3x}(\cos 2x)' dx\\&=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{3}\int e^{3x}\sin 2x dx\\&=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{9}\int (e^{3x})'\sin 2x dx\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{9}e^{3x}\sin 2x-\frac{2}{9}\int e^{3x}(\sin 2x)' dx$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{9}e^{3x}\sin 2x-\frac{4}{9}I(x).$$

Από το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει ότι

$$\frac{13}{9}I(x)=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{9}e^{3x}\sin 2x+c$$

και τελικά,

$$I(x)=\frac{1}{13}(3\cos 2x+2\sin 2x)e^{3x}+c.$$

3. Οι μορφές $\int f(x)\ln g(x)dx$, $\int f(x)\operatorname{arctg} g(x)dx$, $\int f(x)\arcsin g(x)dx$, $\int f(x)\arccos g(x)dx$

όπου $f(x)$ και $g(x)$ είναι ρητές συναρτήσεις του x.

Στις περιπτώσεις αυτές, τίθεται $f(x)=F'(x)$.

Παράδειγμα

$$\int\left(3x^2+8x+2\right)\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)dx$$

$$=\int\left(x^3+4x^2+2x\right)'\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)dx$$

$$=\left(x^3+4x^2+2x\right)\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$$

$$-\int\left(x^3+4x^2+2x\right)\left(\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\right)'dx$$

$$=\left(x^3+4x^2+2x\right)\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$$

$$-\int\left(x^3+4x^2+2x\right)\cdot\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{x^2+1}{x^2}dx$$

$$=\left(x^3+4x^2+2x\right)\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$$

$$-\int\frac{\left(x^2+4x+2\right)\left(x^2+1\right)}{x^2-1}dx$$

$$=\left(x^3+4x^2+2x\right)\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$$

$$-\int\left(\left(x^2+4x+4\right)+\frac{8x+6}{x^2-1}\right)dx$$

$$=\left(x^3+4x^2+2x\right)\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)-\frac{x^3}{3}-2x^2-4x$$

$$-\int\left(\frac{7}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\left(x^3+4x^2+2x\right)\ln\left(\frac{x^2-1}{x}\right)-\frac{x^3}{3}-2x^2-4x$$

$$-7\ln|x-1|-\ln|x+1|+c.$$

4. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ μια ρητή συνάρτηση, όπου δηλαδή τα $P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα του x.
Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος

$$\int R(x)dx$$

γίνεται σε πέντε βήματα:

1^o βήμα

Αν ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ (αριθμητή) είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το βαθμό του $Q(x)$ (παρονομαστή), τότε εκτελείται η διαίρεση $P(x):Q(x)$ οπότε προκύπτουν δύο πολυώνυμα $\Pi(x)$ και $U(x)$ με

$$P(x)=\Pi(x)Q(x)+U(x),$$

όπου ο βαθμός του πολυωνύμου $U(x)$ είναι μικρότερος από τον βαθμό του πολυωνύμου $Q(x)$.

Τότε, διαιρώντας με $Q(x)$, προκύπτει ότι

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\Pi(x)Q(x)}{Q(x)} + \frac{U(x)}{Q(x)} \Leftrightarrow R(x) = \Pi(x) + R_1(x)$$

όπου $$R_1(x) = \frac{U(x)}{Q(x)}$$

είναι μια ρητή συνάρτηση με βαθμό του $U(x)$ (αριθμητή) μικρότερο από τον βαθμό του $Q(x)$ (παρονομαστή) και

$$\int R(x)dx = \int \Pi(x)dx + \int R_1(x)dx.$$

Το ολοκλήρωμα $\int \Pi(x)dx$ υπολογίζεται εύκολα με τη βοήθεια της γραμμικής ιδιότητας, ενώ το $\int R_1(x)dx$ υπολογίζεται στα επόμενα βήματα.

Παράδειγμα

Αν $P(x) = 2x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ και $Q(x) = x^2 + 2x - 3$, τότε εκτελώντας τη διαίρεση

$$
\begin{array}{cccccc|l}
2x^5 & +6x^4 & +4x^3 & -5x^2 & +3x & -2 & x^2+2x-3 \\
\cline{7-7}
-2x^5 & -4x^4 & +6x^3 & & & & 2x^3 \\
\cline{1-6}
 & 2x^4 & +10x^3 & -5x^2 & +3x & -2 & \\
 & -2x^4 & -4x^3 & +6x^2 & & & +2x^2 \\
\cline{2-6}
 & & 6x^3 & +x^2 & +3x & -2 & \\
 & & -6x^3 & -12x^2 & +18x & & +6x \\
\cline{3-6}
 & & & -11x^2 & +21x & -2 & \\
 & & & +11x^2 & +22x & -33 & -11 \\
\cline{4-7}
 & & & & 43x & -35 & \\
 & & & & & & 2x^3+2x^2+6x-11
\end{array}
$$

προκύπτει ότι

$$P(x) = 2x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2$$

$$= (2x^3 + 2x^2 + 6x - 11)(x^2 + 2x - 3) + 43x - 35$$

$\Leftrightarrow$

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(X)} = \frac{2x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^2 + 2x - 3}$$

$$= 2x^3 + 2x^2 + 6x - 11 + \frac{43x - 35}{x^2 + 2x - 3}$$

οπότε

$$\int R(x)dx = \int (2x^3 + 2x^2 + 6x - 11)dx + \int \frac{43x - 35}{x^2 + 2x - 3}dx$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους υπολογίζεται με τη βοήθεια της γραμμικής ιδιότητας:

$$\int (2x^3 + 2x^2 + 6x - 11)dx$$

$$= 2\int x^3 dx + 2\int x^2 dx + 6\int x dx - 11\int dx$$

$$= 2\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 11x + c = \frac{x^4}{2} + \frac{2x^3}{3} + 3x^2 - 11x + c$$

Το δεύτερο είναι ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης με αριθμητή μικρότερου βαθμού από τον παρονομαστή και υπολογίζεται σύμφωνα με τα επόμενα βήματα.

Στη συνέχεια της διαδικασίας υποτίθεται ότι ο βαθμός του $P(x)$ είναι μικρότερος από το βαθμό του $Q(x)$.

2^{o} βήμα

Αναλύουμε το πολυώνυμο $Q(x)$ σε γινόμενο παραγόντων της μορφής

$$(x-\rho)^{\mu} \text{ και } (x^2+\beta x+\gamma)^{\nu}$$

όπου $\rho,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, $\mu,\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\beta^2 < 4\gamma$,

Το ρ είναι πραγματική ρίζα του πολυωνύμου $Q(x)$ πολλαπλότητας μ και οι δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες του τριωνύμου $x^2+\beta x+\gamma$ είναι ρίζες του $Q(x)$ πολλαπλότητας ν.

3^{o} βήμα
Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση $R(x)$ σε ένα άθροισμα απλούστερων ρητών συναρτήσεων.

Η μορφή των όρων του αθροίσματος αυτού εξαρτάται από τους παράγοντες στην ανάλυση του $Q(x)$ σε γινόμενο παραγόντων.

Για κάθε παράγοντα της μορφής $(x-\rho)^{\mu}$ θεωρείται η έκφραση

$$\frac{A_1}{x-\rho}+\frac{A_2}{(x-\rho)^2}+\cdots+\frac{A_\mu}{(x-\rho)^\mu}$$

όπου $A_i \in \mathbb{R}$, $i \in [\mu]$, ενώ για κάθε παράγοντα της μορφής $(x^2+\beta x+\gamma)^{\nu}$ θεωρείται η έκφραση

$$\frac{B_1+\Gamma_1 x}{x^2+\beta x+\gamma}+\frac{B_2+\Gamma_2 x}{(x^2+\beta x+\gamma)^2}+\cdots+\frac{B_\nu+\Gamma_\nu x}{(x^2+\beta x+\gamma)^\nu}$$

όπου $B_i, \Gamma_i \in \mathbb{R}$, $i \in [\nu]$.

Η έκφραση αυτή της ρητής συνάρτησης ονομάζεται ανάλυση σε **μερικά** ή **απλά κλάσματα**.

Παράδειγμα

$$\frac{P(x)}{(x-2)(x+2)^3\left(x^2+3x+5\right)^2\left(x^2+7x+13\right)}$$

$$=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{\Gamma}{(x+2)^2}$$

$$+\frac{\Delta}{(x+2)^3}+\frac{Kx+\Lambda}{x^2+3x+5}+\frac{Mx+N}{\left(x^2+3x+5\right)^2}$$

$$+\frac{Ex+Z}{x^2+7x+13}.$$

4^{o} βήμα

Υπολογίζουμε τους συντελεστές στην ανάλυση της ρητής συνάρτησης σε μερικά κλάσματα, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παραδείγματα

1. Αν $R(x)=\dfrac{-3x^2+5x+16}{(x+2)(x^2-1)}$, τότε είναι

$$\frac{-3x^2+5x+16}{(x+2)(x^2-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{\Gamma}{x+2},$$

οπότε προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}&-3x^2+5x+16=A(x+1)(x+2)\\&+B(x-1)(x+2)+\Gamma(x^2-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-3x^2+5x+16=(A+B+\Gamma)x^2\\&+(3A+B)x+2A-2B-\Gamma\end{aligned} \qquad (1)$$

και τελικά, το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l}A+B+\Gamma=-3\\3A+B=5\\2A-2B-\Gamma=16\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}A=3\\B=-4\\\Gamma=-2\end{array}\right\}.$$

Άρα,

$$\frac{-3x^2+5x+16}{(x+2)(x^2-1)}=\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x+1}-\frac{2}{x+2}.$$

2. Αν $R(x)=\dfrac{7x^2-19x+5}{(x-2)^2(x+3)}$, τότε είναι

$$\frac{7x^2-19x+5}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{\Gamma}{x+3}$$

οπότε προκύπτουν οι σχέσεις

$$7x^2-19x+5=A(x-2)(x+3)+B(x+3)$$
$$+\Gamma(x-2)^2$$
$$7x^2-19x+5=(A+\Gamma)x^2+(A+B-4\Gamma)x$$
$$+(-6A+3B+4\Gamma)$$

και τελικά, το σύστημα

$$\left\{\begin{aligned}&A+\Gamma=7\\&A+B-4\Gamma=-19\\&-6A+3B+4\Gamma=5\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}&A=2\\&B=-1\\&\Gamma=5\end{aligned}\right\}$$

Άρα,

$$\frac{7x^2-19x+5}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{5}{x+3}.$$

3. Αν $R(x)=\dfrac{-2x^3+3x^2+15x+8}{(x-1)^2(x^2+3x+4)}$, τότε είναι

$$\frac{-2x^3+3x^2+15x+8}{(x-1)^2(x^2+3x+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{\Gamma x+\Delta}{x^2+3x+4}$$

οπότε προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}-2x^3+3x^2+15x+8&=A(x-1)(x^2+3x+4)\\&\quad+B(x^2+3x+4)+(\Gamma x+\Delta)(x-1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-2x^3+3x^2+15x+8&=(A+\Gamma)x^3\\&\quad+(2A+B-2\Gamma+\Delta)x^2\\&\quad+(A+3B+\Gamma-2\Delta)x+(-4A+4B+\Delta)\end{aligned}$$

και τελικά, το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l}A+\Gamma=-2\\2A+B-2\Gamma+\Delta=3\\A+3B+\Gamma-2\Delta=15\\-4A+4B+\Delta=8\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}A=0\\B=3\\\Gamma=-2\\\Delta=-4\end{array}\right\}.$$

Άρα,

$$\frac{-2x^3+3x^2+15x+8}{(x-1)^2(x^2+3x+4)}=\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{2x+4}{x^2+3x+4}.$$

5^{o} βήμα

Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της έκφρασης της $R(x)$ σε μερικά κλάσματα, οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα προκύπτει ως άθροισμα ολοκληρωμάτων μερικών κλασμάτων τα οποία ανάγονται στις μορφές

$$A_n = \int \frac{dx}{(x-\rho)^n},$$

$$B_n = \int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} dx,$$

$$\Gamma_n = \int \frac{x}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} dx,$$

όπου $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\beta^2 < 4\gamma$.

Τα τελευταία ολοκληρώματα υπολογίζονται ως εξής:

$$\text{(i)} \quad A_n = \begin{cases} \dfrac{(x-\rho)^{-n+1}}{-n+1}, & \text{αν } n \neq 1 \\ \ln|x-\rho|, & \text{αν } n = 1. \end{cases}$$

(ii) $B_n = \int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4}\right)^n} dx$, διότι

$$x^2 + \beta x + \gamma = x^2 + 2\frac{\beta}{2}x + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma$$

$$= \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4}$$

Αν τεθεί $y = \frac{1}{\kappa}\left(x+\frac{\beta}{2}\right)$ όπου $\kappa = \sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{4}}$, τότε είναι $dy = \frac{1}{\kappa}dx$ και $\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4} = (\kappa y)^2 + \kappa^2 = \kappa^2(y^2+1)$, οπότε

$$B_n = \int \frac{\kappa dy}{\left(\kappa^2\left(y^2+1\right)\right)^n} = \frac{1}{\kappa^{2n-1}} \int \frac{dy}{\left(y^2+1\right)^n}.$$

Το ολοκλήρωμα $J_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$, $n \in \mathbb{N}$ υπολογίζεται με τη βοήθεια του αναγωγικού τύπου

$$J_n = \frac{x}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} J_{n-1}, \ n > 1$$

και $J_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \text{arctg}x + c$

(iii) Αν τεθεί $z = x^2 + \beta\chi + \gamma$, τότε $dz = (2x+\beta)dx$, οπότε

$$\Gamma_n = \int \frac{x}{\left(x^2+\beta x+\gamma\right)^n}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\left(x^2+\beta x+\gamma\right)^n}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+\beta}{\left(x^2+\beta x+\gamma\right)^n}dx - \frac{\beta}{2}\int \frac{1}{\left(x^2+\beta x+\gamma\right)^n}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^n} - \frac{\beta}{2}B_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{z^{-n+1}}{-n+1} - \beta B_n\right), & \text{αν } n \neq 1 \\ \frac{1}{2}\left(\ln z - \beta B_1\right), & \text{αν } n = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{\left(x^2+\beta x+\gamma\right)^{-n+1}}{-n+1} - \beta B_n\right), & \text{αν } n \neq 1 \\ \frac{1}{2}\left(\ln\left(x^2+\beta x+\gamma\right) - \beta B_1\right), & \text{αν } n = 1. \end{cases}$$

Παραδείγματα

1. $$\int \frac{-3x^2+5x+16}{(x-2)(x^2-1)}dx = 3\int \frac{dx}{x-1} - 4\int \frac{dx}{x+1} - 2\int \frac{dx}{x+2}$$
$$= 3\ln|x-1| - 4\ln|x+1| - 2\ln|x+2| + c$$
$$= \ln\left(\frac{|x-1|^3}{|x+1|^4|x+2|^2}\right) + c.$$

2. $$\int \frac{7x^2-19x+5}{(x-2)^2(x+3)}dx = 2\int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{(x-2)^2} + 5\int \frac{dx}{x+3}$$
$$= \ln(x-2)^2 + \frac{1}{x-2} + \ln|x+3|^5 + c.$$

3. $$\int \frac{-2x^3+3x^2+15x+8}{(x-1)^2(x^2+3x+4)}dx$$
$$= 3\int \frac{1}{(x-1)^2}dx - 2\int \frac{x}{x^2+3x+4}dx$$
$$-4\int \frac{1}{x^2+3x+4}dx$$
$$= -\frac{3}{x-1} - \ln(x^2+3x+4) - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{3}{2}\right)\right) + c$$

αφού

$$\int \frac{1}{x^2+3x+4}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}dx$$

$$\overset{y=\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{3}{2}\right)}{=} \int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}y\right)^2+\frac{7}{4}}\frac{\sqrt{7}}{2}dy$$

$$=\frac{4}{7}\int \frac{1}{y^2+1}\frac{\sqrt{7}}{2}dy = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg} y + c_1$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)+c_1$$

και

$$\int \frac{x}{x^2+3x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+4}dx$$

$$\overset{z=x^2+3x+4}{=} \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+3x+4}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3x+4\right)-$$

$$-\frac{3}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)+c_2.$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να ευρεθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $e^x = t$.

ΛΥΣΗ

Επειδή $x = \ln t$, $dx = (\ln t)' dt = \frac{dt}{t}$

και
$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

προκύπτει ότι
$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{t^2 - 1}{(t^2 + 1)t} dt \qquad (1)$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος θέτουμε
$$\frac{t^2 - 1}{(t^2 + 1)t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + \Gamma}{t^2 + 1},$$
οπότε $t^2 - 1 = (A + B)t^2 + \Gamma t + A$
και επομένως, προκύπτει το σύστημα

$$\left.\begin{cases} A+B=1 \\ \Gamma=0 \\ A=-1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} A=-1 \\ B=2 \\ \Gamma=0 \end{matrix}\right\}.$$

Άρα το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int \frac{t^2-1}{\left(t^2+1\right)t}dt = \int -\frac{1}{t}dt + \int \frac{2t}{t^2+1}dt$$

$$= -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1}$$

$$= -\ln t + \ln\left(t^2+1\right) + c$$

$$= \ln\left(\frac{t^2+1}{t}\right) + c \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) και το μετασχηματισμό $t = e^x$, προκύπτει ότι

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx = \ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^x}\right) + c.$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να ευρεθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x\ln x\left(2-(\ln x)^2\right)}dx$, $x>0$, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $y=1-(\ln x)^2$.

ΛΥΣΗ

Επειδή $dy=\left(1-(\ln x)^2\right)' dx=-2\frac{\ln x}{x}dx$,

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\ln x\left[2-(\ln x)^2\right]}dx &= \int \frac{\ln x}{x}\frac{1}{(\ln x)^2\left(2-(\ln x)^2\right)}dx \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-y)(1+y)}dy \\
&= -\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}\right)dy \\
&= -\frac{1}{4}\int \frac{dy}{1-y}-\frac{1}{4}\int \frac{dy}{1+y} \\
&= \frac{1}{4}\ln|1-y|-\frac{1}{4}\ln|1+y|+c \\
&= \ln\sqrt[4]{\left|\frac{1-y}{1+y}\right|}+c \\
&= \ln\sqrt[4]{\frac{(\ln x)^2}{\left|2-(\ln x)^2\right|}}+c.
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να ευρεθούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int x^2 e^{2x+1}dx$, β) $\int x\cos(3x-1)dx$,

γ) $\int (x^2-2x+3)\sin x dx$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\int x^2 e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int x^2\left(e^{2x+1}\right)' dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x+1} - \frac{1}{2}\int \left(x^2\right)' e^{2x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x+1} - \frac{1}{2}\int 2xe^{2x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x+1} - \frac{1}{2}\int x\left(e^{2x+1}\right)' dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x+1} - \frac{1}{2}xe^{2x+1} + \frac{1}{2}\int x' e^{2x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x+1} - \frac{1}{2}xe^{2x+1} + \frac{1}{4}\int e^{2x+1}d(2x+1)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x+1} - \frac{1}{2}xe^{2x+1} + \frac{1}{4}e^{2x+1} + c$$

$$= \frac{1}{4}\left(2x^2-2x+1\right)e^{2x+1} + c.$$

β) Είναι

$$\int x\cos(3x-1)\,dx=\frac{1}{3}\int x\left(\sin(3x-1)\right)'dx$$

$$=\frac{1}{3}x\sin(3x-1)-\frac{1}{3}\int x'\sin(3x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}x\sin(3x-1)-\frac{1}{9}\int \sin(3x-1)\,d(3x-1)$$

$$=\frac{1}{3}x\sin(3x-1)+\frac{1}{9}\cos(3x-1)+c.$$

γ) Είναι

$$\int\left(x^2-2x+3\right)\sin x\,dx=-\int\left(x^2-2x+3\right)(\cos x)'\,dx$$

$$=-\left(x^2-2x+3\right)\cos x+\int\left(x^2-2x+3\right)'\cos x\,dx$$

$$=-\left(x^2-2x+3\right)\cos x+\int(2x-2)\cos x\,dx$$

$$=-\left(x^2-2x+3\right)\cos x+2\int(x-1)(\sin x)'\,dx$$

$$=-\left(x^2-2x+3\right)\cos x+2(x-1)\sin x-2\int(x-1)'\sin x\,dx$$

$$=-\left(x^2-2x+3\right)\cos x+2(x-1)\sin x-2\int\sin x\,dx$$

$$=-\left(x^2-2x+3\right)\cos x+2(x-1)\sin x+2\cos x+c$$

$$=-\left(x^2-2x+1\right)\cos x+2(x-1)\sin x+c.$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να ευρεθούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int (3x-2)\sinh(2x+1)dx$, β) $\int \left(x^2+2x+5\right)\cosh 3x dx$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\int (3x-2)\sinh(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int (3x-2)\left(\cosh(2x+1)\right)' dx$$

$$= \frac{1}{2}(3x-2)\cosh(2x+1) - \frac{1}{2}\int (3x-2)' \cosh(2x+1)dx$$

$$= \frac{1}{2}(3x-2)\cosh(2x+1) - \frac{3}{2}\int \cosh(2x+1)dx$$

$$= \frac{1}{2}(3x-2)\cosh(2x+1) - \frac{3}{4}\sinh(2x+1) + c.$$

β) Είναι

$$\int (x^2+2x+5)\cosh 3x dx = \frac{1}{3}\int (x^2+2x+5)(\sinh 3x)' dx$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+2x+5)\sinh 3x - \frac{1}{3}\int (x^2+2x+5)' \sinh 3x dx$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+2x+5)\sinh 3x - \frac{2}{3}\int (x+1)\sinh 3x dx$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+2x+5)\sinh 3x - \frac{2}{9}\int (x+1)(\cosh 3x)' dx$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+2x+5)\sinh 3x - \frac{2}{9}(x+1)\cosh 3x + \frac{2}{9}\int (x+1)' \cosh 3x dx$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+2x+5)\sinh 3x - \frac{2}{9}(x+1)\cosh 3x + \frac{2}{27}\sinh 3x + c$$

$$= \frac{1}{27}(9x^2+18x+47)\sinh 3x - \frac{2}{9}(x+1)\cosh 3x + c$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να ευρεθούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int e^{2x-1}\cos(2x+1)\,dx$, β) $\int e^{4x}\sin(3x+2)\,dx$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$
\begin{aligned}
I &= \int e^{2x-1}\cos(2x+1)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \left(e^{2x-1}\right)'\cos(2x+1)\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x-1}\cos(2x+1) - \frac{1}{2}\int e^{2x-1}\left(\cos(2x+1)\right)'\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x-1}\cos(2x+1) - \frac{1}{2}\int e^{2x-1}\left(-2\sin(2x+1)\right)dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x-1}\cos(2x+1) + \frac{1}{2}\int \left(e^{2x-1}\right)'\sin(2x+1)\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x-1}\cos(2x+1) + \frac{1}{2}e^{2x-1}\sin(2x+1) - \\
&\quad - \frac{1}{2}\int e^{2x-1}\left(\sin(2x+1)\right)'\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x-1}\cos(2x+1) + \frac{1}{2}e^{2x-1}\sin(2x+1) - \\
&\quad - \int e^{2x-1}\cos(2x+1)\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x-1}\left(\cos(2x+1)+\sin(2x+1)\right) - I + c_1.
\end{aligned}
$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$I = \frac{1}{4}e^{2x-1}\left(\cos(2x+1)+\sin(2x+1)\right) + c.$$

β) Είναι

$$
\begin{aligned}
I &= \int e^{4x}\sin(3x+2)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(e^{4x}\right)'\sin(3x+2)\,dx \\
&= \frac{1}{4}e^{4x}\sin(3x+2) - \frac{1}{4}\int e^{4x}\left(\sin(3x+2)\right)'dx \\
&= \frac{1}{4}e^{4x}\sin(3x+2) - \frac{3}{16}\int \left(e^{4x}\right)'\cos(3x+2)\,dx \\
&= \frac{1}{4}e^{4x}\sin(3x+2) - \frac{3}{16}e^{4x}\cos(3x+2) + \frac{3}{16}\int e^{4x}\left(\cos(3x+2)\right)'dx \\
&= \frac{1}{4}e^{4x}\sin(3x+2) - \frac{3}{16}e^{4x}\cos(3x+2) - \frac{9}{16}\int e^{4x}\sin(3x+2)\,dx \\
&= \frac{e^{4x}}{16}\left(4\sin(3x+2) - 3\cos(3x+2)\right) - \frac{9}{16}I + c_1.
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$\frac{25}{16}I = \frac{e^{4x}}{16}\left(4\sin(3x+2) - 3\cos(3x+2)\right) + c_1,$$

οπότε τελικά, έχουμε ότι

$$I = \frac{e^{4x}}{25}\left(4\sin(3x+2) - 3\cos(3x+2)\right) + c.$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να ευρεθούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int e^{2x+6}\sinh(3x+1)dx$, β) $\int e^{3x-1}\cosh(4x+3)dx$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$
\begin{aligned}
I &= \int e^{2x+6}\sinh(3x+1)dx \\
&= \frac{1}{2}\int \left(e^{2x+6}\right)'\sinh(3x+1)dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x+6}\sinh(3x+1) - \frac{1}{2}\int e^{2x+6}\left(\sinh(3x+1)\right)'dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x+6}\sinh(3x+1) - \frac{3}{2}\int e^{2x+6}\cosh(3x+1)dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x+6}\sinh(3x+1) - \frac{3}{4}\int \left(e^{2x+6}\right)'\cosh(3x+1)dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x+6}\sinh(3x+1) - \frac{3}{4}e^{2x+6}\cosh(3x+1) + \frac{3}{4}\int e^{2x+6}\left(\cosh(3x+1)\right)'dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x+6}\sinh(3x+1) - \frac{3}{4}e^{2x+6}\cosh(3x+1) + \frac{9}{4}\int e^{2x+6}\sinh(3x+1)dx \\
&= \frac{1}{2}e^{2x+6}\sinh(3x+1) - \frac{3}{4}e^{2x+6}\cosh(3x+1) + \frac{9}{4}I + c_1.
\end{aligned}
$$

Άρα, $\frac{5}{4}I = -\frac{1}{2}e^{2x+6}\sinh(3x+1) + \frac{3}{4}e^{2x+6}\cosh(3x+1) - c_1$,

οπότε τελικά, έχουμε ότι

$$
I = \frac{e^{2x+6}}{5}\left(3\cosh(3x+1) - 2\sinh(3x+1)\right) + c.
$$

β) Είναι

$$
\begin{aligned}
I &= \int e^{3x-1}\cosh(4x+3)\,dx \\
&= \frac{1}{3}\int \left(e^{3x-1}\right)'\cosh(4x+3)\,dx \\
&= \frac{1}{3}e^{3x-1}\cosh(4x+3) - \frac{1}{3}\int e^{3x-1}\left(\cosh(4x+3)\right)'\,dx \\
&= \frac{1}{3}e^{3x-1}\cosh(4x+3) - \frac{4}{3}\int e^{3x-1}\sinh(4x+3)\,dx \\
&= \frac{1}{3}e^{3x-1}\cosh(4x+3) - \frac{4}{9}\int \left(e^{3x-1}\right)'\sinh(4x+3)\,dx
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{3}e^{3x-1}\cosh(4x+3) - \frac{4}{9}e^{3x-1}\sinh(4x+3) + \frac{4}{9}\int e^{3x-1}\left(\sinh(4x+3)\right)'\,dx
$$

$$
= \frac{1}{3}e^{3x-1}\cosh(4x+3) - \frac{4}{9}e^{3x-1}\sinh(4x+3) + \frac{16}{9}\int e^{3x-1}\cosh(4x+3)\,dx
$$

$$
= \frac{1}{3}e^{3x-1}\cosh(4x+3) - \frac{4}{9}e^{3x-1}\sinh(4x+3) + \frac{16}{9}I + c_1.
$$

Άρα,

$$
\frac{7}{9}I = -\frac{1}{3}e^{3x-1}\cosh(4x+3) + \frac{4}{9}e^{3x-1}\sinh(4x+3) - c_1,
$$

οπότε τελικά, έχουμε ότι

$$
I = \frac{e^{3x-1}}{7}\left(4\sinh(4x+3) - 3\cosh(4x+3)\right) + c.
$$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να ευρεθούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \arcsin x dx$,

β) $\int (3x^2 + 4x - 1) \ln\left(\frac{x^2 - 3}{2x}\right) dx$,

γ) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$\int \arcsin x dx = \int x' \arcsin x dx$$

$$= x \arcsin x - \int x (\arcsin x)' dx$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Για την εύρεση του τελευταίου ολοκληρώματος τίθεται $y = 1 - x^2$, οπότε $dy = -2x dx$ και επομένως

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int y^{-\frac{1}{2}} dy = -\frac{1}{2} \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1 - x^2} + c_1.$$

Έτσι, τελικά,

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c.$$

β) Είναι

$$\int\left(3x^2+4x-1\right)\ln\left(\frac{x^2-3}{2x}\right)dx=\int\left(x^3+2x^2-x\right)'\ln\left(\frac{x^2-3}{2x}\right)dx$$

$$=\left(x^3+2x^2-x\right)\ln\left(\frac{x^2-3}{2x}\right)-\int\left(x^3+2x^2-x\right)\left(\ln\left(\frac{x^2-3}{2x}\right)\right)'dx$$

$$=\left(x^3+2x^2-x\right)\ln\left(\frac{x^2-3}{2x}\right)-\int\left(x^3+2x^2-x\right)\frac{2x}{x^2-3}\left(\frac{x^2-3}{2x}\right)'dx$$

$$=\left(x^3+2x^2-x\right)\ln\left(\frac{x^2-3}{2x}\right)-\int\left(x^3+2x^2-x\right)\frac{2x}{x^2-3}\frac{2\left(x^2+3\right)}{4x^2}dx$$

$$=\left(x^3+2x^2-x\right)\ln\left(\frac{x^2-3}{2x}\right)-\int\left(x^2+2x-1\right)\frac{x^2+3}{x^2-3}dx$$

$$=\left(x^3+2x^2-x\right)\ln\left(\frac{x^2-3}{2x}\right)-\int\left(x^2+2x+5\right)dx-12\int\frac{x+1}{x^2-3}dx$$

$$=\left(x^3+2x^2-x\right)\ln\left(\frac{x^2-3}{2x}\right)-\frac{x^3}{3}-x^2-5x-12\int\frac{x+1}{x^2-3}dx \qquad (1)$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος, θέτουμε

$$\frac{x+1}{x^2-3}=\frac{A}{x-\sqrt{3}}+\frac{B}{x+\sqrt{3}},$$

οπότε

$$x+1=A\left(x+\sqrt{3}\right)+B\left(x-\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow x+1=(A+B)x+\sqrt{3}(A-B)$$

και επομένως, προκύπτει το σύστημα

$$\left\{\begin{aligned}A+B&=1\\A-B&=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}A&=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\\B&=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\end{aligned}\right\}.$$

Επομένως,

$$\int \frac{x+1}{x^2-3}dx = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\int \frac{dx}{x-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\int \frac{dx}{x+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\ln\left|x-\sqrt{3}\right| + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\ln\left(x+\sqrt{3}\right) + c_1 \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\int \left(3x^2+4x-1\right)\ln\left(\frac{x^2-3}{2x}\right)dx$$

$$= \left(x^3+2x^2-x\right)\ln\left(\frac{x^2-3}{2x}\right) - \frac{x^3}{3} - x^2 - 5x$$

$$-\frac{6\left(\sqrt{3}+1\right)\ln\left|x-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3}} - \frac{6\left(\sqrt{3}-1\right)\ln\left(x+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} + c.$$

γ) Είναι

$$\int \frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}dx = -\int \left(\frac{1}{x}\right)' \operatorname{arctg}x\,dx$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg}x}{x} + \int \frac{1}{x}\left(\operatorname{arctg}x\right)' dx$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg}x}{x} + \int \frac{1}{x\left(1+x^2\right)}dx$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg}x}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg}x}{x} + \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg}x}{x} + \ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + c.$$

ΑΣΚΗΣΗ 16

Αν $J_n = \int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx$, να αποδειχθεί ότι

$$J_n = \frac{x}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} J_{n-1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$, και στη συνέχεια να ευρεθούν τα J_2, J_3.

ΛΥΣΗ

Είναι

$$\begin{aligned}
J_n &= \int \left(\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}} - \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n} \right) dx \\
&= \int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}} dx - \int x \frac{x}{\left(1+x^2\right)^n} dx \\
&= J_{n-1} - \frac{1}{2(1-n)} \int x \left(\left(1+x^2\right)^{1-n} \right)' dx \\
&= J_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} x \left(1+x^2\right)^{1-n} - \frac{1}{2(n-1)} \int \left(1+x^2\right)^{1-n} dx \\
&= J_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} J_{n-1} \\
&= \frac{x}{2(n-1)\left(1+x^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} J_{n-1}.
\end{aligned}$$

Επειδή $J_1 = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg}x + c_1$, προκύπτει ότι

$$J_2 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}J_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + c_2$$

και

$$J_3 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}J_2 =$$

$$= \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg}x\right) + c_3 \cdot$$

ΑΣΚΗΣΗ 20

Να ευρεθούν τα αόριστα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{6x+2}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx$,

β) $\int \frac{2x^2+13x+19}{(x+4)(x+3)^2}dx$,

γ) $\int \frac{x^4+3x^2-3x+5}{(x+1)(x-1)^2(x^2+2)}dx$.

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε

$$\frac{6x+2}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma}{x+2},$$

οπότε

$$6x+2 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2)$$
$$+\Gamma(x-1)(x+1)$$
$$= Ax^2+3Ax+2A+Bx^2+Bx-2B+\Gamma x^2-\Gamma$$
$$= (A+B+\Gamma)x^2+(3A+B)x+(2A-2B-\Gamma).$$

Από την παραπάνω ταυτότητα, προκύπτει το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c} A+B+\Gamma=0 \\ 3A+B=6 \\ 2A-2B-\Gamma=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} A=\dfrac{4}{3} \\ B=2 \\ \Gamma=-\dfrac{10}{3} \end{array}\right\}.$$

Άρα το δοσμένο ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int \frac{6x+2}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x+1} - \frac{10}{3}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{4}{3}\ln|x-1| + 2\ln|x+1| - \frac{10}{3}\ln|x+2| + c$$

$$= \ln\left(\frac{(x-1)^{4/3}(x+1)^2}{(x+2)^{10/3}}\right) + c.$$

β) Θέτουμε $\frac{2x^2+13x+19}{(x+4)(x+3)^2}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x+3}+\frac{\Gamma}{(x+3)^2}$,

οπότε

$$\begin{aligned}2x^2+13x+19&=A(x+3)^2+B(x+3)(x+4)+\Gamma(x+4)\\&=A\left(x^2+6x+9\right)+B\left(x^2+7x+12\right)+\Gamma(x+4)\\&=(A+B)x^2+(6A+7B+\Gamma)x+(9A+12B+4\Gamma).\end{aligned}$$

Από την παραπάνω ταυτότητα, προκύπτει το σύστημα

$$\left\{\begin{matrix}A+B=2\\6A+7B+\Gamma=13\\9A+12B+4\Gamma=19\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}A=-1\\B=3\\\Gamma=-2\end{matrix}\right\}.$$

Άρα το δοσμένο ολοκλήρωμα γράφεται

$$\begin{aligned}\int\frac{2x^2+13x+19}{(x+4)(x+3)^2}dx&=-\int\frac{dx}{x+4}+3\int\frac{dx}{x+3}-2\int\frac{dx}{(x+3)^2}\\&=-\ln|x+4|+3\ln|x+3|+\frac{2}{x+3}+c\\&=\ln\frac{|x+3|^3}{|x+4|}+\frac{2}{x+3}+c.\end{aligned}$$

γ) Θέτουμε

$$\frac{x^4+3x^2-3x+5}{(x+1)(x-1)^2(x^2+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma}{(x-1)^2}+\frac{\Delta x+E}{x^2+2},$$

οπότε

$$\begin{aligned}x^4+3x^2-3x+5&=A(x-1)^2(x^2+2)+B(x+1)(x-1)(x^2+2)\\&\quad+\Gamma(x+1)(x^2+2)+(\Delta x+E)(x+1)(x-1)^2\\&=A(x^4-2x^3+3x^2-4x+2)+B(x^4+x^2-2)\\&\quad+\Gamma(x^3+x^2+2x+2)+\Delta(x^4-x^3-x^2+x)\\&\quad+E(x^3-x^2-x+1)\\&=(A+B+\Delta)x^4+(-2A+\Gamma-\Delta+E)x^3\\&\quad+(3A+B+\Gamma-\Delta-E)x^2+(-4A+2\Gamma+\Delta-E)x\\&\quad+(2A-2B+2\Gamma+E).\end{aligned}$$

Από την παραπάνω ταυτότητα, προκύπτει το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c}A+B+\Delta=1\\-2A+\Gamma-\Delta+E=0\\3A+B+\Gamma-\Delta-E=3\\-4A+2\Gamma+\Delta-E=-3\\2A-2B+2\Gamma+E=5\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}A=1\\B=0\\\Gamma=1\\\Delta=0\\E=1\end{array}\right\}.$$

Άρα το δοσμένο ολοκλήρωμα γράφεται

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4+3x^2-3x+5}{(x+1)(x-1)^2(x^2+2)}dx&=\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{dx}{x^2+2}\\&=\ln|x+1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+c\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 21

Να ευρεθεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$I=\int \frac{2x^4+2x^3+5x^2+x-2}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)^2}dx.$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε

$$\frac{2x^4+2x^3+5x^2+x-2}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1}+\frac{\Delta x+E}{\left(x^2+x+1\right)^2},$$

οπότε

$$\begin{aligned}2x^4+2x^3+5x^2+x-2&=A\left(x^2+x+1\right)^2+(Bx+\Gamma)(x+1)\left(x^2+x+1\right)\\&\quad+(\Delta x+E)(x+1)\Leftrightarrow\\2x^4+2x^3+5x^2+x-2&=(A+B)x^4+(2A+2B+\Gamma)x^3\\&\quad+(3A+2B+2\Gamma+\Delta)x^2\\&\quad+(2A+B+2\Gamma+\Delta+E)x+(A+\Gamma+E).\end{aligned}$$

Από την παραπάνω ταυτότητα προκύπτει το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c}A+B=2\\2A+2B+\Gamma=2\\3A+2B+2\Gamma+\Delta=5\\2A+B+2\Gamma+\Delta+E=1\\A+\Gamma+E=-2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}A=2\\B=0\\\Gamma=-2\\\Delta=3\\E=-2\end{array}\right\}.$$

Άρα,

$$\frac{2x^4+2x^3+5x^2+x-2}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x^2+x+1}+\frac{3x-2}{\left(x^2+x+1\right)^2},$$

οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται

$$
\begin{aligned}
I = 2\int \frac{dx}{x+1} - 2\int \frac{1}{x^2+x+1}dx &+ \\
&+ \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx - \frac{7}{2}\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Είναι

$$
\int \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)}dx = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + c_0 = -\frac{1}{x^2+x+1} + c_0 .
$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$
\int \frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^n}dx = \int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)^n}dx
$$

$$
\overset{1}{=} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n-1} \int \frac{1}{\left(1+y^2\right)^n}dy = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n-1} J_n
$$

Για $n = 1,2$ προκύπτει αντίστοιχα ότι

$$
J_1 = \operatorname{arctg} y + c_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + c_1
$$

και

$$
J_2 \overset{2}{=} \frac{y}{2\left(1+y^2\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y + c_2
$$

---

[1] Θέτουμε $y = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

[2] Βλ. λυμένη άσκηση 16.

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\left(1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + c_2$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,(2x+1)}{8\left(x^2+x+1\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + c_2 .$$

Επομένως, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$I = 2\ln|x+1| - \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$-\frac{7}{2}\frac{8}{3\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right) + c$$

$$= 2\ln|x+1| - \frac{1}{3}\frac{7x+8}{x^2+x+1} - \frac{26\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + c .$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Ολοκλήρωση μη ρητών συναρτήσεων

5. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Το ολοκλήρωμα των μη ρητών συναρτήσεων δεν υπολογίζεται με ένα στερεότυπο τρόπο.

Ι.α) Η μορφή $\mathbf{I=\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx}$

όπου R είναι μία ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Τα ολοκληρώματα αυτής της μορφής ονομάζονται **τριγωνομετρικά ολοκληρώματα** και υπολογίζονται με τη βοήθεια της αντικατάστασης

$$\mathbf{t=tg\frac{x}{2}}.$$

Χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς τύπους

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \text{ και } \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

προκύπτει ότι

$$\mathbf{\sin x=\frac{2t}{1+t^2}} \text{ και } \mathbf{\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}} \qquad (1)$$

Επιπλέον, επειδή $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Leftrightarrow x = 2\operatorname{arctg} t$, θα είναι

$$\mathbf{dx = \frac{2}{1+t^2} dt} \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$I = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt$$

το οποίο είναι ένα ολοκλήρωμα μιας ρητής (ως προς t) συνάρτησης.

ΑΣΚΗΣΗ 22(α)

Να ευρεθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\sin x+\cos x+1}dx$

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $t=tg\frac{x}{2}$ τότε είναι

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

και $x=2\text{arctg}t$, οπότε $dx=2\left(\text{arctg}t\right)'dt=\frac{2}{1+t^2}dt$.

Κατόπιν τούτου, είναι:

$$\frac{1}{\sin x+\cos x+1}=\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}=\frac{1}{2}\frac{1+t^2}{1+t},$$

οπότε

$$\int \frac{1}{\sin x+\cos x+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1+t^2}{1+t}\frac{2}{1+t^2}dt=\int \frac{dt}{1+t}$$

$$=\ln|1+t|+c=\ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right|+c.$$

Ειδικές μορφές της συνάρτησης $R(\sin x, \cos x)$

1. **Αν η συνάρτηση R είναι περιττή ως προς ημίτονο,** δηλαδή

$$\mathbf{R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)}$$

τότε εφαρμόζεται η αντικατάσταση

$$\mathbf{y = \cos x}.$$

2. **Αν η συνάρτηση R είναι περιττή ως προς συνημίτονο,** δηλαδή

$$\mathbf{R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)}$$

τότε εφαρμόζεται η αντικατάσταση

$$\mathbf{y = \sin x}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 23(α)

Να ευρεθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx$

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $y = \cos x$, προκύπτει ότι $dy = -\sin x dx$ και επομένως το ζητούμενο ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = -\int \frac{y^2}{(1-y^2)^2} dy \qquad (1)$$

Θέτουμε

$$\frac{y^2}{\left(1-y^2\right)^2}=\frac{A}{1-y}+\frac{B}{\left(1-y\right)^2}+\frac{\Gamma}{1+y}+\frac{\Delta}{\left(1+y\right)^2},$$

οπότε προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις

$$y^2=A\left(1-y\right)\left(1+y\right)^2+B\left(1+y\right)^2+\Gamma\left(1+y\right)\left(1-y\right)^2+\Delta\left(1-y\right)^2$$

$$y^2=A\left(-y^3-y^2+y+1\right)+B\left(y^2+2y+1\right)+\Gamma\left(y^3-y^2-y+1\right)$$
$$+\Delta\left(y^2-2y+1\right)$$

$$y^2=\left(-A+\Gamma\right)y^3+\left(-A+B-\Gamma+\Delta\right)y^2+\left(A+2B-\Gamma-2\Delta\right)y$$
$$+A+B+\Gamma+\Delta$$

και τελικά το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c}-A+\Gamma=0\\-A+B-\Gamma+\Delta=1\\A+2B-\Gamma-2\Delta=0\\A+B+\Gamma+\Delta=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}A=-\frac{1}{4}\\B=\frac{1}{4}\\\Gamma=-\frac{1}{4}\\\Delta=\frac{1}{4}\end{array}\right\}.$$

Άρα από την σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx=\frac{1}{4}\left(\int\frac{dy}{1-y}-\int\frac{dy}{\left(1-y\right)^2}+\int\frac{dy}{1+y}-\int\frac{dy}{\left(1+y\right)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(-\ln\left(1-y\right)-\frac{1}{1-y}+\ln\left(1+y\right)+\frac{1}{1+y}\right)+c$$
$$=\frac{1}{4}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}-\frac{2\cos x}{\sin^2 x}+c.$$

3. **Αν η συνάρτηση R είναι άρτια ως προς ημίτονο και συνημίτονο ταυτόχρονα,** δηλαδή

$$\mathbf{R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)}$$

τότε εφαρμόζεται η αντικατάσταση

$$\mathbf{y = tg\, x}.$$

Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούνται οι τύποι

$$\mathbf{\sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}},\ \mathbf{\cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}}$$

και

$$\mathbf{dx = \frac{1}{1+y^2} dy}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 23(γ)

Να ευρεθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $y = tgx$, προκύπτει ότι

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}, \ \sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}$$

και $x = \arctg y$, οπότε $dx = (\arctg y)' dy = \frac{dy}{1+y^2}$.

Άρα,

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\frac{y^2}{1+y^2}}{\frac{1}{(1+y^2)^3}} \frac{dy}{1+y^2}$$

$$= \int (y^4 + y^2) dy$$

$$= \frac{y^5}{5} + \frac{y^3}{3} + c$$

$$= \frac{tg^5 x}{5} + \frac{tg^3 x}{3} + c.$$

Υπερβολικές ταυτότητες

Οι υπερβολικές συναρτήσεις ικανοποιούν ορισμένες ταυτότητες οι οποίες ονομάζονται **υπερβολικές ταυτότητες**.

Παραδείγματα

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
2. $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$.

Υπάρχει ένας κανόνας για τον προσδιορισμό μιας υπερβολικής ταυτότητας από μια τριγωνομετρική ταυτότητα.

Κανόνας του Osborn

Αν σε μια τριγωνομετρική ταυτότητα αντικαταστήσουμε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό με τον αντίστοιχο υπερβολικό και αλλάξουμε το πρόσημο κάθε όρου που περιέχει γινόμενο δύο ημιτόνων, τότε προκύπτει η αντίστοιχη υπερβολική ταυτότητα.

Σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα, από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ και } \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

προκύπτουν οι υπερβολικές ταυτότητες των προηγούμενων παραδειγμάτων.

β) Η μορφή $\mathbf{I=\int R(\sinh x,\cosh x)dx}$ όπου R είναι μια ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών αντιμετωπίζεται ανάλογα με τη μορφή Ι.α):

Για τη γενική περίπτωση, τίθεται $\mathbf{t=tgh\frac{x}{2}}$.
Χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς τύπους

$$\sinh x=\frac{2\mathrm{tgh}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tgh}^2\frac{x}{2}} \text{ και } \cosh x=\frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$$

προκύπτουν οι τύποι

$$\mathbf{\sinh x=\frac{2t}{1-t^2},\ \cosh x=\frac{1+t^2}{1-t^2}}$$

Επιπλέον, επειδή

$\mathrm{tgh}\frac{x}{2}=t\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\mathrm{arctgh}\ t\Leftrightarrow x=2\mathrm{arctgh}\,t$, θα είναι

$$\mathbf{dx=\frac{2}{1-t^2}dt,}$$

οπότε προκύπτει ότι

$$I=2\int R\left(\frac{2t}{1-t^2},\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{1}{1-t^2}dt,$$

το οποίο είναι ένα ολοκλήρωμα μιας ρητής (ως προς t) συνάρτησης.

ΙΙ.α) Η μορφή $\mathbf{I}=\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x},\sqrt{\mathbf{r}^2-\mathbf{x}^2}\right)\mathbf{dx}$

όπου R είναι ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών και $r>0$.

Εδώ, χρησιμοποιείται η αντικατάσταση

$$\mathbf{x}=\mathbf{r}\sin\mathbf{t}, \text{ όπου } t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}=r\sqrt{1-\sin^2 t}=r\left|\cos t\right|$$

$$=r\cos t$$

$$dx=r\cos t\,dt$$

και επομένως,

$$I=r\int R\left(r\sin t,r\cos t\right)\cos t\,dt$$

το οποίο είναι της μορφής Ι.α).

ΑΣΚΗΣΗ 27(α)

Να ευρεθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^2+3x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $x=3\sin t$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, τότε είναι

$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t}=3\cos t$ και $dx=3\cos t dt$, οπότε

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2+3x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx &= \int \frac{9\sin^2 t+9\sin t+5}{3\cos t}\cdot 3\cos t dt \\
&= 9\int \sin^2 t dt + 9\int \sin t dt + 5\int 1 dt \\
&= \frac{9}{2}\int (1-\cos 2t)dt - 9\cos t + 5t \\
&= \frac{9}{2}t - \frac{9}{4}\int \cos 2t d(2t) - 9\cos t + 5t,
\end{aligned}
$$

δηλαδή $\int \frac{x^2+3x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx = -\frac{9}{4}\sin 2t - 9\cos t + \frac{19}{2}t + c$ (1)

Επειδή $\sin t=\frac{x}{3}$, $\cos t=\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ και

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\frac{x}{3}\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} = \frac{2}{9}x\sqrt{9-x^2},$$

από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\int \frac{x^2+3x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx = -\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} - 3\sqrt{9-x^2} + \frac{19}{2}\arcsin\frac{x}{3} + c.$$

β) **Η μορφή** $\mathbf{I = \int R\left(x, \sqrt{x^2 - r^2}\right) dx}$

όπου R είναι μια ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών και $r > 0$.

Εδώ, χρησιμοποιείται η αντικατάσταση

$$\mathbf{x} = \begin{cases} \mathbf{r\cosh t,\ \alpha\nu\ x \in (r, +\infty)} \\ \mathbf{-r\cosh t,\ \alpha\nu\ x \in (-\infty, -r)} \end{cases} \quad \text{όπου } t > 0$$

οπότε , για $x \in (r, +\infty)$ είναι

$$\sqrt{x^2 - r^2} = r\sqrt{\cosh^2 t - 1} = r|\sinh t| = r\sinh t,$$

$$dx = r\sinh t\, dt$$

και επομένως,

$$I = r\int R(r\cosh t, r\sinh t)\sinh t\, dt$$

το οποίο είναι της μορφής Ι.β).

Ανάλογη είναι και η περίπτωση για $x \in (-\infty, -r)$.

Παρατήρηση

Τα ολοκληρώματα της μορφής αυτής μπορούν να αναχθούν σε ρητή μορφή και με τη βοήθεια της αντικατάστασης

$$\mathbf{x = \frac{r}{\cos t}}, \text{ όπου } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 27(β)

Να ευρεθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx$.

ΛΥΣΗ (1ος τρόπος)

Αν $x \in (2,+\infty)$, τίθεται $x = 2\cosh t$ όπου $t > 0$. Τότε είναι

$\sqrt{x^2-4} = 2\sqrt{\cosh^2 t - 1} = 2|\sinh t| = 2\sinh t$ και $dx = 2\sinh t dt$

οπότε

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx = 8\int \frac{\cosh^3 t}{2\sinh t}\cdot 2\sinh t dt = 8\int \cosh^3 t dt.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι της μορφής Ι.β), και υπολογίζεται με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y = \sinh t$. Πραγματικά, είναι

$$\int \cosh^3 t dt = \int \left(1+\sinh^2 t\right)\cosh t dt$$

$$= \int \left(1+y^2\right)dy = y + \frac{y^3}{3} + c = \sinh t + \frac{\sinh^3 t}{3} + c.$$

Επειδή $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, έπεται ότι

$$\sinh t = \sqrt{\cosh^2 t - 1} = \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2},$$

οπότε τελικά, για $x \in (2,+\infty)$, προκύπτει

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx = 4\sqrt{x^2-4} + \frac{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}{3} + c = \frac{(x^2+8)\sqrt{x^2-4}}{3} + c$$

Αν $x \in (-\infty,-2)$, τότε εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός $x = -2\cosh t$, όπου $t > 0$, και προκύπτει με ανάλογο τρόπο το ίδιο αποτέλεσμα.

ΛΥΣΗ (2^{ος} τρόπος)

Αν $x=\dfrac{2}{\cos t}$, $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, τότε είναι

$$\sqrt{x^2-4}=\sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}-4}=2\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=2\,|\,\mathrm{tg}\ t\,|=\begin{cases}2\mathrm{tg}\ t, & t\in(0,\dfrac{\pi}{2})\\ -2\mathrm{tg}\ t, & t\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)\end{cases}$$

και

$$dx=\frac{-2}{\cos^2 t}(\cos t)'dt=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt=\frac{2\mathrm{tg}\ t}{\cos t}dt$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

i) Αν $x\in(2,+\infty)\Leftrightarrow t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, τότε

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx=\int\frac{8/\cos^3 t}{2\mathrm{tg}\ t}\frac{2\mathrm{tg}\ t}{\cos t}dt=8\int\frac{dt}{\cos^4 t}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι τριγωνομετρικό και χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός $y=\mathrm{tg}\,t$, οπότε $t=\mathrm{arctg}\ y$ και $dt=\dfrac{dy}{1+y^2}$. Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\frac{1}{\cos^4 t}=\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2=(1+\mathrm{tg}^2 t)^2=(1+y^2)^2$$

Άρα

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx = 8\int \frac{dt}{\cos^4 t} = 8\int \frac{(1+y^2)^2 dy}{1+y^2} = 8\int (1+y^2)dy$$

$$= 8(y+\frac{y^3}{3})+c = \frac{8}{3}y(3+y^2)+c$$

Όμως,

$$x = \frac{2}{\cos t}, y = \text{tg } t \Rightarrow x^2 = \frac{4}{\cos^2 t} = 4(1+y^2) \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 1+y^2,$$

οπότε, για $x > 2$, είναι $2y = \sqrt{x^2-4}$.

Επομένως,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx = \frac{8}{3}y(3+y^2)+c = \frac{4}{3}\sqrt{x^2-4}\left(2+\frac{x^2}{4}\right)+c$$

$$= \frac{8+x^2}{3}\sqrt{x^2-4}+c$$

ii) Αν $x \in (-\infty,-2) \Leftrightarrow t \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, η περίπτωση αυτή αντιμετωπίζεται ανάλογα.

γ) **Η μορφή** $\mathbf{I = \int R\left(x, \sqrt{x^2 + r^2}\right) dx}$

όπου R είναι ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών και $r > 0$.

Εδώ, χρησιμοποιείται η αντικατάσταση

$$\mathbf{x = r \sinh t}, \ t \in \mathbb{R}$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\sqrt{x^2 + r^2} = r\sqrt{\sinh^2 t + 1} = r \cosh t$$

$$dx = r \cosh t \, dt$$

και επομένως,

$$I = r \int R\left(r \sinh t, r \cosh t\right) \cosh t \, dt$$

το οποίο είναι της μορφής Ι.β).

Παρατήρηση

Τα ολοκληρώματα της μορφής ΙΙ.γ) μπορούν να αναχθούν σε ρητή μορφή και με τη βοήθεια της αντικατάστασης

$$\mathbf{x = r \, tg \, t}, \ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

III. **Η μορφή** $\mathbf{I = \int R\left(x, \sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}\right) dx}$

όπου R είναι ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.

Η μορφή αυτή, που είναι γενίκευση των μορφών του ΙΙ, ανάγεται σε μια από αυτές με τη βοήθεια του μετασχηματισμού

$$\mathbf{y = \frac{2\alpha x + \beta}{2\sqrt{|\alpha|}}}.$$

Πράγματι, επειδή

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \frac{1}{4\alpha}\left(4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + 4\alpha\gamma\right)$$

$$= \frac{1}{4\alpha}\left((2\alpha x)^2 + 2(2\alpha x)\beta + \beta^2 - \beta^2 + 4\alpha\gamma\right)$$

$$= \frac{1}{4\alpha}\left((2\alpha x + \beta)^2 - \Delta\right) = \frac{1}{4\alpha}\left(4\,|\,\alpha\,|\,y^2 - \Delta\right)$$

όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, αν τεθεί $r = \sqrt{\left|\frac{\Delta}{4\alpha}\right|}$, προκύπτει ότι

$$\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = \begin{cases} \sqrt{r^2 - y^2}, \text{ αν } \Delta > 0 \text{ και } \alpha < 0 \\ \sqrt{y^2 - r^2}, \text{ αν } \Delta > 0 \text{ και } \alpha > 0 \\ \sqrt{y^2 + r^2}, \text{ αν } \Delta < 0 \end{cases}$$

Μετασχηματισμοί Euler

1. Αν $\Delta > 0$, τότε τίθεται

$$\sqrt{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}^2 + \boldsymbol{\beta}\mathbf{x} + \boldsymbol{\gamma}} = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\rho})\mathbf{y}$$

όπου ρ είναι μία ρίζα του τριωνύμου.

2. Αν $\alpha > 0$, τότε τίθεται

$$\sqrt{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}^2 + \boldsymbol{\beta}\mathbf{x} + \boldsymbol{\gamma}} = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

3. Αν $\gamma \geq 0$, τότε τίθεται

$$\sqrt{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}^2 + \boldsymbol{\beta}\mathbf{x} + \boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{x}\mathbf{y} + \sqrt{\boldsymbol{\gamma}}.$$

Παρατηρήσεις

(i) Αν $\Delta < 0$, τότε μπορεί να εφαρμοσθεί πάντα ο μετασχηματισμός 2, αφού τότε $\alpha > 0$ προκειμένου το τριώνυμο να είναι μη αρνητικό.

(ii) Σε ολοκλήρωμα που εφαρμόζονται δύο ή περισσότεροι από τους μετασχηματισμούς του Euler, επιλέγεται αυτός ο οποίος οδηγεί σε απλούστερες πράξεις.

ΑΣΚΗΣΗ 29

Να ευρεθούν τα ολοκληρώματα

α) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx$, β) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}}$, γ) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx$

ΛΥΣΗ

α) Επειδή το τριώνυμο $f(x)=x^2-3x+2$ έχει διακρίνουσα θετική (Δ=1) και ρίζες τους αριθμούς 1 και 2, χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό

$$\sqrt{x^2-3x+2}=(x-1)y$$

Είναι όμως,

$$\sqrt{(x-1)(x-2)}=(x-1)y$$

$$(x-1)(x-2)=(x-1)^2y^2$$

$$x=\frac{2-y^2}{1-y^2}$$

$$dx=\frac{2y}{\left(1-y^2\right)^2}dy,$$

οπότε

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx=\int \frac{\frac{2-y^2}{1-y^2}}{\left(\frac{2-y^2}{1-y^2}-1\right)y}\frac{2y}{\left(1-y^2\right)^2}dy \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx=2\int \frac{2-y^2}{\left(1-y^2\right)^2}dy \qquad (1)$$

Αν τεθεί

$$\frac{2-y^2}{\left(1-y^2\right)^2}=\frac{2-y^2}{(1-y)^2(1+y)^2}=\frac{A}{1-y}+\frac{B}{(1-y)^2}+\frac{\Gamma}{1+y}+\frac{\Delta}{(1+y)^2}$$

τότε θα είναι

$$2-y^2=A(1-y)(1+y)^2+B(1+y)^2+\Gamma(1+y)(1-y)^2+\Delta(1-y)^2$$

.

Αν εφαρμοσθεί η προηγούμενη σχέση διαδοχικά για $y=1$, -1, 0 και 2, τότε προκύπτει το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c}1=4B\\ 1=4\Delta\\ 2=A+B+\Gamma+\Delta\\ -2=-9A+9B+3\Gamma+\Delta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}A=3/4\\ B=1/4\\ \Gamma=3/4\\ \Delta=1/4\end{array}\right\}$$

και συνεπώς

$$\frac{2-y^2}{\left(1-y^2\right)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{1-y}+\frac{1}{(1-y)^2}+\frac{3}{1+y}+\frac{1}{(1+y)^2}\right) \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx=\frac{1}{2}\left(3\int\frac{dy}{1-y}+\int\frac{dy}{(1-y)^2}+3\int\frac{dy}{1+y}+\int\frac{dy}{(1+y)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-3\ln|1-y|+\frac{1}{1-y}+3\ln|1+y|-\frac{1}{1+y}\right)+c=\frac{3}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|+\frac{y}{1-y^2}+c$$

$$=\begin{cases}3\ln\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\right)+\sqrt{x^2-3x+2}+c, & \text{αν } x>2\\ -3\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}\right)+\sqrt{x^2-3x+2}+c, & \text{αν } x<1.\end{cases}$$

β) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}}$.

Επειδή το τριώνυμο $f(x)=x^2-x+1$ έχει $\alpha=1>0$, χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό

$$\sqrt{x^2-x+1}=x-y,$$

οπότε

$$x^2-x+1=(x-y)^2$$

$$x=\frac{y^2-1}{2y-1}$$

$$dx=\frac{2\left(y^2-y+1\right)}{(2y-1)^2}dy$$

και επομένως θα είναι

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x+1}}=\int \frac{2\dfrac{y^2-y+1}{(2y-1)^2}}{\left(\dfrac{y^2-1}{2y-1}+1\right)\left(\dfrac{y^2-1}{2y-1}-y\right)}dy$$

$$=\int \frac{2\left(y^2-y+1\right)}{\left(y^2+2y-2\right)\left(-y^2+y-1\right)}dy=-2\int \frac{dy}{\left(y^2+2y-2\right)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\int \frac{dy}{y+1-\sqrt{3}}-\int \frac{dy}{y+1+\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{y+1+\sqrt{3}}{y+1-\sqrt{3}}\right|+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{x^2-x+1}+1+\sqrt{3}}{x-\sqrt{x^2-x+1}+1-\sqrt{3}}\right|+c.$$

γ) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

Επειδή το τριώνυμο $f(x)=x^2+x+1$ έχει $\gamma=1>0$, χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό

$$\sqrt{x^2+x+1}=xy+1,$$

οπότε

$$x^2+x+1=(xy+1)^2$$

$$x=\frac{2y-1}{1-y^2}$$

$$dx=2\frac{y^2-y+1}{\left(1-y^2\right)^2}dy$$

και επομένως θα είναι

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx &= 2\int \frac{1-y^2}{2y-1}\frac{1-y^2}{y^2-y+1}\frac{y^2-y+1}{\left(1-y^2\right)^2}dy\\ &=\int \frac{d(2y-1)}{2y-1}\\ &=\ln|2y-1|+c\\ &=\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{x}\right|+c.\end{aligned}$$

IV. Η μορφή $\mathbf{I = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}} \right) dx}$

όπου R είναι μια ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$.

Εδώ, χρησιμοποιείται η αντικατάσταση

$$\mathbf{y = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}}$$

οπότε προκύπτει ότι

$$x = \frac{\beta - \delta y^n}{\gamma y^n - \alpha} \text{ και } dx = \frac{n(\alpha\delta - \beta\gamma) y^{n-1}}{(\gamma y^n - \alpha)^2} dy$$

και επομένως,

$$\mathbf{I = n(\alpha\delta - \beta\gamma) \int R\left(\frac{\beta - \delta y^n}{\gamma y - \alpha}, y \right) \frac{y^{n-1}}{(\gamma y^n - \alpha)^2} dy}$$

το οποίο είναι ένα ολοκλήρωμα μιας ρητής (ως προς y) συνάρτησης.

ΑΣΚΗΣΗ 30 (β)

Να ευρεθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}dx$,

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $y=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$, τότε θα είναι

$$y^2=\frac{x-2}{x+2},\ x=2\frac{1+y^2}{1-y^2}\ \text{και}\ dx=\frac{8y}{\left(1-y^2\right)^2}dy$$

και τελικά, θα έχουμε

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}dx=\int \frac{1}{2}\frac{1-y^2}{1+y^2}y\frac{8y}{\left(1-y^2\right)^2}dy$$

$$=4\int \frac{y^2}{\left(1+y^2\right)\left(1-y^2\right)}dy=2\int \frac{\left(1+y^2\right)-\left(1-y^2\right)}{\left(1+y^2\right)\left(1-y^2\right)}dy$$

$$=2\int \frac{dy}{1-y^2}-2\int \frac{dy}{1+y^2}$$

$$=\int \frac{dy}{1-y}+\int \frac{dy}{1+y}-2\int \frac{dy}{1+y^2}$$

$$=-\ln\left|1-y\right|+\ln\left|1+y\right|-2\text{arctg}y+c$$

$$=\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|-2\text{arctg}y+c$$

$$=\ln\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}-2\text{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}+c.$$

Παρατήρηση

Αν στην υπό ολοκλήρωση συνάρτηση το κλάσμα εμφανίζεται σε περισσότερα του ενός ριζικά, τότε εφαρμόζεται η αντικατάσταση

$$y=\sqrt[\kappa]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$$

όπου κ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δεικτών των ριζικών.

ΑΣΚΗΣΗ 30 (δ)

Να ευρεθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sqrt[6]{x+1}+\sqrt[4]{x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}dx$,

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $\sqrt[12]{x+1}=t$ τότε θα είναι

$$x=t^{12}-1 \text{ και } dx=12t^{11}dt.$$

Επομένως, το ζητούμενο ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int \frac{\sqrt[6]{x+1}+\sqrt[4]{x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}dx=\int \frac{t^2+t^3+t^6}{t^8}12t^{11}dt$$

$$=12\int\left(t^9+t^6+t^5\right)dt=12\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}\right)+c$$

$$=12\left(\frac{(x+1)^{\frac{10}{12}}}{10}+\frac{(x+1)^{\frac{7}{12}}}{7}+\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{6}\right)+c.$$

V. Η μορφή $\mathbf{I} = \int \mathbf{x}^{\kappa}\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}^{\lambda} + \boldsymbol{\beta}\right)^{\boldsymbol{\mu}} \mathbf{dx}$

όπου $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Τα ολοκληρώματα αυτά ονομάζονται **διώνυμα ολοκληρώματα** και δεν μπορούν πάντα να υπολογισθούν.

Περιπτώσεις

1. Αν $\mu \in \mathbb{Z}$, τότε εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\boldsymbol{\rho}},$$

όπου ρ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των κ, λ.

2. Αν $\dfrac{\kappa+1}{\lambda} \in \mathbb{Z}$ και $\mu = \dfrac{\gamma}{\delta}$, όπου γ, δ πρώτοι προς αλλήλους, τότε εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}^{\lambda} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{y}^{\boldsymbol{\delta}}$$

3. Αν $\left(\dfrac{\kappa+1}{\lambda} + \mu\right) \in \mathbb{Z}$ και $\mu = \dfrac{\gamma}{\delta}$, όπου γ, δ πρώτοι προς αλλήλους, τότε εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός

$$\boldsymbol{\alpha} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\mathbf{x}^{\lambda}} = \mathbf{y}^{\boldsymbol{\delta}}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 31

Να ευρεθούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \sqrt[3]{x}\left(2\sqrt{x}+3\right)^2 dx$, β) $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx$, γ) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+3}}{\sqrt[4]{x^9}}dx$.

ΛΥΣΗ

α) Το ολοκλήρωμα αυτό είναι διώνυμο, δηλαδή της μορφής

$$\int x^k\left(\alpha x^\lambda+\beta\right)^\mu dx,$$

όπου

$$k=\frac{1}{3},\ \lambda=\frac{1}{2},\ \mu=2,\ \alpha=2 \text{ και } \beta=3.$$

Επειδή $\mu \in \mathbb{Z}$, χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός

$$x=y^6$$

(διότι ο αριθμός 6 είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των k, λ).

Τότε όμως είναι $dx=6y^5dy$ και

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{x}\left(2\sqrt{x}+3\right)^2 dx &= \int y^2\left(2y^3+3\right)^2 6y^5dy\\ &=6\int y^7\left(4y^6+12y^3+9\right)dy\\ &=24\frac{y^{14}}{14}+72\frac{y^{11}}{11}+54\frac{y^8}{8}+c\\ &=\frac{12}{7}x^{\frac{7}{3}}+\frac{72}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{27}{4}x^{\frac{4}{3}}+c.\end{aligned}$$

β) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx$.

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι επίσης διώνυμο με

$$k=-5,\ \lambda=4,\ \mu=\frac{1}{2},\ \alpha=-1 \text{ και } \beta=1.$$

Επειδή $\dfrac{k+1}{\lambda}=\dfrac{-5+1}{4}=-1\in\mathbb{Z}$,

εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $\alpha x^{\lambda}+\beta=y^{\delta}$,

όπου δ είναι ο παρονομαστής του μ.

Άρα στη συγκεκριμένη περίπτωση θέτουμε

$$-x^4+1=y^2,$$

οπότε

$$x=\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{4}} \text{ και } dx=-\frac{1}{2}\frac{y}{\left(1-y^2\right)^{\frac{3}{4}}}dy$$

και επομένως,

$$\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx=\int \frac{y}{\left(1-y^2\right)^{\frac{5}{4}}}\left(-\frac{1}{2}\frac{y}{\left(1-y^2\right)^{\frac{3}{4}}}\right)dy=-\frac{1}{2}\int \frac{y^2}{\left(1-y^2\right)^2}dy$$

$$=\frac{1}{8}\left(\int \frac{1}{1-y}dy-\int \frac{1}{(1-y)^2}dy+\int \frac{1}{1+y}dy-\int \frac{1}{(1+y)^2}dy\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(-\ln|1-y|-\frac{1}{1-y}+\ln|1+y|+\frac{1}{1+y}\right)+c$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^4}}{x^2}\right)-\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4}\right)+c.$$

γ) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+3}}{\sqrt[4]{x^9}}dx$.

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι επίσης διώνυμο, με

$$k=-\frac{9}{4},\ \lambda=\frac{1}{2},\ \mu=\frac{1}{2},\ \alpha=1 \text{ και } \beta=3.$$

Επειδή $\frac{k+1}{\lambda}+\mu=-2\in\mathbb{Z}$, θέτουμε

$$\alpha+\frac{\beta}{x^{\lambda}}=y^{\delta}$$

όπου δ είναι ο παρονομαστής του μ.

Άρα στη συγκεκριμένη περίπτωση θέτουμε

$$1+\frac{3}{x^{\frac{1}{2}}}=y^2,$$

οπότε

$$x=\frac{9}{\left(y^2-1\right)^2} \text{ και } dx=-\frac{36y}{\left(y^2-1\right)^3}dy$$

και επομένως,

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+3}}{\sqrt[4]{x^9}}dx=\int \frac{y}{\frac{81}{\left(y^2-1\right)^4}}\left(-\frac{36y}{\left(y^2-1\right)^3}\right)dy=-\frac{4}{9}\int\left(y^2-1\right)y^2dy$$

$$=-\frac{4}{9}\left(\frac{y^5}{5}-\frac{y^3}{3}\right)+c=-\frac{4}{45}\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{27}\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 22(β)

Να ευρεθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{2+\cos x}dx$.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $t = tg\frac{x}{2}$ τότε είναι

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

και $x = 2\mathrm{arctg}t$, οπότε $dx = 2(\mathrm{arctg}t)' dt = \frac{2}{1+t^2}dt$.

Κατόπιν τούτου, είναι $\frac{1}{2+\cos x} = \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{3+t^2}$

οπότε

$$\int \frac{1}{2+\cos x}dx = \int \frac{1+t^2}{3+t^2}\frac{2}{1+t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}d\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tg\frac{x}{2}\right) + c$$

.

ΑΣΚΗΣΗ 23(β)

Να ευρεθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $y = \sin x$, τότε προκύπτει ότι $dy = \cos x dx$ και επομένως, το ζητούμενο ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{y^2}{1-y^2} dy$$

$$= \int \left(-1 + \frac{1}{1-y^2} \right) dy$$

$$= -\int dy + \int \frac{dy}{1-y^2}$$

$$= -y + \frac{1}{2} \left(\int \frac{dy}{1-y} + \int \frac{dy}{1+y} \right)$$

$$= -y + \frac{1}{2} \left(-\ln|1-y| + \ln|1+y| \right) + c$$

$$= -y + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| + c$$

$$= -\sin x + \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + c.$$

ΑΣΚΗΣΗ 25

Να ευρεθεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int\frac{dx}{\alpha^2\sin^2 x+\beta^2\cos^2 x}$$

όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha\cdot\beta\neq 0$.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $y=\mathrm{tg}x$, τότε είναι

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+y^2},\ \sin^2 x=\frac{y^2}{1+y^2}\ \text{και}\ dx=\frac{1}{1+y^2}dy,$$

οπότε προκύπτει ότι

$$I=\int\frac{\frac{1}{1+y^2}}{\frac{\alpha^2y^2}{1+y^2}+\frac{\beta^2}{1+y^2}}dy=\int\frac{1}{\alpha^2y^2+\beta^2}dy$$

$$=\frac{1}{\beta^2}\int\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}y\right)^2+1}dy=\frac{1}{\alpha\beta}\int\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}y\right)^2+1}d\left(\frac{\alpha}{\beta}y\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}\mathrm{arctg}\left(\frac{\alpha}{\beta}y\right)+c=\frac{1}{\alpha\beta}\mathrm{arctg}\left(\frac{\alpha}{\beta}\mathrm{tg}x\right)+c.$$

ΑΣΚΗΣΗ 26

Να ευρεθούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{1}{2\sinh x + 3\cosh x + 3}$, β) $\int \sinh^3 x \cosh^2 x dx$,

γ) $\int \frac{1}{\cosh^3 x \sinh^2 x} dx$, δ) $\int \frac{1+\cosh^2 x}{\sinh^2 x} dx$.

ΛΥΣΗ

α) Αν τεθεί $t = \mathrm{tgh}\frac{x}{2}$, τότε

$$\sinh x = \frac{2t}{1-t^2},\ \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \text{ και } dx = \frac{2}{1-t^2}dt.$$

Κατόπιν τούτων, είναι

$$2\sinh x + 3\cosh x + 3 = \frac{4t+6}{1-t^2},$$

οπότε

$$\int \frac{1}{2\sinh x + 3\cosh x + 3} dx = \int \frac{1}{\frac{4t+6}{1-t^2}} \frac{2}{1-t^2} dt$$

$$= \int \frac{1}{2t+3} dt = \frac{1}{2}\ln|2t+3| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|2\mathrm{tgh}\frac{x}{2} + 3\right| + c.$$

β) $\int \sinh^3 x \cosh^2 x dx$

Αν τεθεί $y = \cosh x$, τότε είναι $dy = \sinh x dx$, οπότε

$$\begin{aligned}
\int \sinh^3 x \cosh^2 x dx &= \int \sinh^2 x \cosh^2 x \sinh x dx \\
&= \int \left(y^2 - 1\right) y^2 dy \\
&= \int y^4 dy - \int y^2 dy \\
&= \frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} + c \\
&= \frac{\cosh^5 x}{5} - \frac{\cosh^3 x}{3} + c.
\end{aligned}$$

γ) $\int \frac{1}{\cosh^3 x \sinh^2 x} dx$.

Αν τεθεί $y = \sinh x$, τότε είναι $dy = \cosh x dx$, οπότε

$$\int \frac{1}{\cosh^3 x \sinh^2 x} dx = \int \frac{\cosh}{\cosh^4 x \sin^2 x} dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{1}{\cosh^3 x \sinh^2 x} dx \overset{1}{=} \int \frac{1}{\left(1+y^2\right)^2 y^2} dy \qquad (1)$$

Επειδή

$$\frac{1}{\left(1+y^2\right)^2 y^2} = \frac{1+y^2-y^2}{\left(1+y^2\right)^2 y^2} = \frac{1}{\left(1+y^2\right) y^2} - \frac{1}{\left(1+y^2\right)^2}$$

$$= \frac{1+y^2-y^2}{\left(1+y^2\right) y^2} - \frac{1}{\left(1+y^2\right)^2}$$

$$= \frac{1}{y^2} - \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{\left(1+y^2\right)^2},$$

από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$\int \frac{1}{\cosh^3 x \sinh^2 x} dx = \int \frac{1}{y^2} dy - \int \frac{1}{1+y^2} dy - \int \frac{1}{\left(1+y^2\right)^2} dy$$

$$= -\frac{1}{y} - \operatorname{arctg} y - \frac{y}{2\left(1+y^2\right)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y + c$$

$$= -\frac{1}{\sinh x} - \frac{1}{2} \frac{\sinh x}{\cosh^2 x} - \frac{3}{2} \operatorname{arctg}\left(\sinh x\right) + c$$

δ) $\int \frac{1+\cosh^2 x}{\sinh^2 x} dx$.

Αν τεθεί $y = \mathrm{tghy}$, τότε

$$\sinh^2 y = \frac{y^2}{1-y^2},\ \cosh^2 y = \frac{1}{1-y^2} \text{ και } dx = \frac{dy}{1-y^2},$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\int \frac{1+\cosh^2 x}{\sinh^2 x} dx = \int \frac{1+\frac{1}{1-y^2}}{\frac{y^2}{1-y^2}} \frac{1}{1-y^2} dy$$

$$= \int \frac{2-y^2}{y^2\left(1-y^2\right)} dy$$

$$= \int \left(\frac{2}{y^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-y} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+y} \right) dy$$

$$= -\frac{2}{y} - \frac{1}{2}\ln|1-y| + \frac{1}{2}\ln|1+y| + c$$

$$= -\frac{2}{\mathrm{tghx}} + \ln\sqrt{\left|\frac{1+\mathrm{tghx}}{1-\mathrm{tghx}}\right|} + c.$$

ΑΣΚΗΣΗ 27(γ)

Να ευρεθεί το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{3x^2+2}\,dx$.

ΛΥΣΗ

Αν τεθεί $x=\sqrt{\frac{2}{3}}\sinh t$, $t\in\mathbb{R}$, τότε είναι

$$\sqrt{3x^2+2}=\sqrt{2\sinh^2 t+2}=\sqrt{2}\cosh t \text{ και } dx=\sqrt{\frac{2}{3}}\cosh t dt,$$

οπότε

$$\int \sqrt{3x^2+2}\,dx=\int \sqrt{2}\cosh t\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cosh t dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\int (1+\cosh 2t)dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\int 1dt+\frac{1}{2}\int \cosh 2t d(2t)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\sinh 2t\right)+c_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(t+\sinh t\cosh t)+c_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arcsinh}\sqrt{\frac{3}{2}}x+\sqrt{\frac{3}{2}}x\sqrt{\frac{3x^2+2}{2}}\right)+c_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x+\sqrt{\frac{3}{2}x^2+1}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}x\sqrt{3x^2+2}\right)+c_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ln\left(\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+2}\right)\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{3x^2+2}+c.$$

ΑΣΚΗΣΗ 28

Να ευρεθεί το ολοκλήρωμα $I=\int\sqrt{x^2-9}dx$, όπου $x>3$, με τη βοήθεια της αντικατάστασης

α) $x=3\cosh t$, $t>0$, β) $x=\dfrac{3}{\cos t}$, $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $x=3\cosh t$, προκύπτει ότι

$$dx=3\sinh t dt \text{ και } \sqrt{x^2-9}=\sqrt{9\cosh^2 t-9}=3\sinh t,$$

οπότε

$$\begin{aligned}
I&=\int 3\sinh t\cdot 3\sinh t dt\\
&=\frac{9}{2}\int(\cosh 2t-1)dt\\
&=\frac{9}{4}\int\cosh 2t d(2t)-\frac{9}{2}\int 1dt\\
&=\frac{9}{4}\sinh 2t-\frac{9}{2}t+c_1\\
&=\frac{9}{2}\cosh t\sinh t-\frac{9}{2}t+c_1\\
&=\frac{9}{2}\frac{x}{3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}-\frac{9}{2}\operatorname{arccos h}\frac{x}{3}+c_1\\
&=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\ln\left(\frac{x}{3}+\sqrt{\frac{x^2}{9}-1}\right)+c_1\\
&=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)+c.
\end{aligned}$$

β) Επειδή $x = \dfrac{3}{\cos t}$, προκύπτει ότι

$$dx = 3\frac{\operatorname{tg}t}{\cos t}dt$$

και

$$\sqrt{x^2-9} = \sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9} = 3\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{3|\sin t|}{|\cos t|} = 3\operatorname{tg}t,$$

οπότε

$$\begin{aligned}
I &= \int 3\operatorname{tg}t\frac{3\operatorname{tg}t}{\cos t}dt \\
&= 9\int\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)\frac{1}{\cos t}dt \\
&= 9\left(\int\frac{1}{\cos^3 t}dt - \int\frac{1}{\cos t}dt\right) \\
&= \frac{9}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}t}{\cos t} - \ln\left(\operatorname{tg}t + \frac{1}{\cos t}\right)\right) + c_1 \\
&= \frac{9}{2}\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\frac{x}{3} - \frac{9}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} + \frac{x}{3}\right) + c_1 \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right) + c.
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 30 (α, γ)

Να ευρεθούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{\sin\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}dx$, γ) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)(x-2)^2}}$.

ΛΥΣΗ

α) Αν τεθεί $y=\sqrt{x+2}$, τότε θα είναι

$$x=y^2-2,\ dx=2ydy$$

οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}dx &= \int \frac{\sin y}{y}2ydy \\ &= -2\cos y+c \\ &= -2\cos\sqrt{x+2}+c.\end{aligned}$$

γ) Αν τεθεί $y=\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{\frac{1}{3}}$, τότε θα είναι

$$x=2\frac{y^3+1}{y^3-1} \text{ και } dx=-\frac{12y^2}{\left(y^3-1\right)^2}dy,$$

οπότε

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)(x-2)^2}}=\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}}=\int\frac{-\frac{12y^2}{\left(y^3-1\right)^2}}{\frac{4}{y^3-1}y}dy,$$

δηλαδή

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)(x-2)^2}}=-3\int\frac{y}{y^3-1}dy \qquad (1)$$

Αν τεθεί

$$\frac{y}{y^3-1}=\frac{A}{y-1}+\frac{By+\Gamma}{y^2+y+1},$$

τότε θα είναι

$$y=A\left(y^2+y+1\right)+\left(y-1\right)\left(By+\Gamma\right)\Leftrightarrow$$
$$y=(A+B)y^2+(A-B+\Gamma)y+(A-\Gamma).$$

Από την παραπάνω ταυτότητα προκύπτει ότι

$$\left\{\begin{array}{c} A+B=0 \\ A-B+\Gamma=1 \\ A-\Gamma=0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} A=1/3 \\ B=-1/3 \\ \Gamma=1/3 \end{array}\right\}.$$

Άρα τελικά, έχουμε

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2(x-2)}} = -\int \frac{dy}{y-1} + \int \frac{y-1}{y^2+y+1}dy$$

$$= -\ln|y-1| + \int \frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \frac{3}{2}\int \frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= -\ln|y-1| + \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\int \frac{d\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} - \frac{3}{2}\frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{d\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}$$

$$= -\ln|y-1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right) + c$$

$$= -\ln\left|\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right)$$

$$-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\right)\right) + c.$$

ΔΙΑΛΕΞΗ 3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Περιεχόμενα διάλεξης:

Διαφορικές εξισώσεις

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Κάθε συναρτησιακή εξίσωση που περιέχει την ανεξάρτητη μεταβλητή x, την άγνωστη συνάρτηση (εξηρτημένη μεταβλητή) y και ορισμένες παραγώγους αυτής ονομάζεται (**συνήθης**) **διαφορική εξίσωση**.
Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\mathbf{F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0}$$

όπου F είναι μια συνάρτηση $n+2$ μεταβλητών.

Τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου που εμφανίζεται σ' αυτή.
Βαθμός μιας διαφορικής εξίσωσης είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης της παραγώγου που καθορίζει την τάξη της.

Έτσι, η εξίσωση

$$e^{3x}\left(y''\right)^3 + 2\sin x\, y'' - 3x^2 y' + xy^3 - x\ln\left(x^2+1\right) = 0$$

είναι μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και τρίτου βαθμού.

Λύση ή **μερική λύση** ή **ολοκλήρωμα μιας διαφορικής εξίσωσης** ονομάζεται κάθε συνάρτηση που την επαληθεύει.

Έτσι, η συνάρτηση $y = e^x$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Το σύνολο των λύσεων μιας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται **γενική λύση.**

Στις περισσότερες περιπτώσεις, η γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης εκφράζεται από ένα τύπο που περιέχει μια ή περισσότερες σταθερές.

Για παράδειγμα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = -\frac{y}{x}, \text{ όπου } x \neq 0$$

είναι η συνάρτηση $y = \frac{c}{x} / \mathbb{R}^*$, όπου $c \in \mathbb{R}$.

Πολλές φορές η γενική (ή μερική) λύση μιας διαφορικής εξίσωσης δεν δίνεται με άμεσο τύπο, αλλά περιγράφεται με τη βοήθεια μιας εξίσωσης.

$$\varphi(x, y) = 0$$

όπου φ είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Στην περίπτωση αυτή, λέγεται ότι η λύση δίδεται σε **πεπλεγμένη μορφή.**

Για παράδειγμα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = \frac{e^{-y}}{y^2 + y + 1}(\sin x + \cos x)$$

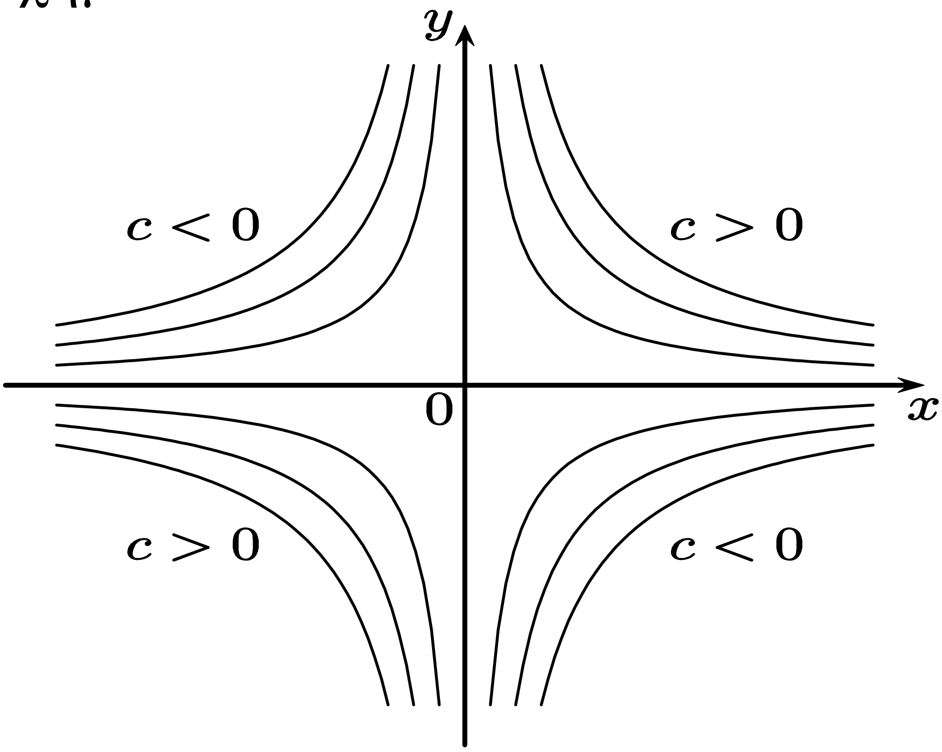
δίδεται σε πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση

$$\left(y^2 - y + 2\right)e^y + \cos x - \sin x - c = 0$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

Καμπύλη ολοκλήρωσης ή **ολοκληρωτική γραμμή** μιας διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται κάθε επίπεδη καμπύλη που αντιστοιχεί σε μια λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης.

Οι καμπύλες ολοκλήρωσης της διαφορικής εξίσωσης $y' = -\frac{y}{x}$ είναι οι υπερβολές $y = \frac{c}{x} \,/\, \mathbb{R}^*$ που δίδονται στο επόμενο σχήμα:



Σε πολλές περιπτώσεις, αναζητείται μια συγκεκριμένη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης η οποία ικανοποιεί μια ή περισσότερες σχέσεις, που ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**.

Έτσι, για την εύρεση της λύσης της εξίσωσης

$$y' = -\frac{y}{x}\ ,\ y(2) = 4$$

αρχικά ευρίσκεται η γενική της λύση $\left(y = \frac{c}{x}\right)$, και στη συνέχεια υπολογίζεται η σταθερά c με τη βοήθεια της αρχικής συνθήκης $y(2) = 4$, δηλαδή

$$y(2) = 4 \Leftrightarrow \frac{c}{2} = 4 \Leftrightarrow c = 8.$$

Άρα η ζητούμενη λύση είναι η συνάρτηση $y = \frac{8}{x} / \mathbb{R}^{*}$.

Θα μελετηθούν, σαν εφαρμογές των αορίστων ολοκληρωμάτων, οι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης και πρώτου βαθμού, οι οποίες γράφονται στη μορφή

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

όπου φ είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι διαφορικές εξισώσεις της μορφής.

$$\mathbf{\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}}$$

(όπου f,g είναι δύο συναρτήσεις μιας μεταβλητής), οι οποίες ονομάζονται **χωριζομένων μεταβλητών.** Ο λόγος που ονομάζονται έτσι είναι ότι για αυτές τις διαφορικές εξισώσεις είναι

$$g(y)dy=f(x)dx$$

απ' όπου με μια απλή ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$\int g(x)dy=\int f(x)dx.$$

Έτσι, μετά τον υπολογισμό των παραπάνω ολοκληρωμάτων προκύπτει άμεσα η γενική λύση τους.

ΑΣΚΗΣΗ 32(α)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = -y\left(x^2+1\right),\ y(-1)=1.$$

ΛΥΣΗ

Από τη δοσμένη εξίσωση, για $y \neq 0$ προκύπτει ότι

$$\frac{dy}{y} = -\left(x^2+1\right)dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int \left(x^2+1\right)dx$$

$$\ln|y| = -\left(\frac{x^3}{3}+x\right)+\ln\kappa, \qquad \text{όπου } \kappa>0.$$

$$|y| = e^{-\left(\frac{x^3}{3}+x\right)+\ln\kappa} = e^{\ln\kappa}e^{-\left(\frac{x^3}{3}+x\right)} = \kappa e^{-\left(\frac{x^3}{3}+x\right)}$$

Τότε όμως, είναι $y = ce^{-\left(\frac{x^3}{3}+x\right)}$, όπου $c=\pm\kappa\in\mathbb{R}^*$.
Επιπλέον, η συνάρτηση $y=0/\mathbb{R}$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση και μπορεί να περιληφθεί στη γενική λύση για $c=0$. Έτσι, η γενική λύση είναι

$$y = ce^{-\left(\frac{x^3}{3}+x\right)}, \qquad \text{όπου } c\in\mathbb{R}.$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $y(-1)=1$ προκύπτει ότι $1=ce^{4/3} \Leftrightarrow c=e^{-4/3}$, οπότε η ζητούμενη λύση είναι $y=e^{-\frac{1}{3}\left(x^3+3x+4\right)}$.

ΑΣΚΗΣΗ 36

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x,$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $y = e^x$ είναι λύση της δοσμένης εξίσωσης. Για $y \neq e^x$, τίθεται, $y = e^x + \frac{1}{z}$, οπότε προκύπτει ότι

$$\frac{dy}{dx} = e^x - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

Κατόπιν τούτων, η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$$e^x - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = \left(e^x + \frac{1}{z}\right)^2 - 2e^x\left(e^x + \frac{1}{z}\right) + e^{2x} + e^x \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = e^{2x} + 2\frac{e^x}{z} + \frac{1}{z^2} - 2e^{2x} - 2\frac{e^x}{z} + e^{2x} \Rightarrow .$$

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z^2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -1 \Rightarrow \int dz = -\int dx \Rightarrow z = -x + c$$

Επομένως, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = e^x + \frac{1}{-x+c} \text{ και } y = e^x.$$

8. ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Μια συνάρτηση δύο μεταβλητών f/A, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ονομάζεται **ομογενής βαθμού κ** αν ισχύει η σχέση

$$\mathbf{f(tx,ty) = t^{\kappa} f(x,y)}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $(tx,ty) \in A$.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f/\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

$$f(x,y) = 2x^3y - \frac{4}{x}y^5 + x^2y^2 + 2\frac{x^6}{y^2}$$

είναι ομογενής βαθμού 4.

Κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

όπου οι συναρτήσεις f,g είναι ομογενείς ίδιου βαθμού ομογένειας, ονομάζεται **ομογενής (διαφορική) εξίσωση**.

Οι ομογενείς εξισώσεις ανάγονται σε χωριζομένων μεταβλητών με τη βοήθεια του μετασχηματιμού

$$\mathbf{y = u \cdot x}.$$

Πραγματικά, η ομογενής εξίσωση

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

δίδει, θέτοντας $y=u\cdot x$,

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{f(x,ux)}{g(x,ux)}=\frac{x^{\kappa}f(1,u)}{x^{\kappa}g(1,u)}$$

και τελικά

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\left(\frac{f(1,u)}{g(1,u)}-u\right)$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών.

ΑΣΚΗΣΗ 38(α)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$2xy\frac{dy}{dx}-\left(x^2+3y^2\right)=0.$$

ΛΥΣΗ

Η δοσμένη διαφορική εξίσωση είναι ομογενής δευτέρου βαθμού, αφού οι συναρτήσεις $f\left(x,y\right)=x^2+3y^2$ και $g\left(x,y\right)=2xy$ είναι ομογενείς δευτέρου βαθμού.

Θέτοντας $y=ux$, προκύπτει ότι

$$2xux\left(x\frac{du}{dx}+u\right)-\left(x^2+3u^2x^2\right)=0$$

$$2ux\frac{du}{dx}+2u^2-1-3u^2=0$$

$$2ux\frac{du}{dx}=u^2+1$$

$$\int\frac{2u}{u^2+1}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\ln\left(u^2+1\right)=\ln|x|+\ln c$$

$$u^2+1=c|x|$$

$$u=\sqrt{c|x|-1} \text{ ή } u=-\sqrt{c|x|-1} \text{ όπου } c>0.$$

Άρα η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης περιλαμβάνει όλες τις συναρτήσεις της μορφής:

$$y=x\sqrt{c|x|-1} \text{ ή } =-x\sqrt{c|x|-1}, \text{ όπου } c>0.$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ:

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}=\frac{\boldsymbol{\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1}}{\boldsymbol{\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2}} \qquad (1)$$

όπου $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2 \in \mathbb{R}$.

Οι διαφορικές εξισώσεις τη παραπάνω μορφής ανάγονται σε ομογενείς, ή χωριζομένων μεταβλητών. Συγκεκριμένα, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}\neq 0$ τότε το σύστημα

$$\left\{\begin{matrix}\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=0\\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2=0\end{matrix}\right\}$$

έχει μοναδική λύση $\left(x_0,y_0\right)$.

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό

$$\mathbf{X=x-x_0 \text{ και } Y=y-y_0}$$

η εξίσωση μετασχηματίζεται σε ομογενή.

Πραγματικά, από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι

$$\frac{dY}{dX}=\frac{\alpha_1\left(X+x_0\right)+\beta_1\left(Y+y_0\right)+\gamma_1}{\alpha_2\left(X+x_0\right)+\beta_2\left(Y+y_o\right)+\gamma_2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{\alpha_1 X+\beta_1 Y}{\alpha_2 X+\beta_2 Y},$$

η οποία είναι ομογενής.

ΑΣΚΗΣΗ 41

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x+3y-7}{2x-y+5}.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή $\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-4\neq 0$, το αλγεβρικό σύστημα

$$\begin{cases}-2x+3y-7=0\\ 2x-y+5=0\end{cases}$$

έχει μια και μοναδική λύση $\left(x_0,y_0\right)=\left(-2,1\right)$.

Αν τεθεί $X=x+2$ και $Y=y-1$ (1)

η αρχική εξίσωση γίνεται

$$\frac{dY}{dX}=\frac{-2X+3Y}{2X-Y}.$$

Επειδή η τελευταία εξίσωση είναι ομογενής χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό

$$Y=ZX \qquad (2)$$

οπότε

$$X\frac{dZ}{dX}+Z=\frac{-2+3Z}{2-Z}$$

$$X\frac{dZ}{dX}=\frac{Z^2+Z-2}{2-Z}.$$

Αν $Z \neq 1$ και $Z \neq -2$, προκύπτει ότι

$$\int \frac{2-Z}{Z^2+Z-2} dZ = \int \frac{dX}{X}$$

$$\frac{1}{3}\left(\int \frac{dZ}{Z-1} - 4\int \frac{dZ}{Z+2} \right) = \int \frac{dX}{X}$$

$$\frac{1}{3}\ln\left(\frac{|Z-1|}{(Z+2)^4} \right) = \ln|X| + \ln k$$

όπου $k > 0$. Άρα,

$$\frac{Z-1}{(Z+2)^4} = cX^3 \qquad (3)$$

όπου $c = k^3 \in \mathbb{R}^*$.

Από τους μετασχηματισμούς (1) και (2) προκύπτει ότι $Z = \dfrac{y-1}{x+2}$, οπότε από την εξίσωση (3) παίρνουμε ότι

$$\frac{y-x-3}{(x+2x+3)^4} = c, \qquad c \in \mathbb{R}^*.$$

Επιπλέον, εύκολα επαληθεύεται ότι οι συναρτήσεις $y = x+3$ και $y = -2x-3$ που αποκλείσθηκαν λόγω των περιορισμών $Z \neq 1$ και $Z \neq -2$ αντίστοιχα είναι και αυτές λύσεις της αρχικής εξίσωσης, οπότε η γενική λύση αποτελείται από τις συναρτήσεις της μορφής

$$\frac{y-x-3}{(y+2x+3)^4} = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

και την συνάρτηση $y = -2x-3$.

2. Αν $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$, τότε είναι $\lambda = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} = \dfrac{\beta_2}{\beta_1}$.

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό

$$z = \alpha_1 x + \beta_1 y$$

η εξίσωση (1) μετασχηματίζεται σε χωριζομένων μεταβλητών.

Πραγματικά, από την εξίσωση (1) έπεται ότι

$$\frac{dz}{dx} = \alpha_1 + \beta_1 \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dz}{dx} = \alpha_1 + \beta_1 \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\lambda\alpha_1 x + \lambda\beta_1 x + \gamma_2}$$

οπότε τελικά προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{dz}{dx} = \alpha_1 + \beta_1 \frac{z + \gamma_1}{\lambda z + \gamma_2},$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών.

ΑΣΚΗΣΗ 42

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y + 5}{6x + 3y + 1}$.

ΛΥΣΗ

Επειδή $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$, χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $z = 2x + y$, οπότε η αρχική εξίσωση γίνεται

$$\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{z + 5}{3z + 1}$$

$$\frac{dz}{dx} = 7\frac{z + 1}{3z + 1}$$

$$\frac{1}{7}\int \frac{3z + 1}{z + 1}dz = \int 1dx$$

Αν $z \neq -1$, προκύπτει ότι

$$\frac{3}{7}\int dz - \frac{2}{7}\int \frac{dz}{z + 1} = \int 1dx$$

$$\frac{3}{7}z - \frac{2}{7}\ln|z + 1| = x + c$$

$$\frac{3}{7}(2x + y) - \frac{2}{7}\ln|2x + y + 1| = x + c.$$

Τέλος, εύκολα επαληθεύεται ότι η συνάρτηση $y = -2x - 1$, που αποκλείσθηκε λόγω του περιορισμού $z \neq -1$, είναι και αυτή λύση της διαφορικής εξίσωσης.

9. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})\mathbf{y} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \qquad (1)$$

με $\varphi, \sigma / A \subseteq \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, ονομάζεται **γραμμική**.

1η Μέθοδος

Ζητείται να προσδιορισθεί μια θετική συνάρτηση $I(x)/A$, η οποία ονομάζεται **ολοκληρωτικός παράγοντας**, τέτοια ώστε το πρώτο μέλος της εξίσωσης

$$I(x)\frac{dy}{dx} + I(x)\varphi(x)y = \sigma(x)I(x) \qquad (2)$$

να είναι ίσο με την παράγωγο του γινομένου $I(x)\cdot y$, δηλαδή

$$\frac{d}{dx}\Big(I(x)y\Big) = I(x)\frac{dy}{dx} + I(x)\varphi(x)y \Leftrightarrow$$

$$I(x)\frac{dy}{dx} + \frac{dI(x)}{dx}y = I(x)\frac{dy}{dx} + I(x)\varphi(x)y$$

Τούτο συμβαίνει όταν

$$\frac{dI(x)}{dx} = I(x)\varphi(x)$$

οπότε

$$\int \frac{dI(x)}{I(x)} = \int \varphi(x)dx$$

$$\ln I(x) = \int \varphi(x)dx$$

και τελικά,

$$I(x) = e^{\int \varphi(x)dx}.$$

Κατόπιν τούτων, από την εξίσωση (2) προκύπτει ότι

$$\frac{d\big(I(x)\cdot y\big)}{dx} = \sigma(x)I(x)$$

οπότε τελικά,

$$y = \frac{\int \sigma(x)I(x)dx}{I(x)}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 43(i)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=6x^3$$

με τη βοήθεια ενός ολοκληρωτικού παράγοντα.

ΛΥΣΗ

Ζητείται να προσδιορισθεί μια θετική συνάρτηση I έτσι ώστε το πρώτο μέλος της ισοδύναμης εξίσωσης

$$I(x)\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}I(x)y=6x^3I(x) \qquad (1)$$

να είναι ίσο με την παράγωγο του γινομένου $I(x)y$.

Τούτο όμως συμβαίνει όταν

$$\frac{dI}{dx}=\frac{2}{x}I$$

$$\int\frac{dI}{I}=\int\frac{2}{x}dx$$

$$\ln I=\ln x^2$$

$$I=x^2.$$

Κατόπιν τούτου, η εξίσωση (1) γίνεται

$$\frac{d}{dx}\left(x^2y\right)=6x^5$$

$$x^2y=\int 6x^5dx$$

$$x^2y=x^6+c$$

$$y = x^4 + \frac{c}{x^2},\ c \in \mathbb{R}.$$

2η Μέθοδος

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στη γενική θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων τάξης n.

Αρχικά επιλύεται η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} + \varphi(x)y = 0 \quad (3)$$

η οποία ονομάζεται **γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση** και είναι χωριζομένων μεταβλητών.

Έτσι, από την (3) για $y \neq 0$ προκύπτει ότι

$$\frac{dy}{y} = -\varphi(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \varphi(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int \varphi(x)dx + \ln k,\ (\text{όπου}\ \kappa > 0)$$

$$|y| = \kappa e^{-\int \varphi(x)dx}$$

$$y = c e^{-\int \varphi(x)dx}$$

όπου $c = \pm\kappa \in \mathbb{R}^*$ και τελικά, αν συμπεριληφθεί και η προφανής λύση $y = 0$ της εξίσωσης (3), προκύπτει ότι η γενική λύση της γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι $y = c e^{-\int \varphi(x)dx}$, όπου $c \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 9.1
Η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (1) ισούται με το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (3) και μιας μερικής λύσης $\psi(x)$ της (1), δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathbf{y = c e^{-\int \varphi(x)dx} + \psi(x).}$$

Για την εύρεση μιας μερικής λύσης $\psi(x)$ της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (1) ακολουθείται η **μέθοδος του Lagrange**.

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, μια μερική λύση της (1) έχει τη μορφή

$$\psi(x) = g(x)e^{-\int \varphi(x)dx}$$

όπου $g(x)$ μια συνάρτηση μιας μεταβλητής.
Προκειμένου η συνάρτηση $\psi(x)$ να είναι λύση της (1), πρέπει να ισχύει ότι

$$\frac{d\psi}{dx} + \varphi(x)\psi(x) = \sigma(x).$$

Τότε όμως, επειδή η συνάρτηση $y_0(x) = e^{-\int \varphi(x)dx}$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (3), προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dx}\left(g\cdot y_0\right)+\varphi(x)g(x)y_0(x)=\sigma(x)$$

$$y_0(x)\frac{dg}{dx}+g(x)\left[\frac{dy_0}{dx}+\varphi(x)y_0(x)\right]=\sigma(x)$$

$$e^{-\int\varphi(x)dx}\frac{dg}{dx}+0=\sigma(x)$$

$$\frac{dg}{dx}=\sigma(x)e^{\int\varphi(x)dx}$$

$$g(x)=\int\sigma(x)e^{\int\varphi(x)dx}dx$$

και τελικά,

$$\psi(x)=e^{-\int\varphi(x)dx}\int\sigma(x)e^{\int\varphi(x)dx}dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 43(ii)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = 6x^3$$

σύμφωνα με τη γενική θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, επιλύεται η αντίστοιχη ομογενής διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = 0 \qquad (2)$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών.

Για $y \neq 0$ προκύπτει ότι

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{2}{x} dx$$

$$\ln|y| = -\ln x^2 + \ln k$$

$$y = \frac{c}{x^2}$$

όπου $c = \pm k \in \mathbb{R}^*$.

Επειδή η συνάρτηση $y = 0$, που αποκλείσθηκε λόγω του περιορισμού $y \neq 0$, είναι επίσης λύση της εξίσωσης (2), η γενική λύση της (2) δίδεται από τον τύπο

$$y = \frac{c}{x^2},\ c \in \mathbb{R}.$$

Η γενική λύση της αρχικής εξίσωσης είναι το άθροισμα μιας μερικής λύσης της και της γενικής λύσης της (2). Γι' αυτό πρέπει να ευρεθεί μια μερική λύση της αρχικής εξίσωσης.
Τούτο επιτυγχάνεται με τη μέθοδο του Lagrange, κατά την οποία η ζητούμενη μερική λύση θα είναι της μορφής

$$\psi(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

Τότε όμως, προκύπτει ότι

$$\frac{1}{x^2}\frac{dg}{dx} - \frac{2}{x^3}g + \frac{2}{x^3}g = 6x^3$$

$$\frac{dg}{dx} = 6x^5$$

$$g(x) = x^6$$

$$\psi(x) = x^4.$$

Άρα η γενική λύση της αρχικής εξίσωσης δίδεται από τον τύπο

$$y = x^4 + \frac{c}{x^2},\ c \in \mathbb{R}.$$

Εξίσωση του Bernoulli

Κάθε διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\mathbf{\frac{dy}{dx}+\varphi(x)y=\sigma(x)y^{\alpha}}$$

με $\varphi,\sigma/A\subseteq\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και $\alpha\in\mathbb{R}$ ονομάζεται **εξίσωση του Bernoulli**.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Για $\alpha=0$ (αντ. $\alpha=1$) η εξίσωση είναι γραμμική (αντ. χωριζομένων μεταβλητών) και επιλύεται κατά τα γνωστά.

2. Για $\alpha\neq 0,1$ εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός

$$\mathbf{u=y^{1-\alpha}}$$

οπότε $y=u^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1-\alpha}u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\dfrac{du}{dx}$ και για $y\neq 0$ η διαφορική εξίσωση του Bernoulli γίνεται

$$\frac{1}{1-\alpha}u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{du}{dx}+\varphi(x)u^{\frac{1}{1-\alpha}}=\sigma(x)u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{du}{dx}+(1-\alpha)\varphi(x)u=(1-\alpha)\sigma(x),$$

η οποία είναι γραμμική.

ΑΣΚΗΣΗ 45

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\frac{y^2\ln x}{x^3}, \text{ όπου } x>0.$$

ΛΥΣΗ

Αρχικά παρατηρείται ότι η συνάρτηση $y=0$ είναι μια λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης. Επειδή αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση του Bernoulli, για $y\neq 0$ εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός $u=y^{-1}$, οπότε προκύπτει ότι

$$y=u^{-1} \text{ και } \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}.$$

Κατόπιν τούτων, η δοσμένη διαφορική εξίσωση γίνεται

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}-\frac{1}{ux}=\frac{1}{u^2}\frac{\ln x}{x^3}$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}=-\frac{\ln x}{x^3} \qquad (1)$$

Η τελευταία διαφορική εξίσωση είναι γραμμική και θα λυθεί με τη βοήθεια ενός ολοκληρωτικού παράγοντα I.

Πραγματικά, αναζητείται συνάρτηση $I>0$ τέτοια ώστε το πρώτο μέλος της ισοδύναμης εξίσωσης

$$I\frac{du}{dx}+\frac{I}{x}u=-\frac{\ln xI}{x^3} \qquad (2)$$

να είναι ίσο με την παράγωγο της Iu.

Τούτο συμβαίνει όταν

$$\frac{dI}{dx}=\frac{I}{x}$$
$$\int\frac{dI}{I}=\int\frac{dx}{x}$$
$$\ln I=\ln x$$
$$I=x.$$

Κατόπιν τούτων, η εξίσωση (2) γίνεται

$$\frac{d(ux)}{dx}=-\frac{\ln x}{x^2}$$
$$ux=-\int\frac{\ln x}{x^2}dx \tag{3}$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος χρησιμοποιείται παραγοντική ολοκλήρωση.

Πραγματικά,

$$\int\frac{\ln x}{x^2}=-\int\left(\frac{1}{x}\right)'\ln x dx=-\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{1}{x}(\ln x)'dx$$
$$=-\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}(\ln x+cx+1)$$

όπου $c\in\mathbb{R}$.

Επομένως, από τη σχέση (3) προκύπτει ότι

$$u=\frac{\ln x+cx+1}{x^2}$$

και τελικά, η γενική λύση της δοσμένης διαφορικής εξίσωσης αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις της μορφής

$$y=0 \text{ ή } y=\frac{x^2}{\ln x+cx+1}, \text{ όπου } c\in\mathbb{R}.$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 32(β)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-y}}{y^2 + y + 1}(\sin x + \cos x).$$

ΛΥΣΗ

Από τη δοσμένη εξίσωση προκύπτει ότι

$$\left(y^2 + y + 1\right)e^y dy = (\sin x + \cos x)dx$$

οπότε

$$\int \left(y^2 + y + 1\right)e^y dy = \int (\sin x + \cos x)dx \qquad (1)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (1) υπολογίζεται με παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\begin{aligned}
\int \left(y^2 + y + 1\right)e^y dy &= \int \left(y^2 + y + 1\right)\left(e^y\right)' dy \\
&= \left(y^2 + y + 1\right)e^y - \int (2y + 1)e^y dy \\
&= \left(y^2 + y + 1\right)e^y - \int (2y + 1)\left(e^y\right)' dy \\
&= \left(y^2 + y + 1\right)e^y - (2y + 1)e^y + 2\int e^y dy \\
&= \left(y^2 - y + 2\right)e^y + c_1.
\end{aligned}$$

Επειδή $\int (\sin x + \cos x)dx = -\cos x + \sin x + c_2$,

από τη σχέση (1) προκύπτει η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης σε πεπλεγμένη μορφή:

$$\left(y^2 - y + 2\right)e^y = -\cos x + \sin x + c, \text{ όπου } c = c_2 - c_1 \in \mathbb{R}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 33

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{\sin 2x\left(1+e^{y}\right)}{1+\cos x},\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

ΛΥΣΗ

Από τη δοσμένη εξίσωση προκύπτει ότι

$$\frac{dy}{1+e^{y}} = \frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx \qquad (1)$$

Για τον υπολογισμό του πρώτου ολοκληρώματος της (1) θέτουμε $\xi = 1+e^{y}$, οπότε θα είναι

$$y = \ln\left(\xi - 1\right),\ dy = \frac{1}{\xi - 1}d\xi$$

και συνεπώς,

$$\int\frac{dy}{1+e^{y}} = \int\frac{d\xi}{\xi\left(\xi-1\right)} = \int\frac{1}{\xi-1}d\xi - \int\frac{1}{\xi}d\xi$$
$$= \ln\left(\xi-1\right) - \ln\xi + c_1$$

οπότε

$$\int\frac{dy}{1+e^{y}} = y - \ln\left(1+e^{y}\right) + c_1 \qquad (2)$$

Για τον υπολογισμό του δεύτερου ολοκληρώματος της (1) θέτουμε

$$t = tg\frac{x}{2},\ \text{οπότε θα είναι } dx = \frac{2}{1+t^{2}}dt \text{ και}$$

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos x}=\frac{2\cos x\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\cos x\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=2\cos x\cdot \mathrm{tg}\frac{x}{2}=2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=2t\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Συνεπώς,

$$\int\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx=\int 2t\frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{2}{1+t^2}dt\Leftrightarrow$$

$$\int\frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx=4\int\frac{t\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}dt \qquad (3)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αντικατάσταση $z=1+t^2$, οπότε $dz=2tdt$
και συνεπώς,

$$\int\frac{t\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2-z}{z^2}dz=-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\ln z+c_2,$$

δηλαδή

$$\int\frac{t\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}=-\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+c_2 \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx = -\frac{4}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 2\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)+c_2$$

$$= -4\cos^2\frac{x}{2}+2\ln\left(\cos^2\frac{x}{2}\right)+c_2$$

οπότε

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx = -2\cos x + 2\ln(1+\cos x)+c_2-2(1+\ln 2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (5) προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις

$$y-\ln(1+e^y) = -2\cos x+2\ln(1+\cos x)-\ln c$$

$$\ln e^y-\ln(1+e^y) = -\ln(e^{2\cos x})+\ln(1+\cos x)^2-\ln c$$

$$\ln\left(\frac{e^y}{1+e^y}\right) = \ln\left(\frac{(1+\cos x)^2}{ce^{2\cos x}}\right).$$

Επομένως, τελικά, η γενική λύση της εξίσωσης δίδεται από τον τύπο

$$y = -\ln\left(\frac{ce^{2\cos x}}{(1+\cos x)^2}-1\right)$$

όπου $c>0$. Τέλος, από την $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ προκύπτει ότι

$$0=-\ln(c-1) \Leftrightarrow c=2$$

και συνεπώς η ζητούμενη συνάρτηση έχει τύπο

$$y = -\ln\left(\frac{2e^{2\cos x}}{(1+\cos x)^2}-1\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 37

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(x^2-y^4\right)\frac{dy}{dx}=xy,$$

με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $t=x^{-2}y^4$.

ΛΥΣΗ

Προφανώς, η συνάρτηση $y=0$ είναι μια λύση της εξίσωσης.

Για $y\neq 0$ είναι $t=x^{-2}y^4>0$ και $y=t^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{2}}$, οπότε προκύπτει ότι

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{dx}+\frac{1}{2}t^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{2}}.$$

Κατόπιν τούτων, η δοσμένη διαφορική εξίσωση γίνεται

$$\left(x^2-tx^2\right)\left(\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{dx}+\frac{1}{2}t^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{2}}\right)=xt^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{2}}$$

$$x^2(1-t)t^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}t^{-1}x\frac{dt}{dx}+\frac{1}{2}\right)=x^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{1-t}{t}x\frac{dt}{dx}+2(1-t)=4$$

$$\frac{1-t}{t}x\frac{dt}{dx}=2(1+t),$$

οπότε προκύπτουν οι ισοδύναμες σχέσεις

$$\int \frac{1-t}{t(1+t)}dt = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{1+t}\right)dt = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln t - 2\ln(t+1) = 2\ln|x| + \ln c, \text{ (όπου } c>0)$$

$$\ln\left(\frac{t}{(1+t)^2}\right) = \ln(cx^2)$$

$$\frac{t}{(1+t)^2} = cx^2$$

και τελικά, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης σε πεπλεγμένη μορφή είναι

$$\frac{x^{-2}y^4}{\left(1+x^{-2}y^4\right)^2} = cx^2$$

όπου $c \geq 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 38(β)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(2y^2 - x^2\right)dy + 3xydx = 0.$$

ΛΥΣΗ

β) Η δοσμένη διαφορική εξίσωση είναι ομογενής δευτέρου βαθμού, διότι οι συναρτήσεις $f(x,y) = 3xy$ και $g(x,y) = 2y^2 - x^2$ είναι ομογενείς δευτέρου βαθμού.

Χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός

$$y = ux$$

οπότε προκύπτει ότι

$$dy = udx + xdu$$

και επομένως,

$$\left(2u^2x^2 - x^2\right)(udx + xdu) + 3xuxdx = 0$$

$$\left(2u^2 - 1\right)(udx + xdu) + 3udx = 0$$

$$\left(2u^2 - 1\right)xdu + \left(2u^3 + 2u\right)dx = 0.$$

Για $u \neq 0$ προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\int \frac{2u^2 - 1}{u\left(u^2 + 1\right)}du = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{3u}{u^2 + 1} - \frac{1}{u}\right)du = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{3}{4}\int \frac{1}{u^2 + 1}d\left(u^2 + 1\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{3}{4}\ln\left(u^2 + 1\right) - \frac{1}{2}\ln|u| = -\ln|x| + \ln k$$

όπου $k > 0$.

Η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{\left(u^2+1\right)^{\frac{3}{4}}}{|u|^{\frac{1}{2}}}=\frac{k}{|x|}$$

$$\left(u^2+1\right)^3=k^4\frac{u^2}{x^4}$$

$$\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)^3=c\frac{y^2}{x^6}$$

όπου $c=k^4>0$.

Άρα,

$$\left(y^2+x^2\right)^3=cy^2,\ c>0.$$

Κατόπιν τούτων, η γενική λύση της δοσμένης εξίσωσης αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $y=y(x)$ που δίδονται σε πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση

$$\left(y^2+x^2\right)^2=cy^2,\ c>0$$

και τη συνάρτηση[3] $y=0$ (που αποκλείσθηκε προηγουμένως λόγω του περιορισμού $u\neq 0$, ή $\frac{y}{x}\neq 0$).

[3] Επαληθεύεται, θέτοντας y=0 στην εξίσωση.

ΑΣΚΗΣΗ 44

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

(i) $y' + y = \dfrac{1}{1+e^{2x}}, \; y(0) = \pi,$

(ii) $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{\sin x}{x^3}, \; y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,$

η πρώτη με τη βοήθεια ενός ολοκληρωτικού παράγοντα και η δεύτερη με τη γενική θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

ΛΥΣΗ

(i) Ζητείται να προσδιορισθεί μια θετική συνάρτηση $I(x)$ τέτοια ώστε το πρώτο μέλος της ισοδύναμης εξίσωσης

$$I(x)y' + I(x)y = \frac{I(x)}{1+e^{2x}} \qquad (1)$$

να είναι ίσο με την παράγωγο του γινομένου $I(x)y$.

Τούτο όμως συμβαίνει όταν

$$\frac{dI(x)}{dx} = I(x)$$

$$\int \frac{dI(x)}{I(x)} = \int 1dx$$

$$\ln I(x) = x$$

$$I(x) = e^x.$$

Κατόπιν τούτων, η εξίσωση (1) γίνεται

$$\left(e^x y\right)' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$e^x y = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

$$e^x y = \int \frac{d\left(e^x\right)}{1+\left(e^x\right)^2}$$

$$e^x y = \operatorname{arctg} e^x + c$$

$y = e^{-x}\left(\operatorname{arctg} e^x + c\right).$

Αν τεθεί $x = 0$ και $y = \pi$ προκύπτει ότι

$$\pi = \operatorname{arctg} 1 + c \Leftrightarrow \pi = \frac{\pi}{4} + c.$$

Άρα $c = \dfrac{3\pi}{4}$ και η ζητούμενη λύση είναι

$$y = e^{-x}\left(\operatorname{arctg} e^x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

(ii) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{\sin x}{x^3}$

Αρχικά επιλύεται η αντίστοιχη ομογενής διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{3y}{x} = 0 \qquad (2)$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών.
Για $y \neq 0$ προκύπτει ότι

$$\int \frac{dy}{y} = -3\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x|^3 + \ln k$$

$$y = \frac{c}{x^3}, \text{ όπου } c \in \mathbb{R}.$$

Επειδή η γενική λύση της αρχικής εξίσωσης είναι το άθροισμα μιας μερικής λύσης της και της γενικής λύσης της (2), αρκεί να ευρεθεί μια μερική λύση της αρχικής εξίσωσης.
Τούτο επιτυγχάνεται με τη μέθοδο του Lagrange κατά την οποία η ζητούμενη μερική λύση είναι της μορφής

$$\psi(x) = \frac{g(x)}{x^3}.$$

Τότε όμως προκύπτει ότι

$$\frac{1}{x^3}g'(x) - \frac{3}{x^4}g(x) + \frac{3g(x)}{x^4} = \frac{\sin x}{x^3}$$

$$g'(x) = \sin x$$

$$g(x) = \int \sin x dx$$

$$g(x) = -\cos x,$$

οπότε

$$\psi(x) = -\frac{\cos x}{x^3}.$$

Άρα η γενική λύση της αρχικής εξίσωσης δίδεται από τον τύπο

$$y = \frac{-\cos x + c}{x^3}.$$

Αν τεθεί $x = \frac{\pi}{2}$ και $y = 1$ προκύπτει ότι

$$1 = \frac{-\cos\frac{\pi}{2} + c}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}.$$

Άρα $c = \frac{\pi^3}{8}$ και η ζητούμενη λύση είναι

$$y = \frac{-\cos x + \frac{\pi^3}{8}}{x^3}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 46

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx}+xy=\frac{x}{y^2},\ y\neq 0 \text{ και } y(0)=2.$$

ΛΥΣΗ

Η δοσμένη διαφορική εξίσωση είναι της μορφής Bernoulli, οπότε εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός $u=y^3$.

Άρα είναι $y=u^{\frac{1}{3}}$ και $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\frac{du}{dx}$.

Κατόπιν τούτων, η δοσμένη διαφορική εξίσωση γίνεται

$$\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\frac{du}{dx}+xu^{\frac{1}{3}}=u^{-\frac{2}{3}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx}+3xu=3x \tag{1}$$

Η τελευταία διαφορική εξίσωση είναι γραμμική και θα λυθεί με τη βοήθεια ενός ολοκληρωτικού παράγοντα I.

Πραγματικά, αναζητείται συνάρτηση $I>0$ τέτοια ώστε το πρώτο μέλος της ισοδύναμης εξίσωσης

$$I\frac{du}{dx}+3Ixu=3Ix \tag{2}$$

να είναι ίσο με την παράγωγο της Iu.

Τούτο συμβαίνει όταν

$$\frac{dI}{dx}=3Ix$$

$$\int \frac{dI}{I} = \int 3x\,dx$$

$$\ln I = \frac{3}{2}x^2$$

$$I = e^{\frac{3}{2}x^2}.$$

Κατόπιν τούτων, η εξίσωση (2) γίνεται

$$\frac{d\left(e^{\frac{3}{2}x^2}u\right)}{dx} = 3xe^{\frac{3}{2}x^2}$$

$$e^{\frac{3}{2}x^2}u = \int 3xe^{\frac{3}{2}x^2}dx$$

$$e^{\frac{3}{2}x^2}u = e^{\frac{3}{2}x^2} + c$$

$$u = 1 + ce^{-\frac{3}{2}x^2},$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

Άρα η γενική λύση της δοσμένης εξίσωσης είναι

$$y = \sqrt[3]{1 + ce^{-\frac{3}{2}x^2}}.$$

Για $x = 0$ και $y = 2$ προκύπτει ότι

$$2 = \sqrt[3]{1 + c},$$

οπότε $c = 7$ και συνεπώς η ζητούμενη λύση είναι

$$y = \sqrt[3]{1 + 7e^{-\frac{3}{2}x^2}}.$$